Contrôle continu 1

Correction

* *
*

Exercice 1. 1. Supposons que $\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)$ converge. Cela signifie que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles, définies par $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$, admet une limite finie ℓ. Or pour tout $n \geq 1$, $u_n = S_n - S_{n-1}$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell - \ell = 0$.

2. Supposons que $\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)$ converge. Alors d'après la question 1, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Or $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, donc $v_n = \ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$. Par théorème de comparaison sur les séries à terme général positif (c'est bien le cas de u_n par hypothèse et de v_n par croissante de ln par exemple), les séries $\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)$ et $\left(\sum_{n\geq 0} v_n\right)$ sont de même nature, donc $\left(\sum_{n\geq 0} v_n\right)$ converge.

Exercice 2. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$. Or comme $3/2 > 1$, $\frac{1}{n^{3/2}}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente, donc par comparaison de séries à terme général positif, $(\sum u_n)$ converge.

2. $n = o(5^n)$ et $n^2 = o(4^n)$ par croissances comparées, donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{5^n}{4^n} = \left(\frac{5}{4}\right)^n$, terme général d'une série géométrique divergente car $\frac{5}{4} > 1$. Par théorème de comparaison de séries à terme général positif, $(\sum u_n)$ diverge également.

3.

$$\begin{aligned} u_n = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{1+\frac{1}{2n}} &= n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} - 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$, terme général d'une série de Riemann convergente, donc par théorème de comparaison de séries à terme général positif, $(\sum u_n)$ converge.

4. Si $x \geq 1$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, donc la série $(\sum u_n)$ diverge grossièrement.
Si $0 \leq x < 1$, $n^2 u_n = n^5 x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées, donc $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Or $\frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente, donc par théorème de comparaison de séries à terme général positif, $(\sum u_n)$ converge.

Exercice 3. 1. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^N \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{4} \times \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{24}$, donc la série étudiée est convergente et a pour somme $\frac{\pi^2}{24}$.

2. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, en séparant les termes d'indice pair et d'indice impair,

$$\sum_{k=1}^{2N+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{k=1}^{2N+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(2n)^2} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8},$$

donc la série $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(2n+1)^2}\right)$ est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.