

Contrôle continu du 2 octobre 2007

Durée: 2 heures

Sans document; les exercices sont indépendants.

On justifiera soigneusement les réponses.

Questions de cours

1. Soient G un groupe qui opère sur un ensemble E , et $x \in E$.
 - a) Construire une bijection entre un certain quotient de G et l'orbite ω de x .
 - b) Si G est fini, en déduire le cardinal de ω en fonction de ceux de G et du sous-groupe d'isotropie de x .
2. Donner un exemple de groupe infini G et de sous-groupe H de G qui vérifient $[G : H] = 5$.
3. Donner un exemple de groupe à 8 éléments qui est abélien mais pas cyclique.

Exercices

4. Soient G un groupe et x, y deux éléments de G d'ordre fini qui vérifient

$$xy = yx \quad \text{et} \quad \langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \{e\}.$$

On note r l'ordre de x et s l'ordre de y . Montrer que $\text{ord}(xy) = \text{ppcm}(r, s)$.

5. Dans le groupe $\mathbb{Z}/100\mathbb{Z}$, on considère l'ensemble K des classes \bar{k} telles que $60\bar{k} = \bar{0}$. Montrer que K est un sous-groupe. Trouver son cardinal et en donner un générateur.
6. Soient G un groupe et H un sous-groupe de G qui contient le sous-groupe dérivé $D(G)$.
 - a) Montrer que H contient tous les ghg^{-1} , où $g \in G$ et $h \in H$. Qu'en conclut-on pour H ?
 - b) Le groupe quotient G/H est-il isomorphe à un quotient de $G/D(G)$?
7. Soit G un groupe fini qui a exactement 2 classes de conjugaison. Prouver que $\text{card } G = 2$.