Partiel

du lundi 9 novembre 2020 de 7h30 à 9h30

Une feuille recto-verso manuscrite est autorisée. Les autres documents et les dispositifs électroniques sont interdits. Toutes les réponses doivent être justifiées et la qualité de la rédaction sera un élément d'appréciation de la correction. Un barême est donné à titre indicatif.

Exercice 1. Autour du cours

1. Par hypothèse, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} \leq au_n$. Ceci montre (par récurrence) que pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq a^n u_0$. Or la série $\big(\sum_{n\geq 0} a^n u_0\big) = u_0\big(\sum_{n\geq 0} a^n\big)$ converge (série géométrique de raison $a \in]0,1[$). Par critère de comparaison des séries à termes positifs, cela montre que la série $\big(\sum_{n\geq 0} u_n\big)$ converge.

Remarque : ce résultat fait partie de la preuve du critère de d'Alembert. Dans cette question de cours, le critère de comparaison utilisé n'est pas à démontrer (il est antérieur dans le cours). Rappelons sa preuve : la série $\big(\sum_{n\geq 0} u_n\big)$ est une suite croissante majorée, donc convergente.

2. Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{1}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+1})_{n\in\mathbb{N}}$ conviennent : la série $\big(\sum_{n\geq 0} u_n\big)$ est une série de Riemann divergente, la série $\big(\sum_{n\geq 0} v_n\big)$ est une série alternée convergente et la majoration $|u_n| \leq |v_n|$ résulte du fait que $\sqrt{n} \leq n$ pour tout entier n.

Exercice 2.

On utilisera sans le signaler le résultat du cours suivant : pour toute suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ et pour tout $n_1, n_2 \geq n_0$, les séries $\big(\sum_{n\geq n_1} u_n\big)$ et $\big(\sum_{n\geq n_2} u_n\big)$ sont de même nature.

1. Pour tout $n \geq 1$, on a $0 \leq \left|\dfrac{\cos(n)}{n^2}\right| \leq \dfrac{1}{n^2}$.

La série $\big(\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}\big)$ est une série de Riemann convergente. Cela montre, par critère de comparaison de séries à termes positifs, que la série $\big(\sum_{n\geq 1} \dfrac{\cos(n)}{n^2}\big)$ est absolument convergente, donc convergente.

2. Pour tout $n \geq 2$, on a $2 - \frac{1}{n} \geq \frac{3}{2}$, donc $0 \leq \dfrac{1}{n^{2-\frac{1}{n}}} \leq \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. Or la série $\big(\sum_{n\geq 2} \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\big)$ est une série de Riemann convergente. Cela montre, par critère de comparaison des séries à termes positifs, que la série $\big(\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^{2-\frac{1}{n}}}\big)$ est convergente, et donc absolument convergente puisqu'à termes positifs.

3. Pour tout $N \geq 1$, la somme partielle $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \big(\sin\big(\frac{1}{n}\big) - \sin\big(\frac{1}{n+1}\big)\big)$ est "télescopique" :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \big(\sin\big(\frac{1}{n}\big) - \sin\big(\frac{1}{n+1}\big)\big) &= \sum_{n=1}^{N} \sin\big(\frac{1}{n}\big) - \sum_{n=1}^{N} \sin\big(\frac{1}{n+1}\big) \\
&= \big(1 + \sin\big(\frac{1}{2}\big) + \cdots + \sin\big(\frac{1}{n}\big)\big) - \big(\sin\big(\frac{1}{2}\big) + \cdots + \sin\big(\frac{1}{n}\big) + \sin\big(\frac{1}{n+1}\big)\big) \\
&= 1 - \sin\big(\frac{1}{n+1}\big).
\end{aligned}$$

Cela montre que la série converge (et que sa somme vaut 1).

fonction sinus est croissante sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, cela montre que la série $\left(\sum_{n\geq n_1} u_n\right)$ est à termes positifs. Elle est donc absolument convergente.

