UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

MAT302, cours n°3

Séries à termes positifs (suite)

Odile GAROTTA

(sur la base du polycopié de Romain Joly) *11 septembre 2020*

Chapitre 1 : Introduction aux séries

1 Motivation

2 Notions et propriétés de base

3 Les séries géométriques

Chapitre 2 : Séries à termes positifs

1 Critères de comparaison

2 Séries de Riemann

Nous avons vu une première famille importante de séries : les séries géométriques. Comme on a montré avec les critères de comparaison, cette famille de séries est utile pour étudier des séries de comportement proche du type exponentiel. Nous allons voir ici d'autres familles de séries. En particulier les *séries de Riemann*, du nom du grand mathématicien allemand Bernhard Riemann (1826-1866), forment l'autre famille-étalon fondamentale : elles permettent d'étudier la nature de séries à comportement de type polynomial.

2.1 Comparaison avec une intégrale

Proposition 2.1. *Soit f une fonction continue et décroissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+$. La série $(\sum_{n\geq 1} f(n))$ converge si et seulement si la limite $\lim_{X\to+\infty} \int_1^X f(x)\,\mathrm{d}x$ existe et est finie.*

Démonstration : Comme f est décroissante, on a pour tout n

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq f(n)$$

et donc

$$\sum_{n=2}^{N} f(n) \leq \int_1^N f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{N-1} f(n)\ . \tag{2.1}$$

Comme f est positive, la fonction $X \mapsto \int_1^X f(x)\,\mathrm{d}x$ est croissante. Donc si cette fonction n'a pas de limite en $+\infty$, c'est qu'elle tend vers $+\infty$ et $\lim_{N\to+\infty}\int_1^N f(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$. L'inégalité de droite montre que $\sum_{n=1}^{N-1} f(n)$ tend vers l'infini et donc la suite des sommes partielles diverge.

Si $\lim_{X\to+\infty}\int_1^X f(x)\,\mathrm{d}x$ existe et est finie alors $N \mapsto \int_1^N f(x)\,\mathrm{d}x$ est bornée donc la suite $(\sum_{n=2}^{N} f(n))$ est majorée. Comme f est positive, la suite est aussi croissante, donc elle converge. Puisque sa suite des sommes partielles converge la série $(\sum_{n\geq 1} f(n))$ converge, par définition. $\square$

Notons que la borne de démarrage de l'intégrale dans l'énoncé n'est en fait pas importante : la relation de Chasles permet de remplacer 1 par n'importe quel réel > 0.

2.2 Séries de Riemann

Les *séries de Riemann* sont les séries $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}\right)$ où $\alpha > 0$

(notons que si $\alpha \leq 0$, la série diverge trivialement car son terme général ne tend pas vers 0).

Le résultat fondamental est le suivant.

Théorème 2.2. *La série de Riemann* $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}\right)$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$.

Démonstration : On applique la proposition précédente à la fonction $f\colon x \mapsto 1/x^\alpha$. Pour $\alpha \neq 1$, on a $\int_1^X f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha-1}\big(1 - \frac{1}{X^{\alpha-1}}\big)$; quand $X \to +\infty$ il y a une limite finie si et seulement si $\alpha > 1$. D'où le résultat si $\alpha \neq 1$. Pour $\alpha = 1$, $\int_1^X f(x)\,\mathrm{d}x = \ln X$ et il y a bien divergence. $\square$

Voici les deux exemples fondamentaux.

Exemples :

- La série harmonique $(\sum_{n\geq 1} 1/n)$ diverge vers $+\infty$ à une vitesse logarithmique : on peut déduire de (2.1) que $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \sim \ln N$.

- La série $(\sum_{n\geq 1} 1/n^2)$ converge.

En retenant ces deux exemples et le fait que *l'exposant* 1 *est l'exposant critique*, on ne peut se tromper sur la nature des séries. Quand on étudie la nature de séries de type polynomial, on peut se ramener à une série de Riemann par les théorèmes de comparaison.

Exemples :

- Considérons la série $(\sum_{n\geq 0} \frac{n}{n^2+1})$. On a $n/(n^2+1) \sim 1/n$ quand n tend vers $+\infty$. Par ailleurs, les séries sont à termes positifs. Donc comme la série $(\sum 1/n)$ diverge, la série $(\sum_{n\geq 0} \frac{n}{n^2+1})$ diverge aussi.

