Feuille 3 - Ex.4 (6)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 0}\left(\sqrt[3]{n+(-1)^n}-\sqrt[3]{n}\right)\right)$

On pose $u_n = \sqrt[3]{n+(-1)^n} - \sqrt[3]{n} \; = (n+(-1)^n)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}}$.
Est-ce que $u_n \to 0$ quand $n \to \infty$?
On va utiliser le développement limité de $(1+x)^{\frac{1}{3}}$ quand $x \to 0$.
Rappel : $(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + o(x)$ quand $x \to 0$.
On a donc

$$\begin{aligned}
u_n &= n^{\frac{1}{3}}\left((1+\frac{(-1)^n}{n})^{\frac{1}{3}} - 1\right) \\
&= n^{\frac{1}{3}}\left((1+\frac{(-1)^n}{3n} + o(\frac{1}{n})) - 1\right) \\
&= n^{\frac{1}{3}}\left(\frac{(-1)^n}{3n} + o(\frac{1}{n})\right) \\
&= \frac{(-1)^n}{3n^{\frac{2}{3}}} + o(\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}})
\end{aligned}$$

...

Feuille 3 - Ex.4 (6)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 0}\left(\sqrt[3]{n+(-1)^n}-\sqrt[3]{n}\right)\right)$

... $u_n = \frac{(-1)^n}{3n^{\frac{2}{3}}} + o(\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}})$. On a donc $u_n \sim \frac{(-1)^n}{3n^{\frac{2}{3}}}$.
En particulier $u_n \to 0$ quand $n \to \infty$.
On a même que $\left(\sum \frac{(-1)^n}{3n^{\frac{2}{3}}}\right)$ est alternée et vérifie le critère des séries alternées (car $\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$ est décroissante et tend vers 0).
Mais on ne peut pas conclure tout de suite car nos séries ne sont pas positives.
On développe à l'ordre suivant.
$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2)$ quand $x \to 0$.
Le terme suivant sera du type $\frac{\star}{n^{\frac{5}{3}}}$.

Feuille 3 - Ex.4 (6)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 0}\left(\sqrt[3]{n+(-1)^n}-\sqrt[3]{n}\right)\right)$

Et $\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}$ est le terme d'une série de Riemann convergente.
Pour étudier la convergence, on n'a pas besoin de connaître $\star$.
Ecrivons plutôt $(1+x)^\alpha = 1+\alpha x + O(x^2)$ quand $x \to 0$.
On peut réécrire le même calcul que ci-dessus avec $O(\frac{1}{n^2})$ au lieu de $o(\frac{1}{n})$.

$$\begin{aligned}
u_n &= n^{\frac{1}{3}}\big((1+\frac{(-1)^n}{n})^{\frac{1}{3}}-1\big)\\
&= n^{\frac{1}{3}}\big((1+\frac{(-1)^n}{3n}+O(\frac{1}{n^2}))-1\big)\\
&= n^{\frac{1}{3}}\big(\frac{(-1)^n}{3n}+O(\frac{1}{n^2})\big)\\
&= \frac{(-1)^n}{3n^{\frac{2}{3}}}+O(\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}})
\end{aligned}$$

...

Feuille 3 - Ex.4 (6)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 0}\left(\sqrt[3]{n+(-1)^n}-\sqrt[3]{n}\right)\right)$

... On écrit $u_n = v_n + w_n$ avec $v_n = \frac{(-1)^n}{3n^{\frac{2}{3}}}$ et $w_n = u_n - v_n$.
On a donc $w_n = O(\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}})$.
On a vu que $\left(\sum v_n\right)$ converge par le critère des séries alternées.
La série de Riemann $\left(\sum \frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}\right)$ converge car $\frac{5}{3} > 1$.
Puisque $w_n = O(\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}})$, on a aussi $|w_n| = O(\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}})$.
Donc par le critère de comparaison de séries à termes positifs, on déduit que $(\sum |w_n|)$ converge.
Donc $(\sum w_n)$ est absolument convergente.
Finalement $(\sum u_n)$ est somme de deux séries convergentes, donc elle converge.

Feuille 3 - Ex.4 (7)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 1}\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\right)$

On pose $u_n = e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.
On a $u_n = e - e^{n\log(1+\frac{1}{n})}$.
Posons $v_n = n\log(1+\frac{1}{n})$ et développons à l'ordre 1 en $\frac{1}{n}$.

$$\begin{aligned} v_n &= n\log\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &= n\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n}\Big)^2 + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big) \\ &= 1 - \frac{1}{2n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big) \end{aligned}$$

On écrit $v_n = 1 + w_n$ avec $w_n = -\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
...