Autre preuve : on peut utiliser un développement limité pour montrer la convergence de la série. On peut dire par exemple :
$\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $\sin\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} + o\left(\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right)$. *Donc, comme* $\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n+1}$ *:*

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n(n+1)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

[Puisque $\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n+1}$*, l'équivalence* $\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$ *et la définition de o justifie la dernière égalité.]*

Ceci montre que $u_n \sim \frac{1}{n^2}$*. Donc* u_n *est positive à partir d'un certain rang et comme la série* $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\right)$ *est une série de Riemann convergente, par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série* $\left(\sum_{n\geq 1} u_n\right)$ *est convergente.*

Remarque : on pouvait utiliser un développement limité en $\frac{1}{n}$ *de* $\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}$*, mais cela rallongeait la preuve inutilement.*

4. Pour tout entier n pair, on a $u_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^n \geq 1$. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ ne tend donc pas vers 0. La série $\left(\sum_{n\geq 1} u_n\right)$ diverge.

5. Comme $\frac{1}{2n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, le développement limité de la fonction ln en 1 donne :

$$\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{2n+1}\right) = \frac{(-1)^n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(2n+1)^2}\right).$$

Or :

- — la série $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{2n+1}\right)$ est une série convergente par le critère spécial des séries alternées,
- — la série $\left(\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{(2n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(2n+1)^2}\right)\right)\right)$ est convergente car son terme général est équivalent à $\frac{1}{4\,n^2}$, donc positif à partir d'un certain rang, et $\frac{1}{4\,n^2}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente.

Ceci montre que la série $\left(\sum_{n\geq 1} u_n\right)$, somme de deux séries convergentes, est convergente.

On a vu que $u_n \sim \frac{(-1)^n}{2n+1}$, donc $|u_n| \sim \frac{1}{2n+1}$ qui est le terme général d'une série divergente $(0 \leq \frac{1}{2n+1} \sim \frac{1}{2n}$ et $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\right)$ diverge).

Remarque : il est inutile de faire un développement limité en $\frac{1}{n}$ *de* $\frac{1}{2n+1}$ *dans cette preuve puisque la quantité* $\frac{1}{2n+1}$ *tend vers 0 quand* n *tend vers l'infini.*

6. Montrons par le critère spécial des séries alternées que la série $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}\right)$ est convergente.

- — Le signe de la suite $\left(\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}\right)$ est alterné.

$n+1 \qquad \sqrt{n}$

— Considérons la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$ définie sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}(x+1)} - \dfrac{\sqrt{x}}{(x+1)^2} = \dfrac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$. Donc f est décroissante sur l'intervalle $[1,+\infty[$, ce qui montre que la suite $\left(\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}\right)_{n\geq 1}$ est décroissante.

Ceci montre que la série $\left(\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}\right)$ satisfait le critère spécial des séries alternées, donc converge.

Comme $\dfrac{\sqrt{n}}{n+1} \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et que $\left(\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est une série de Riemann divergente, la série $\left(\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}\right)$ n'est pas absolument convergente.

Exercice 3.

1. On a $\ln\left(\dfrac{2n+1}{2n-1}\right) = \ln\left(\dfrac{1+\frac{1}{2n}}{1-\frac{1}{2n}}\right) = \ln(1+\frac{1}{2n}) - \ln(1-\frac{1}{2n})$.

Le développement limité de ln en 1 donne $\ln(1+\frac{1}{2n}) = \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n^2})$ et $\ln(1-\frac{1}{2n}) = -\frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n^2})$. Donc $u_n = \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n^2})$ et $u_n \sim \frac{1}{n}$.

Donc u_n est positif à partir d'un certain rang et comme la série $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\right)$ est une série de Riemann divergente, par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\left(\sum_{n\geq 1} u_n\right)$ diverge.

2. Soit $N \geq 1$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} u_n &= \sum_{n=1}^{N} \big(\ln(2n+1) - \ln(2n-1))\big) \\
&= \Big(\sum_{n=1}^{N} \ln(2n+1)\Big) - \sum_{n=1}^{N} \big(\ln(2n-1))\big) \\
&= \big(\ln(3) + \cdots + \ln(2N+1) - \big(\ln(1) + \cdots + \ln(2N-1)\big) \\
&= \ln(2N+1).
\end{aligned}$$

Comme $\ln(2N+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on retrouve que la série $\left(\sum_{n\geq 1} u_n\right)$ diverge.