MAT302, cours n°2

Séries à termes positifs

Odile Garotta

(sur la base du polycopié de Romain Joly) *9 septembre 2020*

Chapitre 1 : Introduction aux séries

1 Motivation

1.1 Le paradoxe de Zénon d'Élée

1.2 La série harmonique

1.3 Séries entières

1.4 Des calculs étranges

2 Notions et propriétés de base

2.1 Définitions et notations

2.2 Propriétés élémentaires

Nous allons passer une partie de ce cours sur les séries *à termes positifs*. En plus de l'aspect intuitif, une des raisons en est que leur étude est une étape clé dans l'étude générale des séries.

Définition 1.1. *Soit* $(\sum_n u_n)$ *une série de termes complexes, on dit qu'elle est* absolument convergente *si* $(\sum_n |u_n|)$ *est une série convergente de réels positifs. Dans le cas contraire, on dit qu'elle* diverge en valeur absolue.

La propriété suivante est remarquable et très utile.

Proposition 1.2. *Pour une série de terme général complexe,*

la convergence absolue entraîne la convergence dans $\mathbb{C}$.

⚠ La réciproque est fausse (cf. chapitre 3).

Démonstration : On utilise le *critère de convergence de Cauchy* dans $\mathbb{C}$: les sommes partielles $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$ forment une suite convergente si et seulement si elles forment une *suite de Cauchy*, c'est-à-dire si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0\ , \quad \exists N_0 \in \mathbb{N}\ , \quad \forall P > Q \geq N_0\ , \quad |S_P - S_Q| \leq \varepsilon\ .$$

Or

$$|S_P - S_Q| = \left| \sum_{n=Q+1}^{P} u_n \right| \leq \sum_{n=Q+1}^{P} |u_n| = \tilde{S}_P - \tilde{S}_Q$$

où on note $\tilde{S}_N = \sum_{n=0}^{N} |u_n|$ la somme partielle de la série $(\sum_{n\geq 0} |u_n|)$. Puisque cette série $(\sum_n |u_n|)$ converge, $(\tilde{S}_N)$ vérifie le critère de Cauchy et la majoration ci-dessus montre que c'est aussi le cas pour (S_N). $\square$

3 Les séries géométriques

Les séries géométriques forment un type de séries très simple et important. On les rencontre couramment, et elles serviront de séries de référence pour l'étude d'autres séries.

Définition 1.3. *Soit* $a \in \mathbb{C}$. *On appelle* série géométrique de raison a *une série de la forme* $(\sum_{n \geq n_0} a^n)$.

Le cœur de cette section est la *formule* suivante qu'il est important de connaître. Notons qu'elle semble avoir été connue des Égyptiens (papyrus de 1650 av. JC) et qu'elle apparaît comme la proposition 35 des éléments d'Euclide (300 av. JC)

Proposition 1.4. *Soient $p \geq q$ deux entiers de $\mathbb{Z}$ et soit $a \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 1$. Alors*

$$\sum_{n=q}^{p} a^n = a^q + a^{q+1} + \ldots + a^p = \frac{a^q - a^{p+1}}{1-a} \; .$$

Démonstration : On peut démontrer cette formule par récurrence sur p ou simplement en constatant que

$$\begin{aligned} & (1-a)(a^q + a^{q+1} + \ldots + a^p) \\ = {} & a^q - a^{q+1} + a^{q+1} - a^{q+2} + \ldots + a^p - a^{p+1} \\ = {} & a^q - a^{p+1} \; . \end{aligned}$$

$\square$

On peut retenir la formule ci-dessus par la phrase

Premier écrit moins premier pas écrit sur un moins la raison.

Bien entendu, le cas $a = 1$ est trivial mais doit toujours être traité à part.

On en déduit le résultat suivant.

