Introduction à la mécanique quantique (janvier 2003)

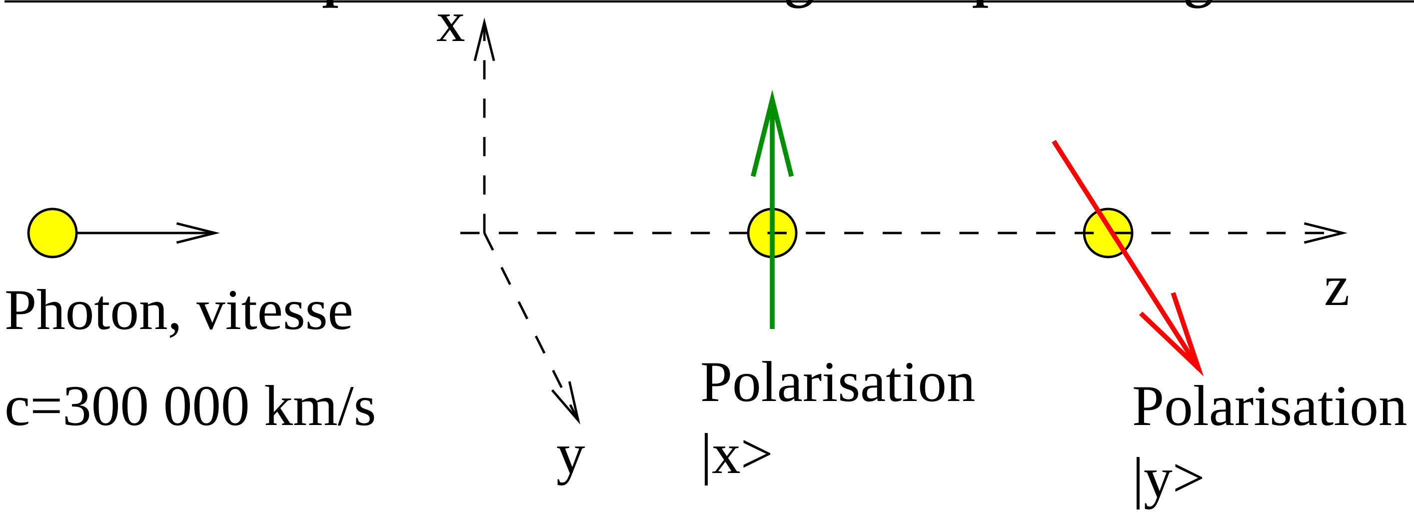
- La **mécanique quantique** est la théorie fondamentale des **systèmes microscopiques** (particules, atomes, molécules,...)
- **Grand succés :** elle est conforme à toutes les observations expérimentales
- On l'illustre avec la **polarisation de la lumière.**

Plan :

1. **Principe de superposition** en mécanique quantique et Postulat de la **mesure quantique**
2. **Expériences** confirmant la théorie
3. **Non localité** de la mécanique quantique

1) Principes de la mécanique quantique :

1-1) Etats de polarisation rectiligne du photon (grain de lumière)



1-2) Le principe de superposition

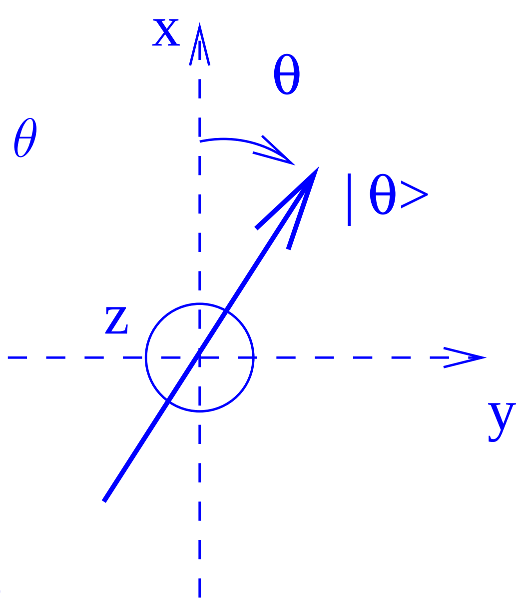
Etat général de polarisation : $|P\rangle = a|x\rangle + b|y\rangle, \quad a, b \in \mathbb{C}$

$(|x\rangle, |y\rangle)$: base orthonormée de **l'espace (de Hilbert) quantique de polarisation :**

$$\mathcal{P} = Vect\,(|x\rangle, |y\rangle) \cong \mathbb{C}^2, \qquad norme^2 : \; \| |P\rangle \|^2 = \langle P|P\rangle = |a|^2 + |b|^2$$

<u>Exemples :</u>

$|\theta\rangle = \cos\theta|x\rangle + \sin\theta|y\rangle \in \mathcal{P}$: polarisation rectiligne selon θ



$$|D\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|x\rangle + i|y\rangle\right) :$$ polarisation circulaire droite

$$|G\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|x\rangle - i|y\rangle\right) :$$ polarisation circulaire gauche

1-3) (*)Remarque sur le principe de superposition :

Il est **très général** en physique quantique :

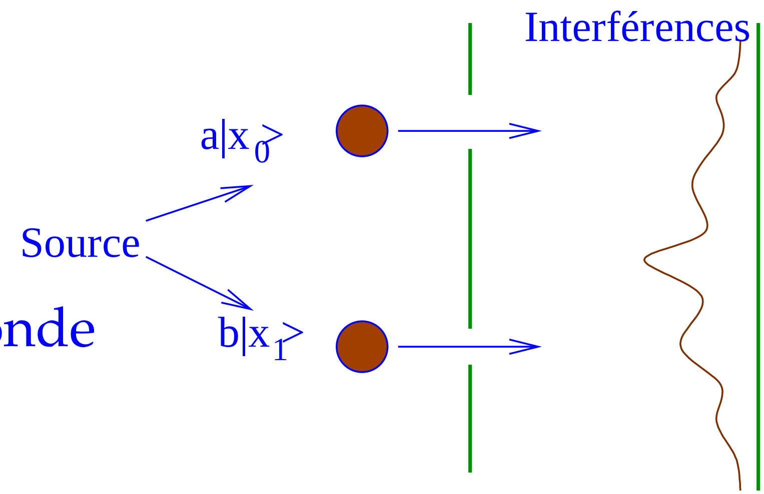
on peut considérer la superposition (C.L. complexe) de n'importe quelle configuration classique :

