Université Grenoble-Alpes

Partiel

du Samedi 5 Décembre 2020 de 9h00 à 10h00

Une feuille recto-verso manuscrite est autorisée. Les autres documents et les dispositifs électroniques sont interdits. Toutes les réponses doivent être justifiées et la qualité de la rédaction sera un élément d'appréciation de la correction. Un barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1.

$$f(x) := \int_x^{x^2} \frac{e^t}{t+1} dt .$$

Sans calculer la primitive de $\frac{e^x}{x+1}$ répondre aux questions suivantes

1. Calculer $f(0)$ et $f(1)$ et étudier le signe de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$.
2. Justifier que f est dérivable et calculer sa dérivée.

Exercice 2. À l'aide des sommes de Riemann, calculer la limite suivante

$$\lim_n \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} ,$$

Exercice 3. Pour chacune des fonctions f suivantes

- Indiquer le domaine de définition D_f ;
- Trouver *toutes* les primitives de f sur chaque intervalle de définition.

$$1) \quad f(x) = \frac{x+2}{x^2+x}$$

$$2) \quad f(x) = \frac{1}{2x^2+2x+1}$$

$$3) \quad f(x) = \sin^2(x)\cos^2(x)$$

$$4) \quad f(x) = e^{-x}\sin(x)$$

Exercice 4. En faisant un changement de variable calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\int_1^2 \frac{(\ln(x))^n}{x} dx.$$

Solutions

Exercice 1.

1.1. Si $x = 0, 1$ on a $x = x^2$ et les deux bornes de l'intégrale coïncident, donc

$$f(0) \ = \ f(1) \ = \ \int_0^0 \frac{e^t}{t+1} dt \ = \ 0 \, .$$

Pour le signe de $f(x)$ on peut distinguer deux cas

- Si $x \in [0, 1]$ on a $x^2 < x$ et donc

$$f(x) \ = \ \int_x^{x^2} \frac{e^t}{t+1} dt \ = \ - \int_{x^2}^{x} \frac{e^t}{t+1} dt$$

  et comme $\frac{e^t}{/}(t+1)$ est strictement positive on a $f(x) \leq 0$ pour tout $x \in [0, 1]$ et $f(x) < 0$ quand $x \in]0, 1[$.

- Si $x \in [1, +\infty[$ on a $x^2 \geq x$ et par le même raisonnement $f(x) \geq 0$ et $f(x) > 0$ si $x > 1$.

1.2. La fonction $\frac{e^t}{t+1}$ est définie pour tout $t \neq -1$ et est continue dans son domaine de définition. Par le théorème fondamentale de l'analyse vu en cours, pour tout $x \geq 0$ l'intégrale

$$I(x) := \int_0^x \frac{e^t}{t+1} dt$$

existe car l'intervalle $[0, x]$ est fermé et borné, et de plus $I(x)$ est une primitive de la fonction $\frac{e^t}{t+1}$ sur $[0, +\infty[$. En d'autres termes, $I(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a

$$I'(x) \ = \ \frac{e^x}{x+1} \, .$$

On remarque qu'on a

$$f(x) \ = \ \int_x^{x^2} \frac{e^t}{t+1} dt = \int_0^{x^2} \frac{e^t}{t+1} dt - \int_0^x \frac{e^t}{t+1} dt = I(x^2) - I(x) \, .$$

On déduit de cette expression, et du fait que $I(x)$ est dérivable, que la fonction $f(x)$ est dérivable dans $\mathbb{R}_+$, car c'est composée de fonctions dérivables I et x^2. De plus sa dérivée est

$$f'(x) \ = \ \frac{d}{dx}\Big(I(x^2) - I(x)\Big) \ = \ 2xI'(x^2) - I'(x) \ = \ 2x\frac{e^{x^2}}{x^2+1} - \frac{e^x}{x+1} \, .$$

Exercice 2.