Théorème 1.5. *La série géométrique* $(\sum_n a^n)$ *converge si et seulement si* $|a| < 1$*, et dans ce cas la somme est donnée par* $\sum_{n\geq 0} a^n = \frac{1}{1-a}$*.*

Démonstration : Notons $(S_N = \sum_{n=0}^{N} a^n)$ les sommes partielles. Si $a = 1$, alors $S_N = N+1 \to +\infty$ donc la série diverge. Si $a \neq 1$, alors la formule ci-dessus donne $S_N = \frac{1-a^{N+1}}{1-a}$ qui a une limite finie si et seulement si $|a| < 1$, et dans ce cas $a^{N+1} \to 0$. $\square$

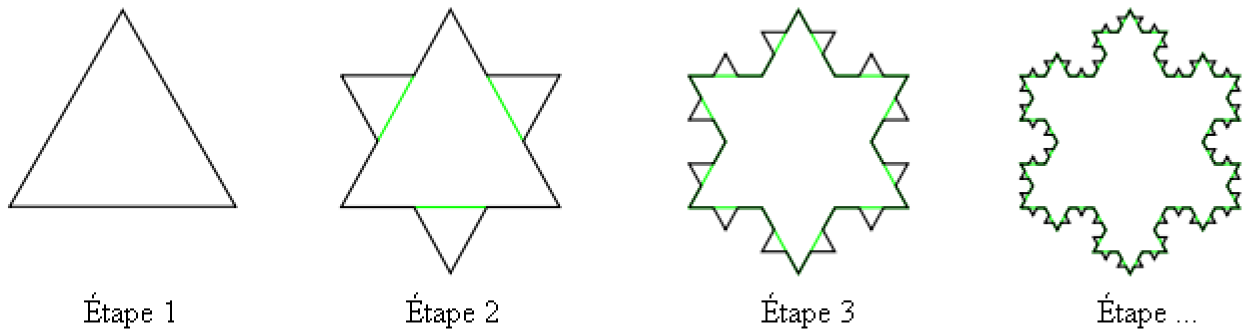
Remarque : Comme $a^n \to 0$ si et seulement si $|a| < 1$, on obtient qu'une série géométrique converge *si et seulement si* son terme général tend vers 0.

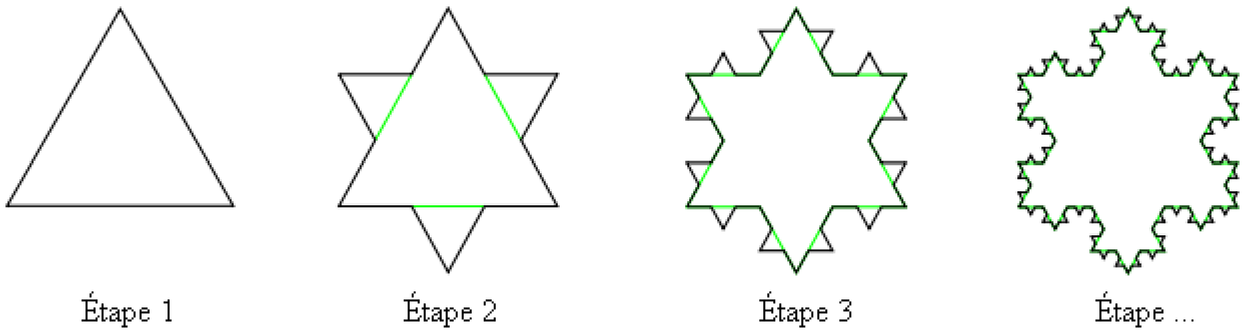
Exemple : On a donc proprement justifié que $(\sum_{n\geq 1} 1/2^n)$ converge et que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-1/2} = 1 \ .$$

Application : aire du flocon de Von Koch

Le flocon de Helge Von Koch (1870-1924, Suède) se construit par étapes à partir d'un triangle, en ajoutant à chaque étape un triangle sur le tiers central de chaque côté de l'étape précédente :





Prenons comme unité d'aire la surface du triangle de départ. A l'étape **2**, on ajoute 3 triangles d'aire $1/9$. Puis à l'étape **3**, on ajoute 12 triangles d'aire $1/81$, puis 12×4 triangles d'aire $1/9^3$ etc. On se persuade rapidement qu'à l'étape n, on ajoute $3 \times 4^{n-2}$ triangles de taille $1/9^{n-1}$.

On obtient donc comme aire totale

$$1 + 3\frac{1}{9} + 12 \times \frac{1}{81} + \ldots = 1 + \sum_{n \geq 2} 3\frac{4^{n-2}}{9^{n-1}} = 1 + \frac{3}{4} \sum_{n \geq 2} \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$$
$$= 1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{\frac{4}{9}}{1 - \frac{4}{9}} = 1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{5}\,.$$

En particulier, on obtient une aire finie, alors qu'elle est entourée par une courbe de longueur infinie (exercice, série géométrique de raison $\frac{4}{3}$).

