Feuille 3 - Ex.5 (1)

Convergence et somme de $\left(\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{-1}{4}\right)^n \right)$.

La série est une série géométrique de raison $\frac{-1}{4}$.
Comme $|\frac{-1}{4}| < 1$ la série converge.
Par la propriété vue en cours sur les multiples de séries convergentes et sur leurs sommes, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{-1}{4}\right)^n &= \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{-1}{4}\right)^2 \left(\frac{-1}{4}\right)^m \quad \text{avec } m = n-2 \\
&= \left(\frac{-1}{4}\right)^2 \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{-1}{4}\right)^m \\
&= \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{-1}{4}\right)} = \frac{1}{16} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{20}
\end{aligned}$$

Autre solution page suivante

Feuille 3 - Ex.5 (1)
Convergence et somme de $\left(\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{-1}{4}\right)^n\right)$.

On aurait pu aussi écrire $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n = (\sum_{n=0}^{+\infty} u_n) - (u_0 + u_1)$.
Donc

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{+\infty}(\frac{-1}{4})^n &= \Big(\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{-1}{4})^n\Big) - (1 + \frac{(-1)}{4}) \\
&= \frac{1}{1-\left(\frac{-1}{4}\right)} - \frac{3}{4} \\
&= \frac{4}{5} - \frac{3}{4} \\
&= \frac{16-15}{20} = \frac{1}{20}
\end{aligned}$$

Feuille 3 - Ex.5 (2)
Convergence et somme de $\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right)$

La série ressemble beaucoup à une série téléscopique et on va l'étudier de la même façon, par les sommes partielles.
On pose $S_N = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$.
On obtient

$$\begin{aligned}
S_N &= (\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}) - (\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+2}) \\
&= (\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}) - (\sum_{m=3}^{N+2}\frac{1}{m}) \qquad \text{avec } m = n+2 \\
&= (\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n}) - ((\sum_{m=3}^{N}\frac{1}{m}) + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2})
\end{aligned}$$

...

Feuille 3 - Ex.5 (2)
Convergence et somme de $\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right)$

...

$$\begin{aligned} S_N &= (\frac{1}{1}+\frac{1}{2}) - (\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+2}) \\ &= \frac{3}{2} - v_N, \end{aligned}$$

où on a posé $v_N = \frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+2}$.

On a $v_N \to 0$ quand $N \to +\infty$.
Donc les sommes partielles convergent vers $\frac{3}{2}$.
Ceci montre à la fois que la série converge et que sa somme est $\frac{3}{2}$.

Feuille 3 - Ex.5 (3)
Convergence et somme de $\left(\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^2-4}\right)$

Convergence :
(facultatif – car on va retrouver la convergence par le calcul des sommes partielles)

On peut voir la convergence en comparant à une série de Riemann.
Posons $u_n = \frac{1}{n^2-4}$. Pour $n \geq 3$ on a $u_n > 0$.
On a aussi $n^2 u_n = \frac{n^2}{n^2-4} = \frac{1}{1-\frac{4}{n^2}}$. Donc $n^2 u_n \to 1$ quand $n \to +\infty$ et $u_n \sim \frac{1}{n^2}$.
Comme $(\sum \frac{1}{n^2})$ est une série de Riemann convergente (puisque $2 > 1$), et que $u_n > 0$, $\frac{1}{n^2} > 0$, on en déduit par le théorème de comparaison de séries à termes positifs que $(\sum u_n)$ est convergente.
...

Feuille 3 - Ex.5 (3)
Convergence et somme de $\left(\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^2-4}\right)$

En fait on va retrouver la convergence par le calcul de la somme.
Comme $n^2 - 4 = (n-2)(n+2)$, on sait que u_n se décompose sous la forme $u_n = \frac{a}{n-2} + \frac{b}{n+2}$.
Si $a = -b$ on aura une série de type téléscopique.
On calcule

$$\frac{a}{n-2} + \frac{b}{n+2} = \frac{a(n+2) + b(n-2)}{n^2-4} = \frac{(a+b)n + 2(a-b)}{n^2-4}$$

Pour trouver u_n il nous faut $a + b = 0$, $a - b = \frac{1}{2}$, d'où $a = -b = \frac{1}{4}$.
Ainsi $u_n = v_{n-2} - v_{n+2}$, en posant $v_n = \frac{1}{4n}$.
...

Feuille 3 - Ex.5 (3)
Convergence et somme de $\left(\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^2-4}\right)$

En faisant les sommes partielles on va obtenir des annulations :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=3}^{N} u_n &= \sum_{n=3}^{N}(v_{n-2} - v_{n+2}) = \sum_{n=3}^{N} v_{n-2} - \sum_{n=3}^{N} v_{n+2} \\
&= \sum_{p=1}^{N-2} v_p - \sum_{q=5}^{N+2} v_q \quad \text{avec } p = n-2,\ q = n+2 \\
&= (v_1 + \cdots + v_4 + \sum_{p=5}^{N-2} v_p) - ((\sum_{q=5}^{N-2} v_q) + v_{N-1} + \cdots + v_{N+2}) \\
&= (v_1 + \cdots + v_4) - (v_{N-1} + \cdots + v_{N+2})
\end{aligned}$$

On a $(v_{N-1} + \cdots + v_{N+2}) \to 0$ quand $N \to +\infty$,

...

donc $\sum_{n=3}^{N} u_n$ tend vers $(v_1 + \cdots + v_4)$ quand $N \to +\infty$.

Ceci montre que $(\sum_{n\geq 3} u_n)$ converge et que sa somme est

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 3} u_n &= \frac{1}{4}(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}) \\ &= \frac{1}{4}(\frac{24+12+8+6}{24}) \\ &= \frac{25}{48}\end{aligned}$$

Feuille 3 - Ex.5 (4)
Convergence et somme de $\left(\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)\right)$

On a une série de type téléscopique.
On pose $u_n=\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}$ et $v_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$.
Ainsi $u_n=v_{n-1}+v_{n+1}-2v_n$.
D'où

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{N}u_n &= \sum_{n=2}^{N}(v_{n-1}+v_{n+1}-2v_n)\\ &= \sum_{n=2}^{N}v_{n-1}+\sum_{n=2}^{N}v_{n+1}-2\sum_{n=2}^{N}v_n\\ &= \sum_{p=1}^{N-1}v_p+\sum_{q=3}^{N+1}v_q-2\sum_{n=2}^{N}v_n \qquad p=n-1,\quad q=n+1\end{aligned}$$

...

Feuille 3 - Ex.5 (4)
Convergence et somme de $\left(\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)\right)$

...

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{N} u_n &= \sum_{p=1}^{N-1} v_p + \sum_{q=3}^{N+1} v_q - 2\sum_{n=2}^{N} v_n \\
&= \left(v_1 - v_N + \sum_{p=2}^{N} v_p\right) + \left(v_{N+1} - v_2 + \sum_{q=2}^{N} v_q\right) - 2\sum_{n=2}^{N} v_n \\
&= (v_1 - v_N +) + (v_{N+1} - v_2)
\end{aligned}$$

On a $(-v_N + v_{N+1}) \to 0$ quand $N \to +\infty$,
donc $\sum_{n=2}^{N} u_n$ tend vers $v_1 - v_2$ quand $N \to +\infty$.
Donc la série converge et sa somme est
$\sum_{n=2}^{+\infty} u_n = v_1 - v_2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$.