Feuille de TD 4

Dans ce qui suit on désigne par G un groupe fini, non réduit au neutre et toutes les représentations sont de dimension finie et définies sur le corps $\mathbb{C}$.

Exercice 1. Soit G un groupe et (V, ρ) une représentation irréductible de G.

1. Montrer que V est de dimension 1 si et seulement si $D(G) \subset \mathrm{Ker}(\rho)$.
2. Justifier que G possède exactement $G/D(G)$ représentations irréductibles de dimension 1.
3. Montrer que $g \in D(G)$ si et seulement si $\chi(g) = 1$ pour tout caractère de dimension 1.

Exercice 2. Le but de cet exercice est de calculer toutes les représentations complexes du groupe S_3.

1. Utilisant l'abélianisé, montrer que S_3 possède exactement deux représentations complexes de degré 1.
2. Soit (V, ρ) une représentation complexe de S_3. On pose $\phi = \rho((123))$. Montrer que
$$V = V_1 \oplus V_j \oplus V_j^2$$
où V_λ est l'espace propre de ϕ de valeur propre λ et $j = e^{2\pi i/3}$.
3. Soit $\psi = \rho((12))$. Montrer que $\psi(V_j) \subset V_{j^2}$ et $\psi(V_1) \subset V_1$.
4. Montrer que V_1 est une sous-représentation de V. Montrer que l'action de S_3 sur V_1 est abélienne.
5. Montrer que pour tout $v \in V_j$ l'espace $\mathrm{Vect}(v, \psi(v))$ est une sous-représentation de S_3.
6. Déduire que toute représentation complexe irréductible de S_3 est de dimension 1 ou 2. Comment est-ce qu'on sait que la représentation irréductible de dimension 2 est unique à isomorphisme près ? Pouvez-vous en donner une construction explicite ?

Exercice 3. Le but de cet exercice sera de calculer toutes les représentations complexes du groupe H_8.

1. Utilisant l'abélianisé, montrer que H_8 possède exactement quatre représentations complexes de degré 1 et explicitez-les.
2. Soit (V, ρ) une représentation complexe de H_8. On pose $\phi = \rho(I)$. Montrer que
$$V = V_1 \oplus V_{-1} \oplus V_i \oplus V_{-i}$$
où V_λ est l'espace propre de ϕ de valeur propre λ.
3. Montrer que $V_1 \oplus V_{-1}$ est une sous-représentation de H_8 sur laquelle l'action de H_8 est abélienne. (Indice - vérifier l'action du groupe dérivé.)
4. Montrer que pour tout $v \in V_i$ on a que $J(v) \in V_{-i}$ et vice versa.
5. Déduire que pour tout $v \in V_i$ (resp. $\in V_{-i}$) on a que $\mathrm{Vect}(v, J(v))$ est une sous-représentation de V.
6. Déduire que toute représentation complexe irréductible de H_8 est de dimension 1 ou 2. Comment est ce qu'on sait que la représentation irréductible de dimension 2 est unique à isomorphisme près ? Pouvez-vous en donner une construction explicite ?

Exercice 4. *Représentations par permutation* Soit (V, ρ) une représentation de G par permutation sur un ensemble fini X, c'est-à-dire que si $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ on a

$$V = \{a_1 e_{x_1} + \dots a_m e_{x_m} | a_i \in \mathbb{C} \forall i\}$$

et pour tout $g \in G$ l'application $\rho(g)$ est définie par

$$\rho(g)(\sum_i a_i e_{g_i}) = \sum_i a_i e_{gg_i}.$$

On note $\mathcal{B} = (e_x)_{x \in X}$ la base de V associée, et χ le caractère de V.

On rappelle que si (V, ρ) désigne une représentation quelconque de G, l'endomorphisme $p = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)$ de V est un projecteur sur le sous–espace V^G. Et par suite $\dim V^G = \mathrm{tr}(p) = \langle \chi, 1 \rangle$.

1. La représentation V étant définie par l'action de G sur X, expliciter le sous–espace V^G ; en donner une base. En déduire que le nombre c d'orbites de l'action de G sur X est $\dim V^G$.
2. Pour $g \in G$, exprimer $\chi(g)$ en terme de l'action sur X, et déduire de 1) la *formule de Burnside* pour c.
3. Application : si $\mathrm{card} X \geq 2$ et si G agit transitivement, en déduire qu'il existe $g \in G$ qui agit sans point fixe dans X.

   On suppose dans la suite que $c = 1$ (l'action de G est transitive).
4. Ainsi V est somme directe de la droite V^G et de l'hyperplan G–stable H, d'équation dans $\mathcal{B}$: $\sum_{x \in X} \lambda_x = 0$. Justifier que le caractère de H est $\chi - 1$.