Chapitre 2 : Séries à termes positifs

Nous avons vu que la convergence en valeur absolue d'une série $(\sum u_n)$ implique sa convergence. De ce fait, on est ramené à l'étude d'une série de termes réels positifs $(\sum |u_n|)$. Le but de ce chapitre est de donner des outils pour étudier cette convergence.

⚠ La plupart des résultats et critères énoncés dans ce chapitre sont spécifiques aux séries *à termes positifs* et ne doivent pas être utilisés dans les cas où le signe du terme général varie. On notera quand même que :

- comme $(\sum(-u_n))$ et $(\sum u_n)$ ont même nature, on peut aussi appliquer les résultats à des séries à termes négatifs.
- comme $(\sum_{n\geq N} u_n)$ et $(\sum_{n\geq 0} u_n)$ ont même nature, on peut appliquer les résultats même si les premiers termes ne sont pas de signe constant.

En résumé, *on écrira les théorèmes dans le cadre des séries à termes positifs, mais ils restent valables si les termes sont tous* réels *et* de même signe à partir d'un certain rang.

Commençons par noter que si $(\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n)$ est une série de termes positifs, alors *les sommes partielles* $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$ *forment une suite croissante* et seuls deux comportements sont possibles : S_N tend vers l'infini et diverge, ou (S_N) est bornée et converge.

Notons ici ce moyen de montrer la convergence de la série qui en découle :

Proposition 2.1. *Soit* $(\sum u_n)$ *une série de réels positifs. On note* $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$ *(*$N \in \mathbb{N}$*). Si la suite des sommes partielles* (S_N) *est majorée alors la série* $(\sum_{n\geq 0} u_n)$ *converge.*

Démonstration : Par définition, la série $(\sum_{n\geq 0} u_n)$ converge si et seulement si la suite (S_N) admet une limite finie. Or cette suite est croissante (les u_n sont positifs) donc on sait que si elle est majorée elle converge (vers sa borne sup). $\square$

1 Critères de comparaison

En considérant la suite croissante des sommes partielles pour les séries à termes positifs on obtient un premier énoncé :

Proposition 2.2. *Soient* $(\sum u_n)$ *et* $(\sum v_n)$ *deux séries de réels positifs telles que pour tout* n $u_n \geq v_n \geq 0$. *Si* $(\sum u_n)$ *converge, alors* $(\sum v_n)$ *converge et leurs sommes respectives* U *et* V *vérifient* $U \geq V$. *Si* $(\sum v_n)$ *diverge, alors* $(\sum u_n)$ *diverge.*

Démonstration : Supposons que $(\sum u_n)$ converge. Par la proposition ci-dessus, chaque somme partielle $\sum_{n=0}^{N} v_n$ est majorée par $\sum_{n=0}^{N} u_n$, elle-même majorée par $U = \sum_{n\geq 0} u_n$. Donc la série de réels positifs $(\sum_{n\geq 0} v_n)$ converge vers un réel $V \leq U$. La deuxième partie de la proposition est la contraposée de la première. $\square$

Remarques : Pour une série de termes positifs qui tendent vers 0 (donc non trivialement divergente), la question clé est de savoir à quelle vitesse les termes tendent vers 0. La proposition ci-dessus dit exactement cela : plus son terme général est petit, plus la série a des chances de converger.
Nous avons vu que les premiers termes ne changent pas la nature d'une série, donc pour ce critère comme pour les suivants, on peut se contenter d'être à termes positifs et vérifier les hypothèses de comparaison seulement *à partir d'un certain rang*.

Exemples :

- On considère la série $(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n2^n})$ qui est à termes positifs. On a $\frac{1}{n2^n} \leq \frac{1}{2^n}$ et $(\sum_n \frac{1}{2^n})$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{2} < 1$ donc elle converge. Par suite $(\sum_n \frac{1}{n2^n})$ est aussi une série convergente.
- On considère la série $(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}})$ qui est à termes positifs. On a $1/\sqrt{n} \geq 1/n$ pour $n \geq 1$ et comme $(\sum \frac{1}{n})$ est une série divergente, alors $(\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}})$ est aussi une série divergente.