- Dans le texte du cours 1 (ch. 1), Leibniz s'intéresse à la somme des inverses des nombres triangulaires, c'est-à-dire à la série $(\sum_n \frac{2}{n(n+1)})$. On a une série à termes positifs et $\frac{2}{n(n+1)} \sim \frac{2}{n^2}$. Donc la série étudiée par Leibniz est bien convergente.

- Considérons la série $(\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n)}{n^{3/2}})$. Ce n'est pas une série à termes positifs, mais si on peut étudier sa convergence absolue : on a $|\frac{\cos(n)}{n^{3/2}}| \leq \frac{1}{n^{3/2}}$. La série de Riemann $(\sum \frac{1}{n^{3/2}})$ est convergente donc $(\sum |\frac{\cos(n)}{n^{3/2}}|)$ converge cad. $(\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n)}{n^{3/2}})$ est absolument convergente (et donc elle converge).

Pour sa *culture mathématique*, on pourra s'intéresser à la célèbre fonction suivante (Riemann) : si $s > 1$, on pose

$$\zeta(s) \;=\; \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}.$$

On a

$$\zeta(2) \;=\; \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \;=\; 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots \;=\; \frac{\pi^2}{6}$$

et

$$\zeta(4) \;=\; \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4} \;=\; 1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \ldots + \frac{1}{n^4} + \ldots \;=\; \frac{\pi^4}{90}\;.$$

(voir l'UE MAT402 au S4)

En fait, il existe des formules explicites pour les sommes de séries de Riemann d'exposant entier *pair*. A l'inverse, très peu de choses sont connues sur les sommes pour les exposants *impairs*. Par exemple si on sait que

$$\zeta(3) \ = \ \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3} \ \simeq \ 1{,}202$$

est irrationnel, on ne sait pas s'il est transcendant c'est-à-dire s'il est solution d'une équation polynomiale. On ne sait pas quelles autres valeurs $\zeta(2n+1)$ sont irrationnelles.

2.3 Séries de Bertrand

Les *séries de Bertrand* doivent leur nom au français Joseph Bertrand (1822-1900). Elles forment une famille intéressante à connaître, mais bien moins importante que les séries géométriques et les séries de Riemann. Il s'agit des séries de la forme $(\sum_n u_n) = \left(\sum_n \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}\right)$, où α et β sont réels (u_n ne tend pas vers 0 si $\alpha < 0$).

Notons que si $\alpha > 1$, alors $u_n = o(1/n^{\alpha-\varepsilon})$ pour un $\varepsilon > 0$ assez petit tel que $\alpha - \varepsilon > 1$. Comme $1/n^{\alpha-\varepsilon}$ est alors le terme général d'une série de Riemann convergente la série de Bertrand converge dans ce cas.
De même, si $\alpha < 1$, alors $1/n = o(u_n)$ et la série de Bertrand diverge.

Le cas intéressant est donc le cas $\alpha = 1$.

Proposition 2.3. *La série de Bertrand* $\left(\sum_n \frac{1}{n \ln^\beta n}\right)$ *converge si et seulement si* $\beta > 1$.

Démonstration : On utilise de nouveau le critère de comparaison avec une intégrale, avec la fonction $f\colon x \mapsto \frac{1}{x \ln^\beta x}$. Il s'agit bien d'une fonction décroissante pour x assez grand (même si $\beta < 0$). Par ailleurs, si $\beta \neq 1$, on a

$$\int_2^X f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{1-\beta} \cdot \frac{1}{\ln^{\beta-1}(x)}\right]_2^X$$

et donc il y a une limite finie en $+\infty$ si et seulement si $\beta > 1$.

Si $\beta = 1$, alors

$$\int_2^X f(x)\,\mathrm{d}x = [\ln(\ln x)]_2^X \,,$$

cette intégrale n'a pas de limite finie donc la série diverge. $\square$

Notons que l'on pourrait par le même principe voir que la série $(\sum \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)})$ diverge, et continuer à enchaîner les $\ln$.

3 Règles de d'Alembert et de Cauchy

Les critères *de d'Alembert* et *de Cauchy* sont d'utilisation commode pour savoir si une série $(\sum u_n)$ est absolument convergente. Comme on ne regarde que la convergence de $(\sum |u_n|)$, ces critères sont reliés à ce chapitre. Ce sont cependant des énoncés généraux, qui concernent aussi les séries de termes non positifs.

Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) a été chargé avec Diderot d'éditer l'Encyclopédie. Augustin Louis Cauchy (1789-1857) a été un mathématicien très important ; son cours à l'Ecole Polytechnique a servi de refondation à l'analyse en donnant des preuves rigoureuses avec la technique des « epsilon-delta ».