– **Superposition de position d'une particule :**

$$|\psi\rangle = a|\mathbf{x}_0\rangle + b|\mathbf{x}_1\rangle$$

plus généralement :

$$|\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \psi(\mathbf{x})\,|\mathbf{x}\rangle d^3\mathbf{x}, \qquad \psi(\mathbf{x}) \text{ : fonction d'onde}$$



– **Superposition de systèmes de particules :**

$$\pi^0 \rightarrow a\left(|e^+\rangle|e^-\rangle\right) + b\left(|\gamma\rangle|\gamma\rangle\right)$$

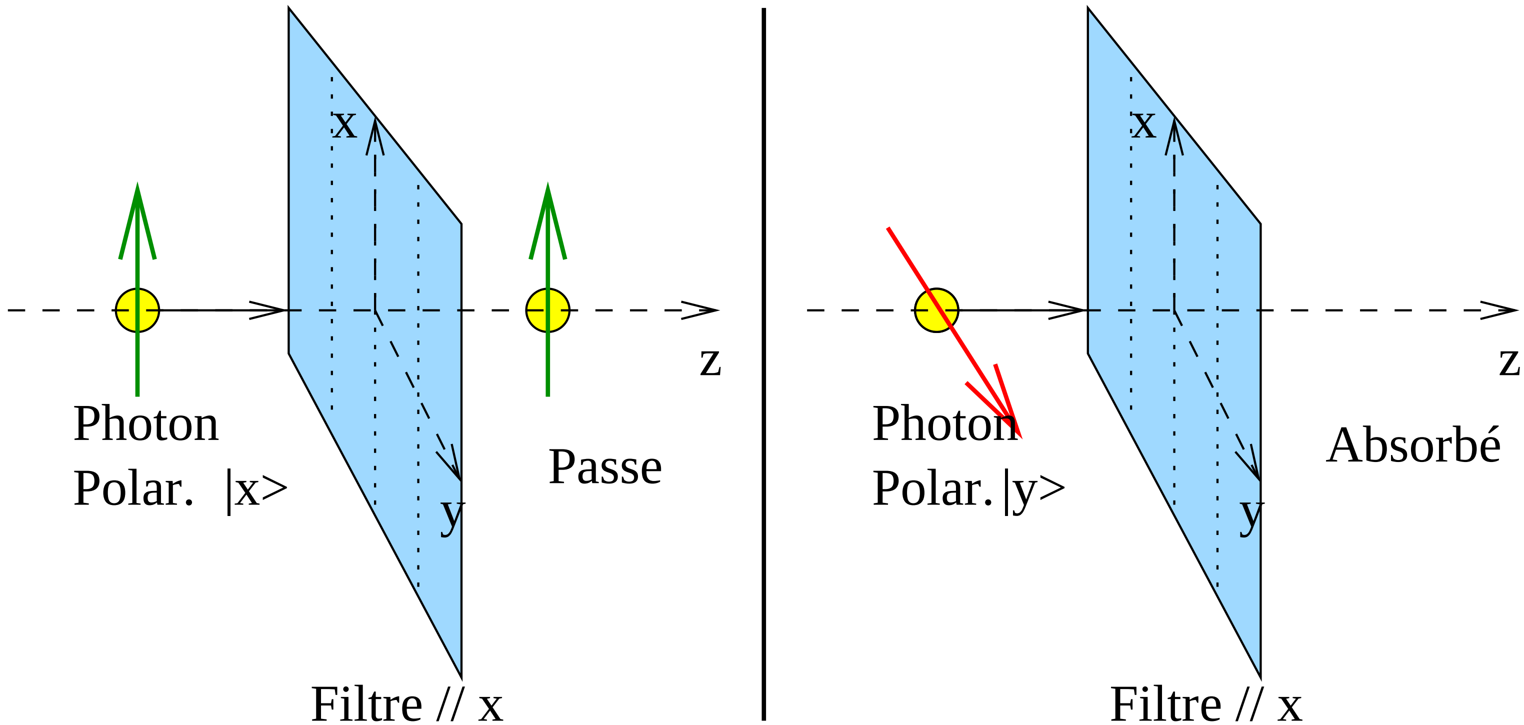
– **Question majeure :** Jusqu'à quelle "échelle macroscopique" le principe de superposition s'applique t-il ?

Beaucoup d'expériences récentes à ce sujet *(molécules, atomes en cavité, anneaux supraconducteurs, RMN,...)*

1-4) Postulat de la mesure quantique :

Si un photon **intéragit avec un "objet macroscopique",** alors son état quantique $|P\rangle$ est **modifié de façon probabiliste.**

Mesure idéale de la polarisation du photon, par **un filtre polarisant selon la direction** x **:**



Donc $|x\rangle, |y\rangle$ est **la base d'interaction** avec l'objet macroscopique.

Pour un état quelqonque $|P\rangle \in \mathcal{P}$ intéragissant avec le Filtre :

1. On **décompose** l'état quantique $|P\rangle$ dans la base d'interaction :

$$|P\rangle = \underbrace{(a|x\rangle)}_{\text{Passage}} + \underbrace{(b|y\rangle)}_{\text{Absorbé}}$$