Notations et terminologie des comparaisons de suites (rappel)

Définitions 2.3. *Soient* (u_n) *et* (v_n) *deux suites de nombres complexes.*

- *On dit que la suite* (u_n) *est* dominée *par la suite* (v_n) *quand* $n \to +\infty$ *et on note* $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, *on lit* u_n *est un grand O de* v_n, *s'il existe* $C > 0$ *et* $N \in \mathbb{N}$ *tels que pour tout* $n \geq N$, $|u_n| \leq C|v_n|$.
- *On dit que la suite* (u_n) *est* négligeable *devant la suite* (v_n) *quand* $n \to +\infty$ *et on note* $u_n = o(v_n)$, *on lit* u_n *est un petit o de* v_n, *si pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geq N$, $|u_n| \leq \varepsilon|v_n|$.

- *On dit que la suite* (u_n) *est* équivalente *à la suite* (v_n) *quand* $n \to +\infty$ *et on note* $u_n \sim v_n$
  si $u_n - v_n = o(v_n)$ *, cad. si pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geq N$*,* $|u_n - v_n| \leq \varepsilon |v_n|$*.*

Remarque : Si le terme général de la suite (v_n) est non nul à partir d'un certain rang, alors :

- on a $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ si et seulement si la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée
- on a $u_n = o(v_n)$ si et seulement si $\dfrac{u_n}{v_n} \to_{n\to\infty} 0$
- on a $u_n \sim v_n$ si et seulement si $\dfrac{u_n}{v_n} \to_{n\to\infty} 1.$

Exemples :

- Écrire $u_n = o(1)$ signifie que $u_n \to 0$, resp. $u_n = O(1)$ que (u_n) est bornée.
- Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n + v_n \sim v_n$. On en déduit les équivalents an^k de toutes les fonctions polynomiales de n.
- On a $4n^2 - n + 1 \sim 4n^2$,

  $\sqrt{4n^2+1} = \mathcal{O}(n)$, $\sqrt{4n^2+1} = o(n^2)$, $\sqrt{4n^2+1} \sim 2n$.

Remarque : Si f et g sont deux fonctions d'un intervalle ouvert I dans $\mathbb{C}$, et si $a \in I$, on définit de façon similaire les comparaisons

$$f(x) = \mathcal{O}(g(x)), \quad f(x) = o(g(x)), \quad f(x) \sim g(x)$$

quand x tend vers a, ou encore *au voisinage de* a.

- on a par exemple $\sin x \sim x$ au voisinage de 0.
- on utilise o pour décrire le reste dans les formules de Taylor en a (« $o\big((x-a)^n\big)$ »).

On a alors le corollaire suivant de notre proposition :

Corollaire 2.4. *Soient* $(\sum u_n)$ *et* $(\sum v_n)$ *deux séries de réels positifs. Si leurs termes généraux sont équivalents c'est-à-dire si* $u_n \sim v_n$*, alors les séries* $(\sum u_n)$ *et* $(\sum v_n)$ *ont même nature (cad. convergent ou divergent toutes les deux).*
Si u_n *est du même ordre de grandeur ou négligeable devant* v_n*, c'est-à-dire si* $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ *ou* $u_n = o(v_n)$*, alors* $(\sum u_n)$ *converge si* $(\sum v_n)$ *converge (et* $(\sum v_n)$ *diverge si* $(\sum u_n)$ *diverge).*

Démonstration : Si $u_n \sim v_n$, comme u_n et v_n sont positifs, la définition donne que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang à partir duquel

$$(1-\varepsilon)v_n \leq u_n \leq (1+\varepsilon)v_n.$$

Il suffit donc d'utiliser la proposition précédente avec $\varepsilon < 1$ fixé. De même, si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ ou si $u_n = o(v_n)$, alors il existe une constante $C > 0$ et un rang à partir duquel $u_n \leq Cv_n$. On applique la proposition. $\square$

Exemple : Considérons la série $(\sum_n \sin(\frac{1}{3^n}))$ qui est à termes positifs. Comme $\frac{1}{3^n}$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$ et comme $\sin x \sim x$ près de zéro, on a $\sin(\frac{1}{3^n}) \sim \frac{1}{3^n}$.
La série $(\sum_n \frac{1}{3^n})$ est une série géométrique convergente, il suit donc que la série $(\sum_n \sin(\frac{1}{3^n}))$ est convergente.

* * *