Ainsi $u_n = e - e^{1+w_n} = e(1 - e^{w_n})$ avec $w_n = -\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
On $w_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$.
En particulier $w_n \to 0$ quand $n \to \infty$ et on a

$$e^{w_n} = 1 + w_n + o(w_n).$$

Comme $w_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ on a $o(w_n) = o\left(\frac{1}{n}\right)$.
Donc

$$\begin{aligned} e^{w_n} &= 1 + \left(-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Feuille 3 - Ex.4 (7)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 1}\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\right)$

Puis

$$u_n = e(1-e^{w_n}) = e\Big(\frac{1}{2n} + o\big(\frac{1}{n}\big)\Big) = \frac{e}{2n} + o\big(\frac{1}{n}\big)$$

On peut aussi écrire $u_n = \frac{e}{2n} + o\left(\frac{e}{2n}\right)$.
Donc $u_n \sim \frac{e}{2n}$.
$\left(\sum \frac{e}{2n}\right)$ est multiple d'une série de Riemann divergente. Donc $\left(\sum \frac{e}{2n}\right)$ diverge.
Puisque $u_n \sim \frac{e}{2n}$ et que $\frac{e}{2n} > 0$, on a aussi $u_n > 0$ pour n assez grand.
Par le théorème de comparaison de séries à termes positifs, on déduit que $(\sum u_n)$ est divergente.

Feuille 3 - Ex.4 (9)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n+a^n}\right)$

On pose $u_n = \frac{(-1)^n}{n+a^n}$ et $v_n = n + a^n$. Ainsi $u_n = \frac{(-1)^n}{v_n}$.
Pour $|a| > 1$, $|a|^n$ "l'emporte" sur n. Pour $|a| \leq 1$, c'est le contraire.
Donc on va distinguer ces deux cas.

(1) On suppose $|a| > 1$. Par comparaison polynôme/exponentielle on a alors $n = o(a^n)$.
Donc $\frac{n+a^n}{a^n} = \frac{n}{a^n} + 1$ tend vers 1 quand $n \to \infty$.
Autrement dit $n + a^n \sim a^n$ (quand $n \to \infty$).

Attention, nos séries ne sont pas positives. N'allons pas trop vite

Pour les normes on a aussi :
$\left|\frac{n+a^n}{a^n}\right| = \left|\frac{n}{a^n} + 1\right|$ tend vers 1 quand $n \to \infty$.
Donc $|n + a^n| \sim |a|^n$ (quand $n \to \infty$).
Puis $\left|\frac{(-1)^n}{n+a^n}\right| = \frac{1}{|n+a^n|} \sim |a|^{-n}$
...

...
La série $\left(\sum_n |a|^{-n}\right)$ est une série géométrique de raison $|a|^{-1} < 1$.
Donc elle converge.
Par comparaison de séries à termes positifs $\left(\sum_{n\geq 1} |u_n|\right)$ est aussi convergente.
Autrement dit $\left(\sum_{n\geq 1} u_n\right)$ est absolument convergente.

(2) On suppose $|a| \leq 1$. Par comparaison polynôme/exponentielle on a alors $a^n = o(n)$.
On en déduit aussi $u_n \sim \frac{(-1)^n}{n}$.
Mais la série $\left(\sum \frac{(-1)^n}{n}\right)$ est seulement semi-convergente, et on ne pourra pas utiliser directement les théorèmes de comparaison.
On développe u_n à l'ordre 2 en $\frac{1}{n}$.
Comme $\frac{a^n}{n} \to 0$ quand $n \to \infty$, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+a^n} &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{a^n}{n}} \\ &= \frac{1}{n}\Big(1 - \frac{a^n}{n} + o(\frac{a^n}{n})\Big) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{a^n}{n^2} + o(\frac{a^n}{n^2}) \end{aligned}$$

...

Feuille 3 - Ex.4 (9)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n+a^n}\right)$

...

Ainsi $u_n = \frac{(-1)^n}{n} + v_n$, où $v_n = (-1)^n\left(-\frac{a^n}{n^2} + o\left(\frac{a^n}{n^2}\right)\right)$.

On remarque que $|a^n| \leq 1$, donc $v_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, par comparaison de séries à termes positifs $\left(\sum |v_n|\right)$ est aussi convergente.

En particulier $\left(\sum v_n\right)$ est convergente.

D'autre part la série $\left(\sum \frac{(-1)^n}{n}\right)$ vérifie le critère des séries alternées. Donc elle converge.

Et finalement $\left(\sum_{n\geq 1} u_n\right)$ est convergente.

On remarque que $|u_n| \geq \frac{1}{n+1}$. On peut en déduire que $\left(\sum_{n\geq 1} |u_n|\right)$ diverge. Donc $\left(\sum_{n\geq 1} u_n\right)$ est seulement semi-convergente.