2.1. On a

$$\lim_n \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2} \ = \ \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n(1+(\frac{k}{n})^2)} \ = \ \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2}$$

Celle ci est donc la somme de Riemann de la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ sur l'intervalle $[0, 1]$. Cette fonction est continue sur $[0, 1]$ qui est un intervalle compact (fermé et borné), donc par le résultat du cours l'intégrale existe. De plus, par le théorème des sommes de Riemann, on a

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = [\arctan(x)]_0^1 = \arctan(1) = \pi/2$$

Exercice 3.

3.1. La fonction $f(x) = \frac{x+2}{x(x+1)}$ est une fraction rationnelle. On sait que pour calculer sa primitive on doit la décomposer en éléments simples. Par le théorème de la décomposition en éléments simples on sait qu'on peut trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) \;=\; \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}\;.$$

- Calculons a. La partie à droite de cette égalité nous dit que $a = xf(x)_{|x=0}$. En appliquant cela à l'expression $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$ on trouve

$$a \;=\; x \cdot \frac{x+2}{x(x+1)}\Big|_{x=0} \;=\; \frac{(0+2)}{(0+1)} \;=\; 2\;.$$

- Calculons b. Le même principe donne $b = (x+1)f(x)_{|x=-1}$. Donc

$$b \;=\; (x+1) \cdot \frac{(x+2)}{x(x+1)}\Big|_{x=-1} \;=\; \frac{(-1+2)}{-1} \;=\; -1\;.$$

On vient de montrer que

$$f(x) \;=\; \frac{2}{x} - \frac{1}{x+1}\;.$$

Une primitive de f est alors donnée par

$$\int f(t)dt \;=\; 2\int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{t+1} \;=\; 2\ln|t| - \ln|t+1|\;.$$

Trouvons maintenant toutes les autres primitives. Posons $F(x) := 2\ln|t| - \ln|t+1|$. Le domaine de définition des fonctions f et F est

$$D_f \;=\;]-\infty,-1[\,\cup\,]-1,0[\,\cup\,]0,+\infty[\;.$$

Notons $I_1 =]-\infty,-1[,\;\; I_2 =]-1,0[$ et $I_3 =]0,\infty[$. Si $P(x)$ est une autre primitive de f sur D_f, alors $(F-P)' = F' - P' = f - f = 0$ a une dérivée nulle. Cela entraine que $F - P$ est constante sur chacun de ces trois intervalles. Plus précisément, il existent trois constantes $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ telles que pour $k = 1,2,3$ et pour tout $x \in I_k$ on a $F(x) - P(x) = C_k$. Remarquons que ces trois constantes peuvent être différentes. Réciproquement, étant donné trois constantes comme avant, la fonction P définie par $P(x) := F(x) + C_k$ pour tout $x \in I_k$ a évidemment f comme dérivée et est donc une primitive de f.
Finalement, cela démontre que les primitives de f sur D_f s'obtiennent toutes à partir de F en lui ajoutant, comme expliqué, les constantes C_1, C_2, C_3, sur les intervalles I_1, I_2, I_3 respectivement.

3.2. Le polynôme $P(x) = 2x^2 + 2x + 1$ est irréductible car son $\Delta = 4 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -4 < 0$ est négatif et ses racines sont complexes. Par conséquence, la fonction $f(x) = \frac{1}{2x^2+2x+1}$ est un élément simple.

Exprimons $P(x) = 2x^2 + 2x + 1$ sous la forme $(ax+b)^2 + c$. En développant ce dernier $(ax+b)^2 + c = a^2x^2 + 2abx + b^2 + c$ et identifiant ses coefficients avec ceux de $P(x)$ on trouve $a^2 = 2$, $2ab = 2$ et $b^2 + c = 1$. Cela donne

$$a \;=\; \sqrt{2}\,, \quad b \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\,, \quad c \;=\; \frac{1}{2}\,.$$

Donc

$$f(x) \;=\; \frac{1}{(\sqrt{2}x + \frac{1}{\sqrt{2}})^2 + \frac{1}{2}}\;.$$

Mettons en facteur $c = 1/2$ pour retrouver au dénominateur un terme de la forme $1 + t^2$

$$f(x) \;=\; \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{(2x+1)^2+1} \;=\; \frac{2}{(2x+1)^2+1} \, .$$