   On va caractériser les représentations par permutation pour lesquelles la sous–représentation H est irréductible, en en donnant des conditions équivalentes. On dit que l'action sur X est *doublement transitive* si pour tous x, y, x', y' dans X tels que $x \neq y$ et $x' \neq y'$, il existe $g \in G$ tel que $x' = g \cdot x$ et $y' = g \cdot y$. Enfin on munit $X \times X$ de l'action diagonale de G : $g \cdot (x, y) = (g \cdot x, g \cdot y)$.
5. Montrer que l'action de G sur X est doublement transitive si et seulement si celle de G sur $X \times X$ a exactement 2 orbites.
6. Montrer que le caractère de la représentation de G par permutation sur $X \times X$ est χ^2.
7. Montrer que H est irréductible si et seulement si l'action de G sur X est doublement transitive.
8. Appliquer ce résultat pour établir que la représentation standard de $\mathfrak{S}_n$ est irréductible ($n \geq 3$) et qu'il en est de même, si $n \geq 4$, pour la restriction de la représentation standard à $\mathfrak{A}_n$.

Exercice 5. Soit (V, ρ) une représentation **réelle** de G. On définit la complexifiée $V^{\mathbb{C}}$ de V de la façon suivante.

$$V^{\mathbb{C}} = \{v + iw | v, w \in V\}$$

avec la multiplication complexe $(a + ib)(v + iw) = (av - bw) + i(aw + bv)$.

On définit la complexifiée de ρ, $\rho^{\mathbb{C}}$, par

$$\rho^{\mathbb{C}}(g)(v + iw) = \rho(g)(v) + i\rho(g)(w).$$

1. Soit W une sous-représentation irréductible complexe de $V^{\mathbb{C}}$ dont une base complexe est $v_1 + iw_1, \dots, v_k + iw_k$. Montrer que
$$\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_k)$$
est une sous-représentation réelle de V.
2. Déduire que si d_k est la dimension maximale d'une représentation irréductible de G sur k alors
$$d_{\mathbb{R}} \leq 2d_{\mathbb{C}}.$$

Calculs de table de caractères

Exercice 6. *Table de caractères de D_{12}.*

Soit $G = D_{12}$ le sous-groupe des isométries de $\mathbb{R}^2$ laissant invariant l'hexagone régulier centré en O ayant le point de coordonnées $(1,0)$ pour sommet. On note r la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ et s la symétrie d'axe (Ox) et $\rho_{\mathrm{nat}} : G \to \mathrm{GL}(V_{\mathrm{nat}}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ la représentation naturelle. Ainsi on a :
$$\rho_{\mathrm{nat}}(r) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \rho_{\mathrm{nat}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On rappelle que $G = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, rs, r^2s, r^3s, r^4s, r^5s\}$.

1. Soit $\rho : G \to \mathbb{C}^*$ une représentation de degré 1. Montrer que l'on a nécessairement $\rho(r) \in \{-1, 1\}$ et $\rho(s) \in \{-1, 1\}$.
2. Pour m et n dans $\{0, 1\}$ on définit $\rho_{m,n}(r^\alpha s^\beta) = (-1)^{m\alpha}(-1)^{n\beta}$. Montrer que les $\rho_{m,n}$ définissent bien des représentations de degré 1 et qu'elles sont deux à deux non isomorphes.
3. En déduire que G a exactement 6 représentations irréductibles à isomorphisme près.
4. Vérifier que G a bien 6 classes de conjugaison.
5. Écrire la table des caractères de G.

Exercice 7. Le but de cet exercice sera de comprendre comment identifier sur la table de caractères de G certains sous-groupes spéciaux de G.

1. Soit (V, ρ) une représentation de G de caractère χ. Montrer que $g \in \mathrm{Ker}(\rho)$ si et seulement si $\chi(g) = \chi(1_G)$.
2. Montrer en considérant la représentation régulière que pour tout groupe fini G et tout élément $g \in G$ tel que $g \neq 1_G$ il existe une représentation irréductible de G, (V, ρ), telle que $g \notin \mathrm{Ker}(\rho)$.
3. Montrer que g est contenu dans $D(G)$ si et seulement si $\chi(g) = 1$ pour tout caractère irréductible de G de degré 1.
4. Montrer que si (V, ρ) est un représentation irréductible de G alors le centre $Z(G)$ agit par homothétie sur V. Montrer qu'un élément g est dans $Z(G)$ ssi pour chaque caractère irréductible χ de G on a que $|\chi(g)| = |\chi(1)|$.