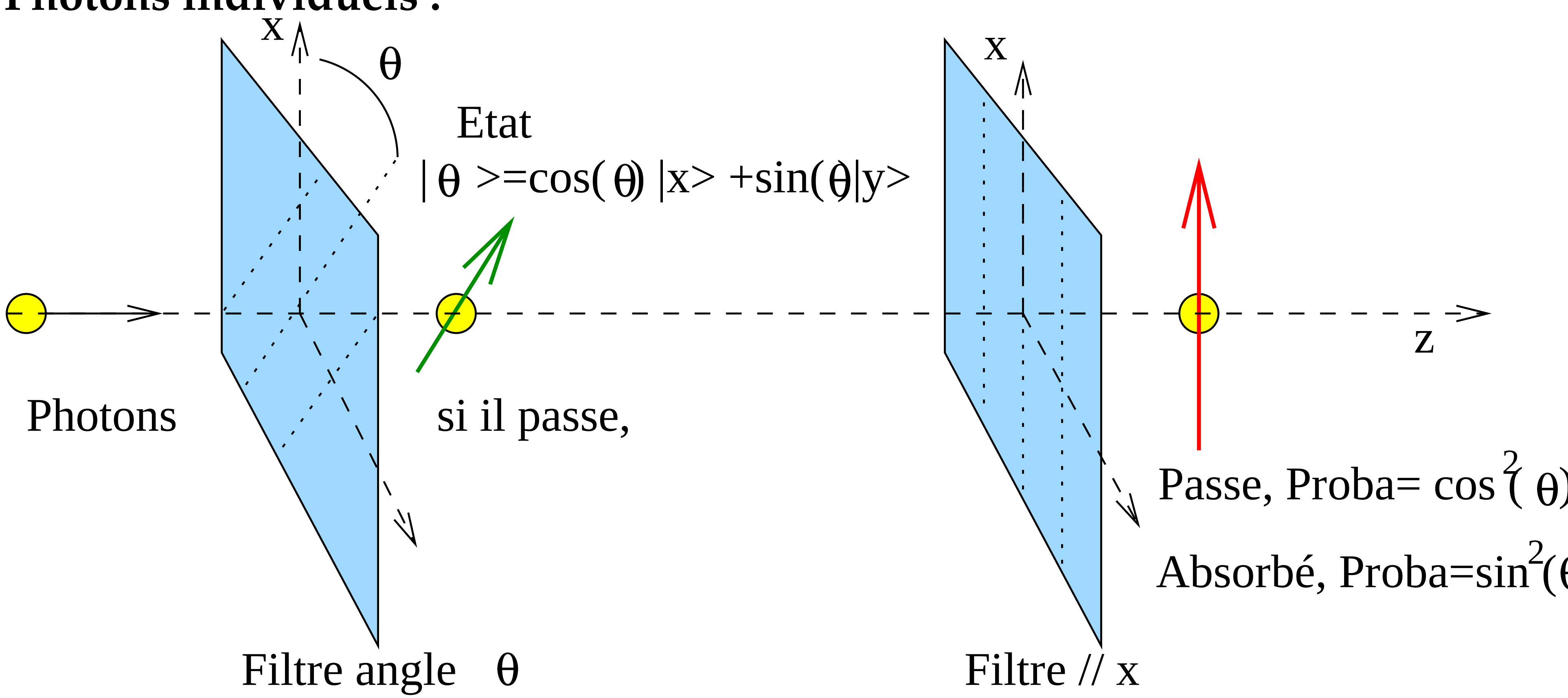
2. Le **hasard** décide si le photon **passe ou est absorbé** :

Proba(passage)=$\dfrac{\||a|x\rangle\|^2}{\||P\rangle\|^2} = \dfrac{|a|^2}{|a|^2 + |b|^2}$, et après passage, $|P\rangle = a|x\rangle$

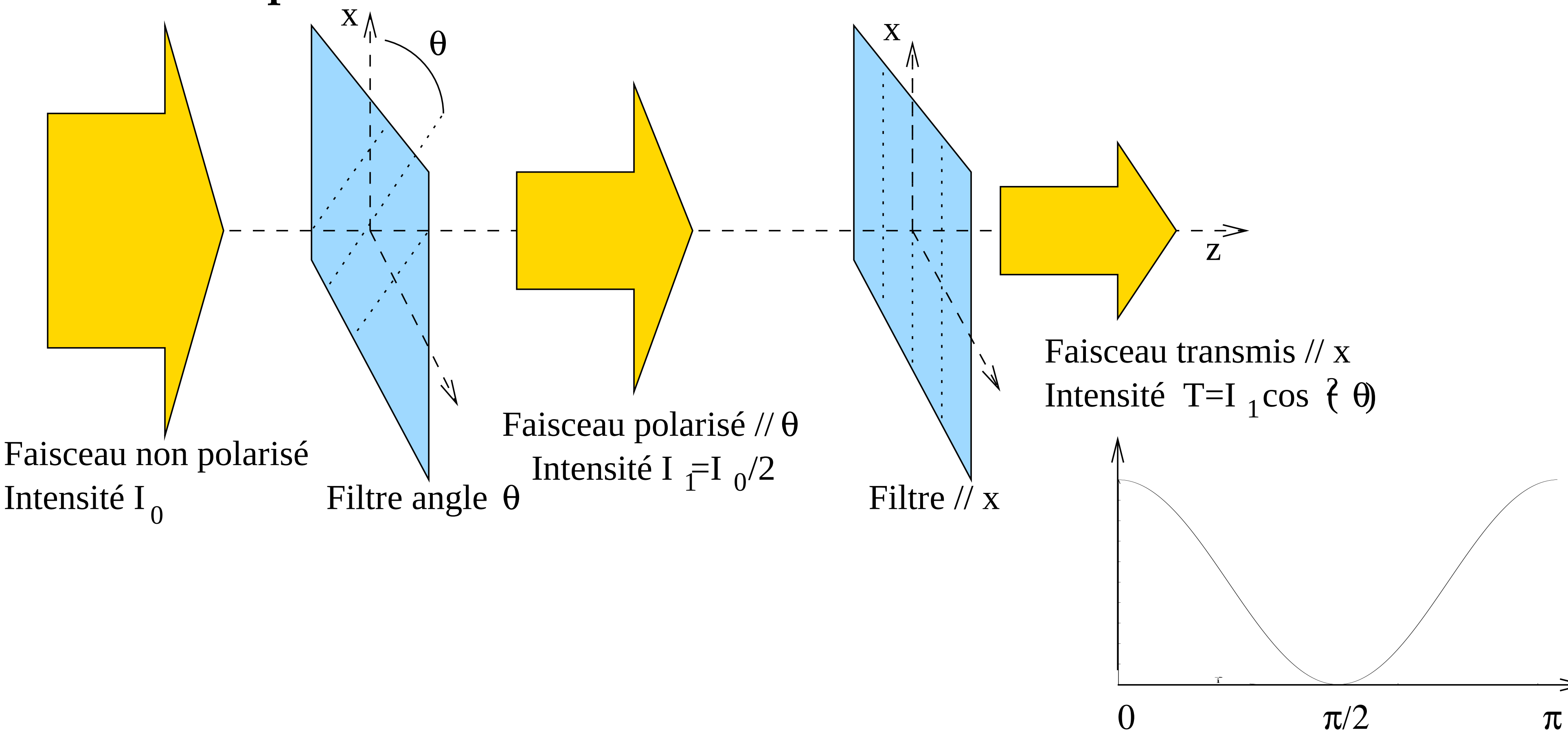
Proba(absorbé)=$\dfrac{\||b|y\rangle\|^2}{\||P\rangle\|^2} = \dfrac{|b|^2}{|a|^2 + |b|^2}$, et après passage, $|P\rangle = b|y\rangle$ (absorbé)

2) Expérience

Photons individuels :



Haut flux de photons :



Montrer les filtres polarisants.