Théorème 2.4. Règle de d'Alembert.
Soit $(\sum u_n)$ *une série de termes complexes non nuls. On suppose que le quotient* $|u_{n+1}/u_n|$ *a une limite finie* ℓ*.*
Alors si $\ell < 1$*, la série* $(\sum u_n)$ *converge absolument ;*
et si $\ell > 1$*, la série diverge trivialement.*

Démonstration : Le cas de la limite $\ell > 1$ est trivial car alors, à partir d'un certain rang, $|u_{n+1}| \geq |u_n| > 0$ et la suite ne peut tendre vers 0. Supposons que $\ell < 1$ et prenons $\varepsilon > 0$ tel que $\ell < 1 - \varepsilon$. Alors, il existe un rang N à partir duquel $|u_{n+1}/u_n| \leq 1 - \varepsilon$. Par récurrence, on obtient que pour tout $k \geq 1$, $|u_{N+k}| \leq |u_N|(1-\varepsilon)^k$. Comme $(\sum_k (1-\varepsilon)^k)$ est une série géométrique convergente, alors par comparaison, $(\sum_k |u_{N+k}|)$ est une série convergente et donc $(\sum u_n)$ converge absolument. $\square$

Théorème 2.5. Règle de Cauchy.
Soit $(\sum u_n)$ une série de termes complexes non nuls. On suppose que la racine $|u_n|^{1/n}$ a une limite finie ℓ quand $n \to \infty$.
Alors si $\ell < 1$, la série $(\sum u_n)$ est absolument convergente ;
et si $\ell > 1$, la série diverge trivialement.

Démonstration : La preuve est très semblable. Faisons le cas $\ell < 1$ et posons $\alpha \in]\ell,1[$. A partir d'un rang N, on a $|u_n|^{1/n} \leq \alpha$ et donc $|u_n| \leq \alpha^n$. Par comparaison avec une série géométrique convergente, la série $(\sum u_n)$ est absolument convergente. $\square$

⚠ Il est important de retenir que pour ces deux règles le cas $\ell = 1$ est *non-concluant*, c'est-à-dire qu'il contient des exemples de convergence et de divergence (séries de Riemann). En fait, on pourra retenir que ces deux règles concernent uniquement des cas de convergence *type géométrique* (comme les preuves le montrent). Elles ne peuvent conclure sinon.

Exemples :

- On considère la série $(\sum \frac{n^2}{3^n})$. Posons $u_n = n^2/3^n$, on a

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{(n+1)^2/3^{n+1}}{n^2/3^n} = \frac{1}{3}\frac{(n+1)^2}{n^2} \longrightarrow \frac{1}{3} < 1$$

et donc la série converge d'après la règle de D'Alembert *(ou Cauchy)*.

- On considère la série $(\sum \frac{n!}{n^n})$; étudier avec la règle *de D'Alembert*.
- On considère la série $(\sum u_n)$ avec $u_n = (1-1/n)^{n^2}$. On a
$$|u_n|^{1/n} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln(1-\frac{1}{n})} = e^{n\left(-\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})\right)} = e^{-1+o(1)} \longrightarrow \frac{1}{e} < 1$$
et donc la série converge d'après la règle de Cauchy.
- On considère la série $(\sum 1/n)$. On sait que la série diverge et on a $|u_{n+1}/u_n| = n/(n+1) \to 1$, c'est le cas non-concluant de la règle de D'Alembert *(ou Cauchy)*.
- On considère la série $(\sum 1/n^2)$. On sait que la série converge et on a $|u_{n+1}/u_n| = n^2/(n+1)^2 \to 1$, c'est le cas non-concluant de la règle de D'Alembert *(ou Cauchy)*.

Un exemple avec calcul de la somme :

Dans un pays (imaginaire), les couples veulent un et un seul garçon. Chaque famille fait donc des enfants et s'arrête dès qu'elle a un garçon. Les familles sont donc du type G, FG, FFG, FFFG etc. On supposera que pour chaque naissance, il est équiprobable d'avoir une fille ou un garçon. On se demande s'il y a plus ou moins de garçons que de filles dans ce pays.