On considère maintenant le changement de variable $t = 2x + 1$, $dt = 2dx$ et on trouve une primitive sous la forme

$$\int f(x)dx \;=\; 2 \cdot \int \frac{dx}{(2x+1)^2+1} \;=\; 2 \cdot \int \frac{dt/2}{t^2+1} \;=\; \arctan t \;=\; \arctan(2x+1) \, .$$

Maintenant, on a vu que le polynôme P n'a pas de zéros, donc le domaine de définition D_f de f et de sa primitive est $\mathbb{R}$. C'est un unique intervalle, donc toutes les autres primitives sont de la forme

$$F(x) = \arctan(2x+1) + C$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

3.3. On linéarise la fonction $f(x) = \sin(x)^2\cos(x)^2$ avec les formules

$$\sin(x) \;=\; \Big(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\Big) \, , \qquad \cos(x) \;=\; \Big(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\Big)$$

Cela donne

$$\begin{aligned}
\sin(x)^2\cos(x)^2 \;&=\; \Big(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\Big)^2 \cdot \Big(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\Big)^2 \\
&=\; \frac{1}{16i^2}\Big(e^{i2x} + e^{-i2x} - 2e^{ix}e^{-ix}\Big) \cdot \Big(e^{i2x} + e^{-i2x} + 2e^{ix}e^{-ix}\Big) \\
&=\; \frac{-1}{16}\Big(e^{i2x} + e^{-i2x} - 2\Big) \cdot \Big(e^{i2x} + e^{-i2x} + 2\Big) \\
&=\; \frac{-1}{16}\Big(e^{i4x} + 1 + 2e^{i2x} + 1 + e^{-i4x} + 2e^{-i2x} - 2e^{i2x} - 2e^{-i2x} - 4\Big) \\
&=\; \frac{-1}{16}\Big(e^{i4x} + e^{-i4x} - 2\Big) \\
&=\; \frac{-1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

Une primitive de $f(x) = \sin(x)^2\cos(x)^2$ est alors

$$\int \sin(x)^2\cos(x)^2 dx \;=\; \frac{-1}{8}\int \cos(4x)dx + \int \frac{1}{8}dx \;=\; \frac{-1}{8} \cdot \frac{\sin(4x)}{4} + \frac{x}{8} \;=\; \frac{x}{8} - \frac{\sin(4x)}{32}$$

On remarque que le domaine de définition de f est dans ce cas $D_f = \mathbb{R}$, et donc toutes les primitives de f sont de la forme

$$\frac{x}{8} - \frac{\sin(4x)}{32} + C$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

3.4. On va calculer une primitive $P := \int e^{-x}\sin(x)dx$ avec deux intégrations par parties. On a

$$\begin{aligned}
P \;&=\; \int e^{-x}\sin(x)dx \\
&=\; (-e^{-x})\sin(x) - \int (-e^{-x})\cos(x)dx \\
&=\; (-e^{-x})\sin(x) + \int e^{-x}\cos(x)dx \\
&=\; (-e^{-x})\sin(x) + (-e^{-x})\cos(x) - \int (-e^{-x})(-\sin(x))dx \\
&=\; -e^{-x}(\sin(x) + \cos(x)) - P
\end{aligned}$$

Donc $2P = -e^{-x}(\sin(x) + \cos(x))$ et alors une primitive est

$$P = \frac{-e^{-x}}{2}(\sin(x) + \cos(x)) .$$

Remarquons que le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$ et donc toutes les autres primitives sont de la forme

$$P = \frac{-e^{-x}}{2}(\sin(x) + \cos(x)) + C .$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 4. Posons $t = \ln(x)$. Alors $x = e^t$ et $dx = e^t dt$. Donc

$$\int_{x=1}^{x=2} \frac{(\ln(x))^n}{x} dx = \int_{t=0}^{t=\ln(2)} \frac{t^n}{e^t} e^t dt = \int_{t=0}^{t=\ln(2)} t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_{t=0}^{t=\ln(2)} = \frac{(\ln(2))^{n+1}}{n+1} .$$