2-1) Remarques :

– **La théorie quantique est probabiliste :**
impossible de prévoir le prochain évènement ;
seulement une prévision statistique pour un grand nombre de préparations initiales identiques.

– La description en terme d'état quantique $|P\rangle \in \mathcal{P}$ est un ***"intermédiaire de calcul"*** qui n'a pas de "réalité observable".

– Gisin et al. commercialisent un générateur de nombres aléatoires (carte PC) basé sur la mesure quantique.

– (*) Autres expériences d'interférences

2-2) Formalisme des observables quantiques :

On code le résultat :

$$A = +1 : \quad \text{si le photon passe } (etat\,|x\rangle)$$
$$A = -1 : \quad \text{si le photon est absorbé } (etat\,|y\rangle)$$

Alors en moyenne (après plusieurs mesures) :

$$\langle A \rangle = (Proba_{passe})\,(+1) + (Proba_{absorb})\,(-1)$$

On introduit l'opérateur autoadjoint $\hat{A}$ sur $\mathcal{P}$ appelé **observable,** défini par :

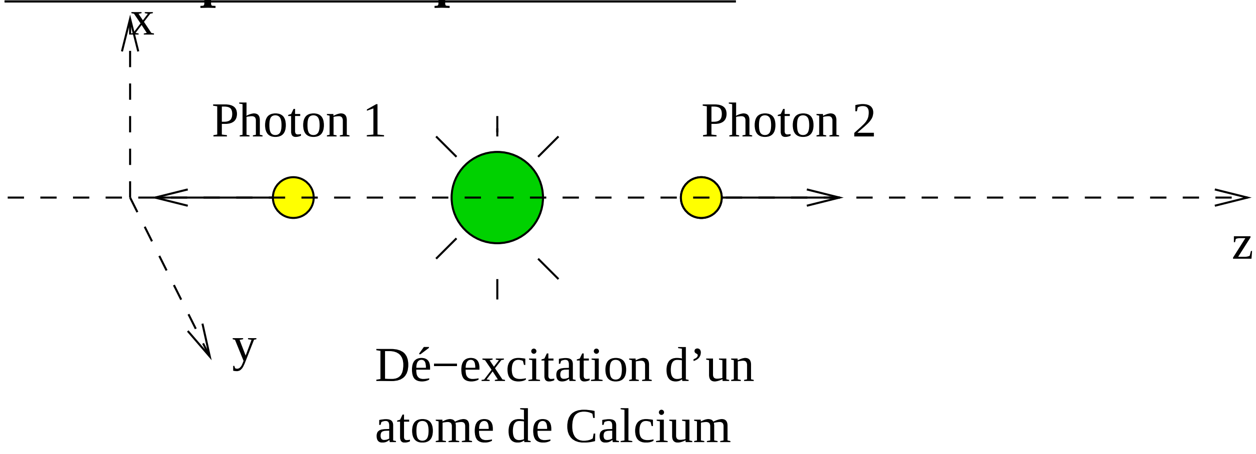
$$\hat{A}|x\rangle = (+1)\,|x\rangle$$
$$\hat{A}|y\rangle = (-1)\,|y\rangle$$

Alors si $|P\rangle = a|x\rangle + b|y\rangle$,

$$
\begin{aligned}
\frac{\langle P|\hat{A}|P\rangle}{\langle P|P\rangle} &= \frac{1}{\||P\rangle\|^2}\left(\overline{a}\langle x| + \overline{b}\langle y|\right)\left(a\,(+1)\,|x\rangle + b\,(-1)\,|y\rangle\right) \\
&= \frac{\|a|x\rangle\|^2}{\||P\rangle\|^2}(+1) + \frac{\|b|y\rangle\|^2}{\||P\rangle\|^2}(-1) = \langle A\rangle
\end{aligned}
$$

3) Non localité de la mécanique quantique :

3-1) Dispositif expérimental :



Etats de base (o.n.) des deux photons : $|x_1\rangle|x_2\rangle,\ |x_1\rangle|y_2\rangle,\ |y_1\rangle|x_2\rangle,\ |y_1\rangle|y_2\rangle$

Principe de superposition : état général de polarisation des deux photons :

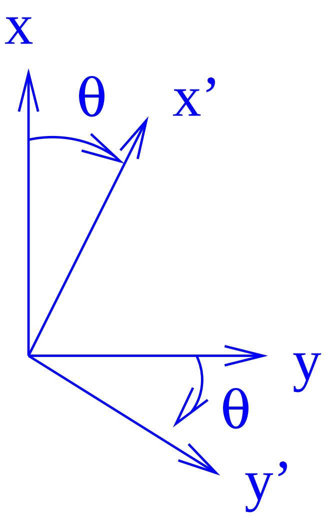
$$|P_{12}\rangle = a|x_1\rangle|x_2\rangle + b|x_1\rangle|y_2\rangle + c|y_1\rangle|x_2\rangle + d|y_1\rangle|y_2\rangle, \quad (a,b,c,d) \in \mathbb{C}$$

(donc $\mathcal{P}_{12} = \mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2$)

Après l'emmission, les deux photons sont dans l'état non factorisé (**enchevétré**)

$$|P_{12}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|x_1\rangle|y_2\rangle - |y_1\rangle|x_2\rangle\right)$$

Remarque : si autre base :

