Contrôle continu

le 16 mars 2018, durée 2 heures

Les calculatrices, téléphones portables sont interdits. **La qualité de la rédaction est un élément d'appréciation significatif qui sera pris en compte dans la notation.**

Exercice 1 Questions autour du cours

On note $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace de probabilité.

1. Donner la définition de la phrase "$(B_i)_{i\in I}$ est une partition de Ω".
2. On se donne un événement A et une partition $(B_i)_{i\in I}$ de Ω. Démontrer la loi de la probabilité totale :
$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i\in I} \mathbf{P}(A \mid B_i)\mathbf{P}(B_i)\,.$$
3. Soient $A, B, C \subset \Omega$ trois événements indépendants.
   (a) Donner la définition de la phrase "les trois événements A, B et C sont indépendants".
   (b) Montrer que $A \cup B$ est indépendant de C.
4. Donner une définition précise de la phrase "la variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathbf{P})$ suit une loi binomiale de paramètres n et p".

Exercice 2

Une compagnie d'assurances assure autant d'hommes que de femmes. Dans ce qui suit le terme "assuré" désigne un assuré de la compagnie, *aussi bien un homme qu'une femme*. On munit l'ensemble Ω des assurés de la probabilité uniforme, et on tire au hasard un assuré. On considère les quatre événements suivants :

$$H = \{\text{l'assuré est un homme}\}, \quad F = \{\text{l'assuré est une femme}\},$$
$$A_1 = \{\text{l'assuré a été accidenté cette année}\},$$
$$A_2 = \{\text{l'assuré sera accidenté l'an prochain}\}.$$

Les données de la compagnie disent qu'un homme assuré par la compagnie a chaque année la probabilité $\mu > 0$ d'être accidenté, alors que pour une femme assurée cette probabilité est $\lambda > 0$. De plus les événements A_1 et A_2 sont indépendants *conditionnellement à* H et *conditionnellement à* F.

1. Écrire mathématiquement les données de l'énoncé.
2. Calculer la probabilité de A_1.
3. Calculer la probabilité de $A_1 \cap A_2$.
4. Quelle est la probabilité qu'un assuré (homme ou femme) soit accidenté l'an prochain, sachant qu'il a un accident cette année ?
5. Dans quel cas $P(A_2)$ et $P(A_2 \mid A_1)$ sont elles égales ? Dans les autres cas, laquelle est la plus grande ?
6. Les événements A_1 et A_2 sont-ils indépendants ?

Exercice 3

1. Quel est le nombre de façons de placer 3 femmes, 2 hommes et 4 enfants autour d'une table ronde ?
2. Soit E un ensemble à n éléments ($n \in \mathbf{N}$). Montrer que le nombre de parties de E est 2^n. (On pourra raisonner par récurrence sur n ; noter que l'ensemble vide et E sont des parties de E).
3. Prouver par un argument de dénombrement que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Exercice 4

Trois amis A, B et C jouent à pile ou face de la manière suivante : A et B jouent une première fois, puis le gagnant joue contre C. La partie continue ainsi (le gagnant de la partie précédente affronte l'ami qui n'y jouait pas), jusqu'à ce que l'un d'eux ait gagné deux fois. C'est alors lui le gagnant du jeu.

1. On note N le nombre de lancers effectués dans une partie. Quelle est la valeur maximum de N ?
2. Quelle est la probabilité que $N \geq 3$?
3. Quelle est la probabilité que $N = 3$ et A gagne le troisième lancer ?
4. Quelle est la probabilité que $N \geq 3$ et A et C s'affrontent au troisième lancer ?
5. Quelle est la probabilité que A gagne le jeu ?
6. Quelle est la probabilité que $N = 2$ sachant que le gagnant n'est pas C ?

Exercice 5 (*on donnera les résultats sous la forme de (somme de) fractions d'entiers, sans chercher à les calculer.)*

Quatre personnes A, B, C, D jouent au bridge. Chaque donne est une répartition des 52 cartes en donnant 13 cartes à chaque joueur.

1. Quel est le nombre de donnes possible ?
2. A n'a pas d'as dans sa main. Quelle est la probabilité que C :
   (a) n'ait pas d'as non plus ?
   (b) ait 2 as au moins ?

   La question suivante est indépendante de la question 2.
3. (question bonus) On mélange les cartes après la première partie. Quelle est la probabilité que chaque joueur reçoive exactement les mêmes cartes aux deux parties ?