Il est admis que chaque famille a exactement un garçon. Comptons les filles :

Familles G	proportion $1/2$	0 fille
Familles FG	proportion $1/4$	1 fille
Familles FFG	proportion $1/8$	2 filles
Familles FFFG	proportion $1/16$	3 filles

$\dots$

La moyenne du nombre de filles par famille est donc de $\sum_{n\geq 0} u_n$ avec $u_n = n/2^{n+1}$. Commençons d'abord par vérifier que cette modélisation n'est pas absurde et que $(\sum u_n)$ converge : on a $u_{n+1}/u_n = \frac{1}{2}(n+1)/n \to \frac{1}{2} < 1$, donc la série est bien convergente d'après la règle de d'Alembert.

Pour calculer la somme, nous n'avons pas le droit de travailler sur la somme infinie mais nous devons passer par les sommes partielles.

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} u_n &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^{n+1}} + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{2^{n+1}} + \sum_{n=3}^{N} \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{N+1}} \\
&= \frac{1/4 - 1/2^{N+2}}{1-1/2} + \frac{1/8 - 1/2^{N+2}}{1-1/2} + \frac{1/16 - 1/2^{N+2}}{1-1/2} + \ldots + \frac{1/2^{N+1} - 1/2^{N+2}}{1-1/2} \\
&= \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^k} - \frac{N}{2^{N+1}} \\
&= \frac{1/2 - 1/2^{N+1}}{1-1/2} - \frac{N}{2^{N+1}} \\
&= 1 - \frac{N+2}{2^{N+1}}
\end{aligned}$$

Quand N tend vers $+\infty$, on obtient la somme de la série qui vaut donc

..1 !

Il y a en moyenne *une* fille par famille, c'est-à-dire autant que de garçons ! Ce paradoxe est facilement levable : à aucun moment dans notre modèle nous n'avons parlé d'avortement sélectif ni d'abandon d'enfants, donc à chaque naissance il y a autant de chance d'avoir un garçon ou une fille.

Un calcul de Leibniz

Dans le texte ci-dessous, Leibniz (1646-1716) souhaite calculer la somme des inverses des nombres triangulaires. On rappelle qu'un nombre triangulaire est de la forme

$$t_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \ .$$

Les premiers nombres triangulaires sont 1, 3, 6, 10, 15. . . . Leibniz veut donc calculer la somme $\sum_{n\geq 1} u_n$ avec $u_n = \frac{2}{n(n+1)}$.

Theorema Arithmeticae infinitorum.

Binarius est summa seriei infinitae Fractionum, quarum Numerator Unitas, Denominatores vero Numeri Triangulares inde ab Unitate inclusa ordine crescentes in infinitum.

series ⊙ $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21}$ etc. in infinitum $\sqcap$ 2.

Demonstratio.

Esto series infinita Fractionum quarum Numerator Unitas, Nominatores vero sint Numeri Naturales inde ab unitate inclusa ordine crescentes in infinitum

series ☽ $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$ etc. in infinitum.

Exponatur et series ⊙ dimidiata:

series ☿ $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42}$ etc. in infinitum

Quam ajo esse $\sqcap$ 1.

Nam auferatur series ☿ a serie ☽, singulae fractiones a singulis ordine respondentibus, restabit $\frac{1}{2} + \frac{4}{12} + \frac{9}{36} + \frac{16}{80} + \frac{25}{150} + \frac{36}{252}$ etc. sive depressis fractionum Terminis

series ♀ $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$ etc. in infinitum.

Ab eadem serie ☽ auferatur 1, residua erit eadem series ♀ Ergo 1 et series ☿ sunt inter se aequales.

Quia ab eadem serie ☽ ablatae relinquunt idem, Ergo dupla series ☿ sive series ⊙ erit aequalis binario.

Quod demonstrandum sumseramus.

Son calcul est le suivant. Comme $\frac{1}{n} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1}$, on a

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} - \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+1} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} - 1 \tag{2.2}$$

On en déduit que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ ce qui donne la valeur 2 pour la somme des inverses des nombres triangulaires. Le problème du raisonnement de Leibniz est qu'il utilise pour calcul intermédiaire une somme divergente $\sum_n \frac{1}{n}$ et simplifie de fait par $+\infty$ de chaque côté de (2.2).

Il s'agit pour nous de reprendre le calcul (2.2) de Leibniz mais en écrivant des *sommes partielles* plutôt que les sommes complètes qui ne sont pas toutes définies. On montre ainsi rigoureusement que $(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)})$ est une série convergente qui a pour somme 1.

On écrit :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+1}\\ &= \sum_{m=2}^{N+1}\frac{1}{m}\\ &= (\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n})-1+\frac{1}{N+1}.\end{aligned}$$

On en déduit que $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{N+1}$, donc $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)}$ vaut 1.