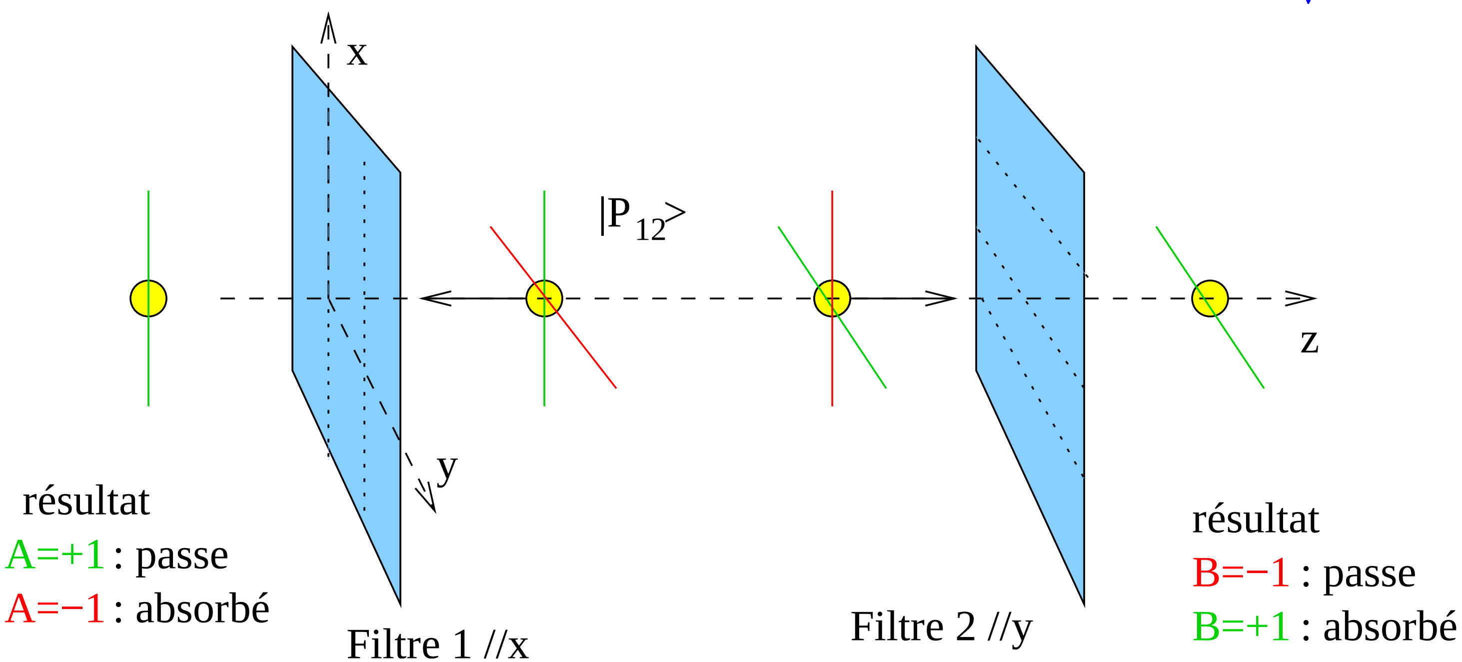


$$
\begin{aligned}
|x\rangle &= \cos\theta|x'\rangle - \sin\theta|y'\rangle \\
|y\rangle &= \sin\theta|x'\rangle + \cos\theta|y'\rangle
\end{aligned}
$$

Alors

$$
\begin{aligned}
|P_{12}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|x_1\rangle|y_2\rangle - |y_1\rangle|x_2\rangle\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left((\cos\theta|x_1'\rangle - \sin\theta|y_1'\rangle)(\sin\theta|x_2'\rangle + \cos\theta|y_2'\rangle)\right) \\
&\quad - (\sin\theta|x_1'\rangle + \cos\theta|y_1'\rangle)(\cos\theta|x_2'\rangle - \sin\theta|y_2'\rangle)) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|x_1'\rangle|y_2'\rangle - |y_1'\rangle|x_2'\rangle\right) : \quad \text{même écriture} \\
&= \frac{i}{\sqrt{2}}\left(|G_1\rangle|D_2\rangle - |D_1\rangle|G_2\rangle\right) : \quad \text{moment angulaire nul}
\end{aligned}
$$

3-2) Mesure de la polarisation des photons : $|P_{12}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x_1\rangle|y_2\rangle - |y_1\rangle|x_2\rangle)$



pour Filtre 1, puis Filtre 2, **le hasard décide entre** :

– $A_x = 1$ (état $|x_1\rangle$ **passe**), avec proba $P_{A=1} = \frac{1}{\||P\rangle\|^2} \left\| \frac{1}{\sqrt{2}}|x_1\rangle|y_2\rangle \right\|^2 = \frac{1}{2}$,
Après : $|P'_{12}\rangle = |x_1\rangle|y_2\rangle$, donc on mesure ensuite $B_y = +1$.

– $A_x = -1$ (état $|y_1\rangle$ **absorbé**), avec proba $P_{A=-1} = \frac{1}{\||P\rangle\|^2} \left\| \frac{1}{\sqrt{2}}|y_1\rangle|x_2\rangle \right\|^2 = \frac{1}{2}$,
Après : $|P'_{12}\rangle = |y_1\rangle|x_2\rangle$, donc on mesure ensuite $B_y = -1$.

3-3) Remarques :

– **Corrélation parfaite** : $A_x = B_y = +1$ ou $A_x = B_y = -1$.

– L'expérience est en **parfait accord avec l'expérience** (voir photo1, photo2)

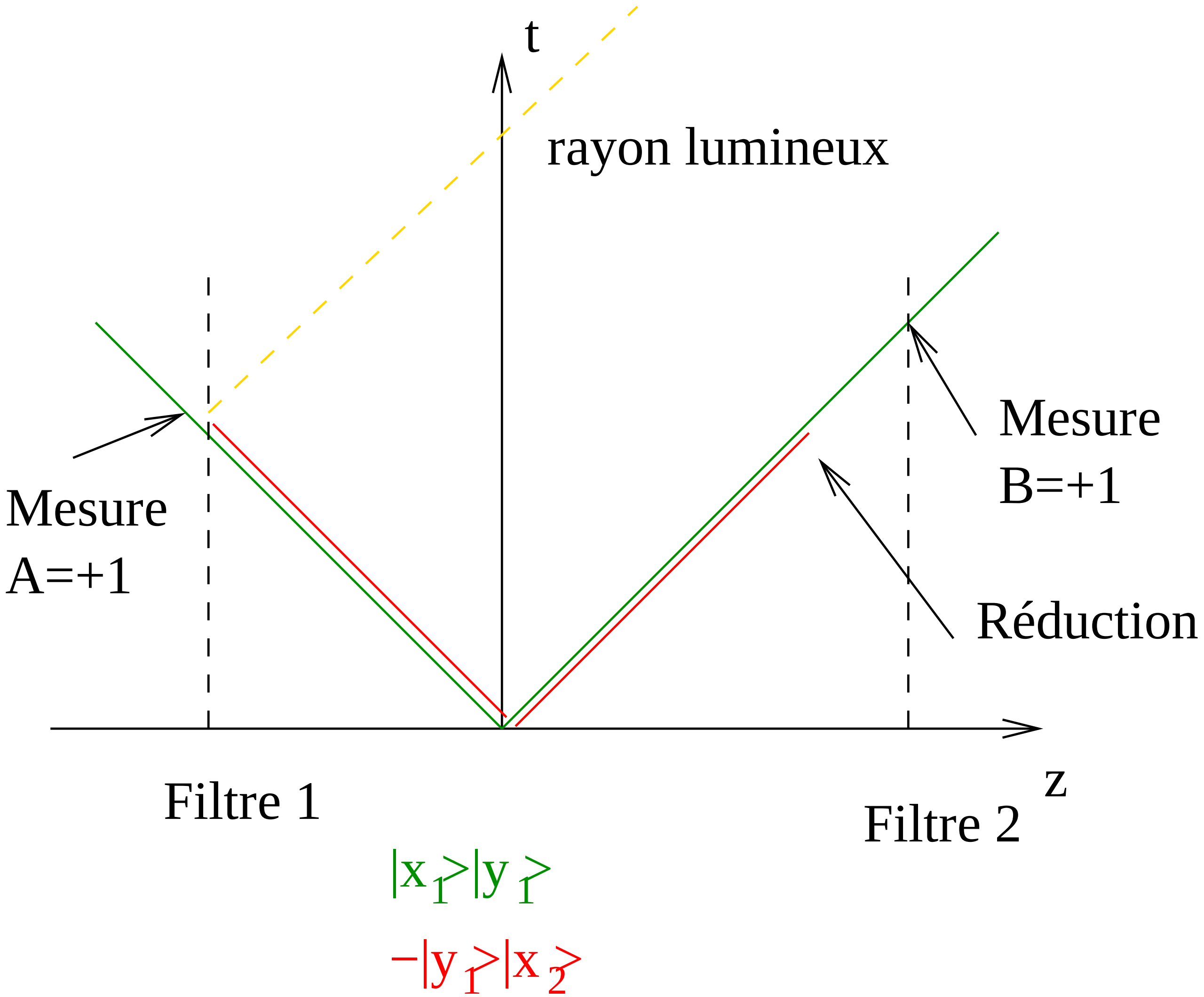
– Dans cette description, chaque photon n'a pas décidé (± 1) avant la mesure,