5. Montrer que tout sous-groupe distingué de G, noté H, est de la forme

$$H = \{h \in G | \chi_i(h) = \chi_i(1_G) \forall i\}$$

pour une certaine famille de caractères irréductibles $\{\chi_1, \ldots, \chi_m\}$. Montrer que pour toute famille de caractères irréductibles $\chi_1, \ldots, \chi_m$ l'ensemble $\{h \in G | \chi_i(h) = \chi_i(1_G) \forall i\}$ est un sous-groupe distingué.

6. Montrer qu'un groupe G est simple ssi il n'existe pas de caractère irréductible χ de G et d'élément $g \neq 1_G \in G$ tel que $\chi(g) = \chi(1_G)$.

Exercice 8. Soit D un groupe engendré par deux éléments a et b avec les relations $a^3 = b^4 = 1$ et $bab^{-1} = a^{-1}$. On admettra que chaque élément de D s'écrit de façon unique dans la forme $a^j b^k$ avec $j \in \{0, 1, 2\}$ et $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

1. Démontrez que le centre de D est $\{1, b^2\}$.
2. Démontrez que D possède 6 classes de conjugaison, qu'on explicitera.
3. Montrer que l'abélianisé de D est isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
4. Expliciter les représentations irréductibles de D de degré 1 et donner leurs caractères.
5. Quelles sont les dimensions des autres représentations irréductibles complexes de D ?
6. Soit $A = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^3 = \mathrm{Id}$. Trouver une matrice B telle que $B^2 = -\mathrm{Id}$ et $BA = A^2 B$. Montrer que A et B définissent une représentation irréductible complexe de degré 2 de D.
7. Etablir la table des caractères de D.

Exercice 9. *Table de D_4 et $\mathbb{H}_8$*

1. Rappeler la structure de groupe des abélianisés de D_4 et $\mathbb{H}_8$ et en dresser la table de caractères.
2. Utiliser cette table pour dresser les tables de caractères des groupes D_4 et $\mathbb{H}_8$. Comparez. Qu'en déduisez–vous ?

Exercice 10. Déterminer le plus petit entier $n \geq 1$ tel que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ contienne un sous–groupe isomorphe à $\mathfrak{S}_4$. (On commencera par dresser la table des caractères de S_4.) Trouver tous les sous-groupes distingués de S_4.

Exercice 11. On note α une racine du polynôme $X^2 - X - 1$. On considère un groupe G dont la table des caractères est partiellement donnée comme suit :

	1	$\lvert C_2 \rvert = 15$	$\lvert C_3 \rvert = 20$	$\lvert C_4 \rvert = 12$	$\lvert C_5 \rvert = 12$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2		-1	0	α	
χ_3			0		
χ_4		0	1		
χ_5	5			0	0

1. Compléter la table de G (on pourra utiliser notamment les propriétés des vecteurs colonnes de la table).

2. Montrer que G est simple.
3. Chaque élément de G est-il conjugué à son inverse ?
4. Donner le nombre de 5-sous-groupes de Sylow de G.

   On note V la représentation par permutation associée à l'action de G par conjugaison sur l'ensemble de ses 5-Sylow.
5. Quel est le nombre d'orbites pour cette action ? Montrer que $\dim V^G = 1$.
6. A l'aide de la première colonne de la table en déduire la décomposition de V en somme d'irréductibles.

Exercice 12. Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation complexe. On note $\rho \otimes \rho$ la représentation correspondante sur $V \otimes V$.

1. Soit $\tau : V \otimes V \to V \otimes V$ l'endomorphisme satisfaisant $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$. Montrer que τ est diagonalisable. On notera $S = S^2(V)$ (resp. $\Lambda = \Lambda^2 V$) le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 (resp. -1) de τ.
2. Montrer que τ est un G-endomorphisme de $V \otimes V$ (pour $g \in G$ donné, on pourra utiliser une base de V qui diagonalise $\rho(g)$). En déduire que $V \otimes V = S \oplus \Lambda$ en tant que représentation.
3. Soit $(e_i)_i$ une base de V. Expliciter une base de S et de Λ en fonction des e_i. En déduire leur dimension.
4. Montrer que pour tout $g \in G$ on a
$$\chi_S(g) = \frac{1}{2}(\chi(g)^2 + \chi(g^2)) \quad \text{et} \chi_\Lambda(g) = \frac{1}{2}(\chi(g)^2 - \chi(g^2)),$$
   où χ est le caractère de (V, ρ)
5. Montrer que $V \otimes V^G = S^G + \Lambda^G$ Si V est irréductible, en-est-il nécessairement de même pour les représentations S et Λ ?