– Il y a une **action "instantanée" à distance**, plus rapide que la vitesse de la lumière. Mesure de Gisin et al. (Phys.Lett.A 276,(2000)) :

$$|v_{correlation}| > 2.10^4 c \quad \text{dans le référentiel cosmique}$$

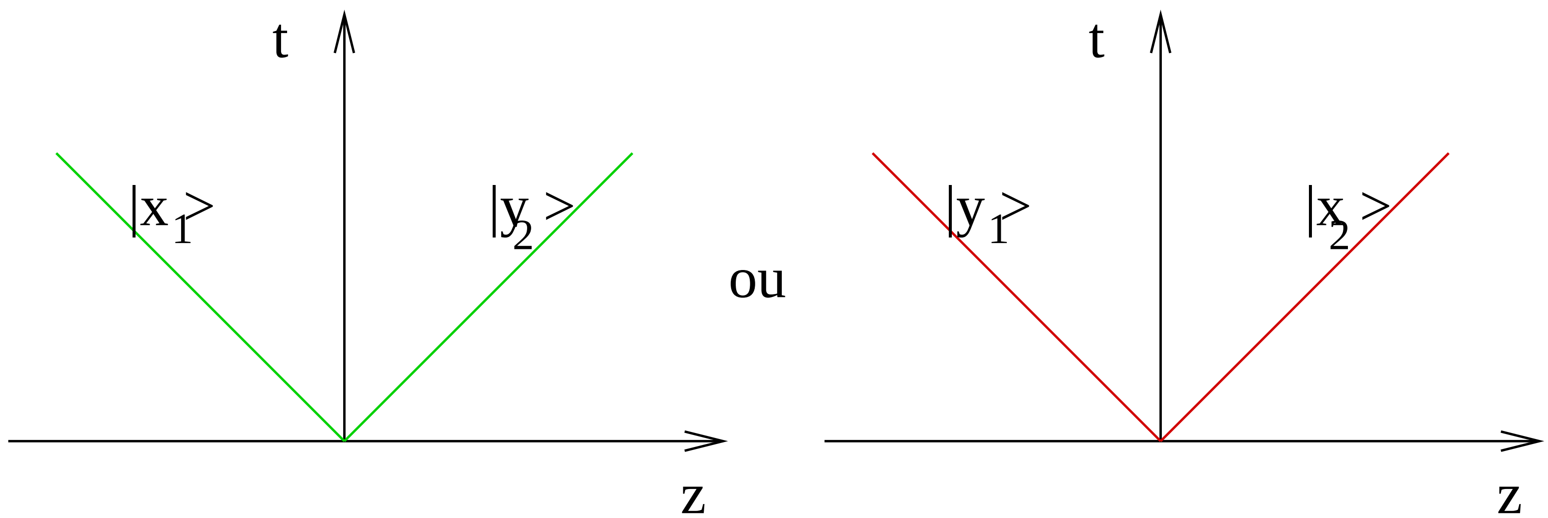
– **Contradiction avec la relativité ?** Cependant cette action ne plus rapide que c ne permet pas de transmettre de l'information, car on ne décide pas si $A_x = B_y = +1$ ou $A_x = B_y = -1$.

– Cette description n'est cependant **pas conforme** avec une description relativiste :



3-4) Objection de Einstein-Podolsky-Rosen (EPR, 1935) sur la non localité

Partisans d'une **théorie (inconnue) locale de "variables cachées"**
c.a.d., que dès le départ, l'état $A_x = B_y = \pm 1$ serait décidé,
et $\langle A_x \rangle = \int A_x d\mu_{proba}$

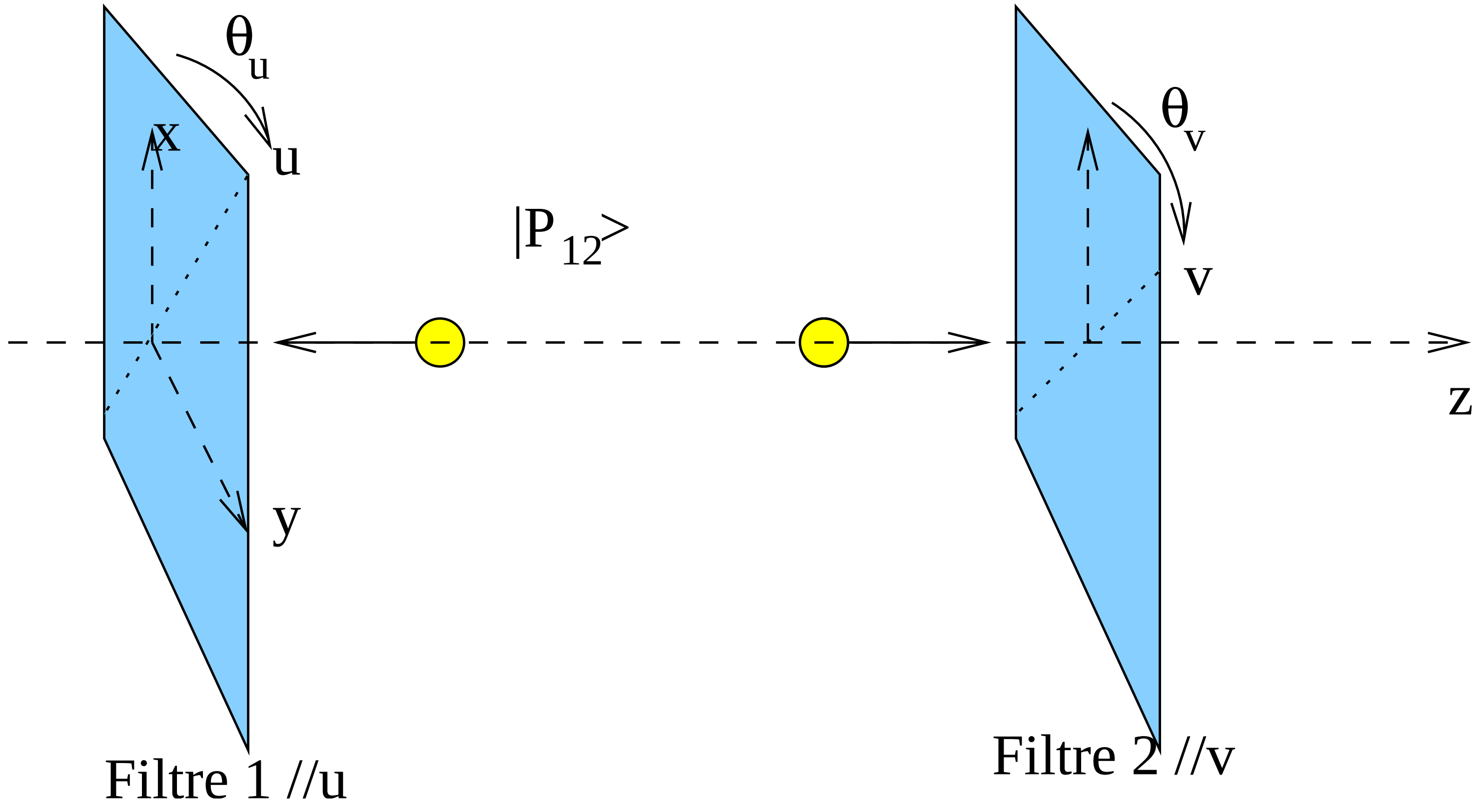


Débat ouvert par E.P.R :

– **Méca. Quantique non locale** ou **théorie à variable cachée locale ?**
– Peut on départager ces deux interprétations par l'expérience ?

3-5) Bell (1964) a montré que l'on peut trancher le débat :

Dispositif avec orientations arbitraires :

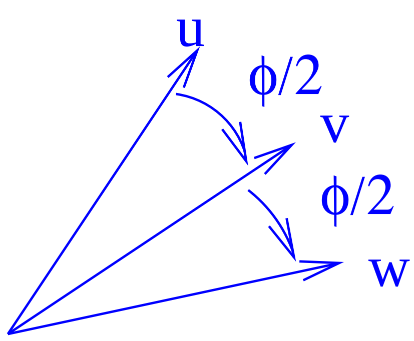


Etat quantique enchevétré : $|P_{12}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|x_1\rangle|y_2\rangle - |y_1\rangle|x_2\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|u_1\rangle|u_2^{\perp}\rangle - |u_1^{\perp}\rangle|u$

On mesure le produit $A_u B_v = \pm 1$, après chaque désintégration (fruit du hasard). (Remarque : $A_x B_y = +1$).

Choix des directions u, v, w.

On déduit la moyenne :



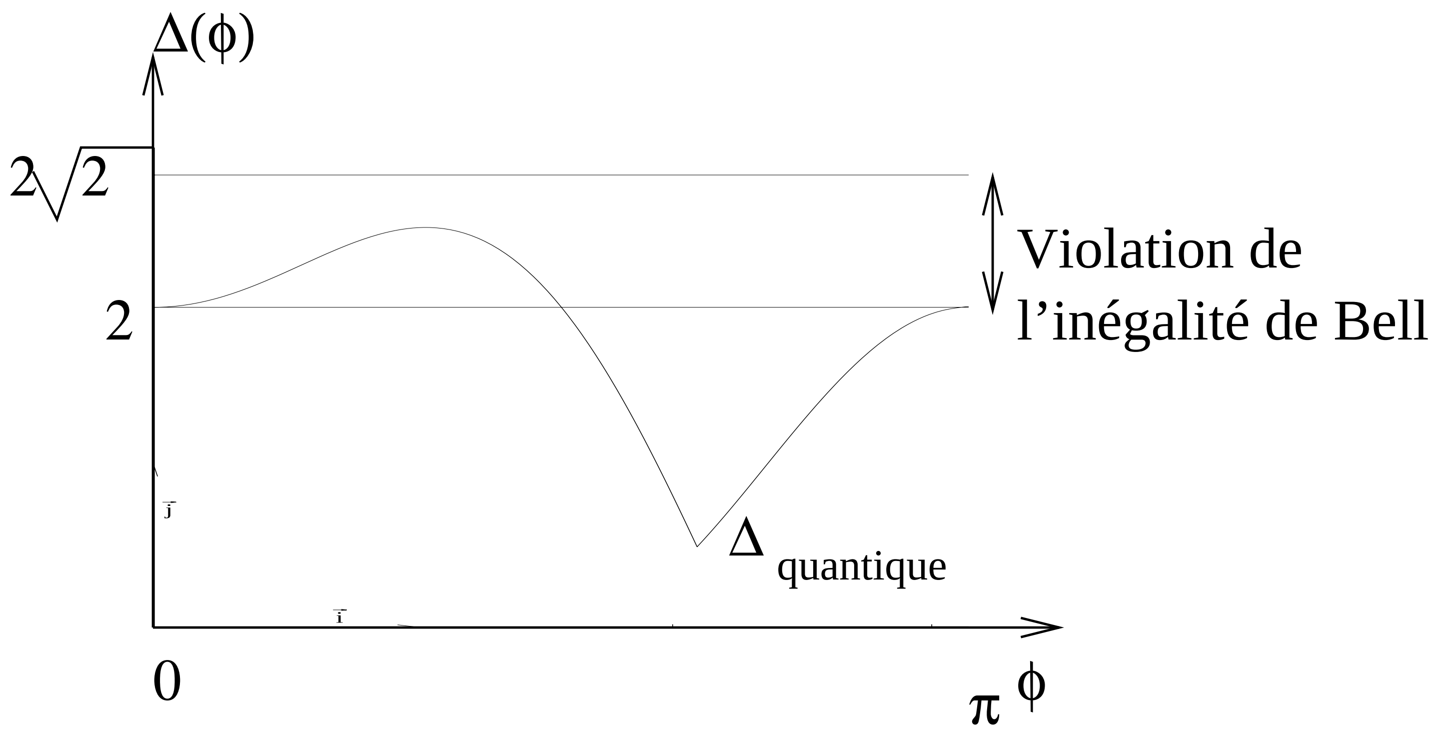
$$\Delta\left(\phi\right) = \left|\langle A_u B_v \rangle - \langle A_u B_w \rangle\right| + \left|\langle A_v B_v \rangle + \langle A_v B_w \rangle\right|$$

<u>D'après l'hypothèse d'une "théorie locale à variables cachées" :</u>

$$\boxed{\Delta_{locale}\left(\phi\right) \leq 2 : \quad \text{inégalité de Bell}}$$

<u>D'après la théorie quantique :</u>

$$\boxed{\Delta_{quant.}\left(\phi\right) = \left|1 + \cos\phi\right| + \left|\cos 2\phi - \cos\phi\right|}$$


Δ(φ)
2√2
2
Violation de
l'inégalité de Bell
Δ quantique
0
π
φ

<u>**Verdict de l'expérience :**</u>

Alain Aspect (1976,82), et récement Gisin et al. sur 10km.

Parfait accord avec la mécanique quantique,
qui est une théorie non locale, avec "action instantanée" à distance.

3-6) Preuves des inégalités :

Pour une théorie locale à variables cachées :

En effet : si $A = A_u, A' = A_v, B = B_v, B' = B_w$, (et non pas $A(u,v)$qui est non local...)

et $\langle O \rangle = \int O d\mu$, $|A|, |B| < 1$

$$\begin{aligned} \Delta_{loc}(A, A'; B, B') &= |\langle AB \rangle - \langle AB' \rangle| + |\langle A'B \rangle + \langle A'B' \rangle| \\ &= |\langle A(B - B') \rangle| + |\langle A'(B + B') \rangle| \\ &\leq \langle |B - B'| + |B + B'| \rangle \\ \\ &= \langle |(B - B') + (B + B')(\pm 1)| \rangle \\ &\leq 2 \end{aligned}$$

on a utilisé :

$$|a| + |b| = |a + b\, signe(ab)| \leq 2, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Pour la théorie quantique :

$$
\begin{aligned}
|P_{12}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|x_1\rangle|y_2\rangle - |y_1\rangle|x_2\rangle\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|u_1\rangle|u_2^{\perp}\rangle - |u_1^{\perp}\rangle|u_2\rangle\Big)
\end{aligned}
$$

On a :

$$
\begin{aligned}
\langle A_u B_v\rangle &= \frac{1}{\langle P_{12}|P_{12}\rangle}\langle P_{12}|\hat{A}_u\hat{B}_v|P_{12}\rangle = (+1)(+1)\left(\frac{1}{2}\sin^2\phi\right) + (+1)(-1)\left(\frac{1}{2}\cos^2\phi\right) \\
&\quad + (-1)(+1)\left(\frac{1}{2}\cos^2\phi\right) + (-1)(-1)\left(\frac{1}{2}\sin^2\phi\right) = \sin^2\phi - \cos^2\phi = -\cos(2
\end{aligned}
$$

donc

$$
\begin{aligned}
\Delta_{quant.}(\phi) &= |\langle A_u B_v\rangle - \langle A_u B_w\rangle| + |\langle A_v B_v\rangle + \langle A_v B_w\rangle| \\
&= |-\cos(\phi) + \cos(2\phi)| + |-1 - \cos(\phi)|
\end{aligned}
$$

Plus généralement, en suivant le calcul pour $\Delta_{loc.}$,
(pour $\langle P|P\rangle = 1$, $\left\|\hat{A}\right\|, \left\|\hat{B}\right\| \leq 1$) :

$$\begin{aligned}
\Delta_{quant.}(A, A'; B, B') &= |\langle AB\rangle - \langle AB'\rangle| + |\langle A'B\rangle + \langle A'B'\rangle| \\
&= \left|\langle P|\hat{A}\left(\hat{B} - \hat{B}'\right)|P\rangle\right| + \left|\langle P|\hat{A}'\left(\hat{B} + \hat{B}'\right)|P\rangle\right| \\
&\leq \left\|\left(\hat{B} - \hat{B}'\right)|P\rangle\right\| + \left\|\left(\hat{B} + \hat{B}'\right)|P\rangle\right\| \\
&\leq \sqrt{2\left(\left\|\left(\hat{B} - \hat{B}'\right)|P\rangle\right\|^2 + \left\|\left(\hat{B} + \hat{B}'\right)|P\rangle\right\|^2\right)} \\
&= \sqrt{4\left(\left\|\hat{B}|P\rangle\right\|^2 + \left\|\hat{B}'|P\rangle\right\|^2\right)} \\
&\leq 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

On a utilisé :

$$\|a\| + \|b\| \leq \sqrt{2\left(\|a\|^2 + \|b\|^2\right)}$$

Conclusion :

– La mécanique quantique malgré **ses succés** est une théorie qui a des aspects bien surprenants et **insaisissables**.

– Le paradoxe E.P.R. est mis à profit dans **la cryptographie quantique** (commercialisée) :

Car *la mesure quantique perturbe le système* ⇔*On peut savoir si le signal (quantique) a été intercepté.*

– Actuellement un grand essor de "**l'informatique quantique**" basée sur la nonlocalité, quête de **l'ordinateur quantique**.

Références :

– Bransden & Joachaim, **"Introduction to quantum mechanics"**, *Addison Wesley Longman 1989*, p.670

– Stamatescu p.305, dans ***"Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory"***, *Springer-Verlag 1996.*

– Gisin et al.,***"Quantum Cryptography"*** to appear in Reviews of Modern Physics, e-print : quant-ph/0101098.