

---

# Exposé sur la quantification géométrique

---

Frédéric Faure

Groupe de travail à l'institut Fourier, jeudi 27 avril 2000

Classement : Quantification géométrique

## 1 Introduction

**But** Formulation géométrique de la quantification sur une **variété compacte**  $M$  à priori quelconque, où  $M$  sera considérée comme **l'espace de phase classique**.

**Démarche** Voici les ingrédients de géométrie complexe qu'il faut (voir Griffiths et Harris [6]) :

1.  $L \rightarrow M$  est un fibré en droite complexe holomorphe sur une variété compacte  $M$  munit d'une structure complexe  $J$ . (Le fibré  $L$  est supposé très ample). On peut alors considérer l'espace  $\mathcal{H}$  des sections holomorphes de  $L$ .
2.  $h$  est une métrique hermitienne sur les fibres de  $L$ . Cela induit une métrique hermitienne  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  dans  $\mathcal{H}$ , et induit (via une connection et une courbure sur  $L$ ) une forme symplectique  $\Omega$  sur  $M$ .

Le résultat est que

- **la mécanique classique de Hamilton** s'exprime sur la variété symplectique  $(M, \Omega)$
- **la mécanique quantique**, dans l'espace de Hilbert  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  des sections holomorphes de  $L$ .

Il y a ensuite des règles de quantification pour associer à une fonction réelle  $f \in C^\infty(M)$ , un opérateur Hermitique dans  $\mathcal{H}$  (règle de Toeplitz, ou autre,...).

Dans le langage conventionnel de la quantification géométrique (voir [14]), la donnée initiale est la variété symplectique  $(M, \Omega)$ . La structure  $C^\infty$  du fibré hermitien en droite complexes  $L \rightarrow M$  s'appelle la "**préquantification**", et la structure complexe  $J$  sur  $M$  et le choix d'une structure holomorphe sur  $L$  s'appelle la "**quantification**", et "**choix de polarisation complexe**".

**Exemples** Les cas du plan  $M = \mathbb{R}^2$  (non compact), du tore  $M = T^2 = \mathbb{R}^2/\Gamma$ , de la sphère  $S^2 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ , et des projectifs  $M = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  serviront d'illustration au cours de l'exposé.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Ingrédients géométriques</b>	<b>2</b>
2.1	Variété complexe $M$ . . . . .	2
2.2	Fibré holomorphe $L$ en droites sur $M$ . . . . .	2
2.3	Fibré hermitien holomorphe en droite $(L, h)$ . . . . .	3
2.4	Topologie de $L$ et dimension de $\mathcal{H}$ . . . . .	4
2.5	Exemples . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Règles de quantification</b>	<b>7</b>
3.1	Plongement de Kodaira de $M$ dans le projectif $\mathbb{P}(\mathcal{H}^*)$ . . . . .	7
3.2	Etats cohérents . . . . .	8
3.3	Quantification de Toeplitz . . . . .	9

4	Limite semi-classique	12
5	Perspectives	12

## 2 Ingrédients géométriques

### 2.1 Variété complexe $M$

Références : Nakahara [8], [6], p.14.

- Soit  $M$  une **variété complexe** de dimension  $n = \dim_{\mathbb{C}}(M)$ , c'est à dire possédant un système de coordonnées holomorphes  $z = (z_1, \dots, z_n)$  sur chaque carte  $U_{\alpha} \subset M$  (et fonctions de transitions holomorphes).
- En un point  $x \in M$ , on note  $z_i = x_i + iy_i$ . Une base de  $T_x^*(M)$  est  $(dx_i, dy_i)_{i=1 \rightarrow n}$ . Une base de l'**espace cotangent complexifié**  $T_x^{\mathbb{C}*}(M) = T_x^*(M) \otimes \mathbb{C}$  est

$$dz_i = dx_i + idy_i \in T_x^{*+}(M), \quad d\bar{z}_i = dx_i - idy_i \in T_x^{*-}(M), \quad i = 1 \rightarrow n$$

- Une base de l'**espace tangent complexifié**  $T_x^{\mathbb{C}}(M)$ , (son dual) est alors :

$$\frac{\partial}{\partial z_i} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} - i \frac{\partial}{\partial y_i} \right) \in T_x^+(M), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} + i \frac{\partial}{\partial y_i} \right) \in T_x^-(M), \quad i = 1, \dots, n$$

- La **structure complexe** en  $x$  est l'opérateur  $J : T_x^{\mathbb{C}}(M) \rightarrow T_x^{\mathbb{C}}(M)$  tel que  $J(\partial_{z_i}) = i\partial_{z_i}$ , et  $J(\partial_{\bar{z}_i}) = -i\partial_{\bar{z}_i}$ .
- L'espace des  $k$ -formes se décompose :  $A^k(M) = \bigoplus_{p+q=k} A^{p,q}(M)$  en **formes de type**  $(p, q)$  :

$$A_x^{p,q}(M) \subset \left( \bigwedge^p T_x^{*+}(M) \right) \otimes \left( \bigwedge^q T_x^{*-}(M) \right)$$

Par exemple,  $dz \wedge d\bar{z} \in A^{1,1}(M)$ .

- La **dérivée extérieure** se décompose selon :

$$d = \partial + \bar{\partial}$$

avec  $\partial : A^{p,q}(M) \rightarrow A^{p+1,q}(M)$ , et  $\bar{\partial} : A^{p,q}(M) \rightarrow A^{p,q+1}(M)$ . Par exemple,  $\partial(|z|^2) = \bar{z}dz$ , et  $\bar{\partial}(|z|^2) = -dz \wedge d\bar{z}$ .

- **Groupe de Cohomologie de Dolbeault** :

$$H_{\bar{\partial}}^{p,q} = \frac{Z_{\bar{\partial}}^{p,q}(M)}{\bar{\partial}(A^{p,q-1}(M))}$$

### 2.2 Fibré holomorphe $L$ en droites sur $M$

Références : [6], p.66, p.132.

- $L = \cup_{x \in M} L_x$  est une variété complexe, et chaque fibre  $L_x$  est un espace vectoriel de dimension complexe 1 ("une droite complexe"). Le projecteur sur la base est  $\pi(L_x) = x$ , et si  $(U_{\alpha})_{\alpha}$  est un atlas de  $M$ , alors des **fonctions de trivialisations holomorphes** sont :

$$\varphi_{\alpha} : \pi^{-1}(U_{\alpha}) \rightarrow U_{\alpha} \times \mathbb{C}$$

Les **fonctions de transition** sur  $U_{\alpha} \cap U_{\beta}$  sont donc :

$$g_{\alpha\beta} : U_{\alpha} \cap U_{\beta} \rightarrow \mathbb{C}^*, \quad g(x) = \varphi_{\alpha} \varphi_{\beta}^{-1}$$

(remarque : les relations  $g_{\alpha\beta}(x).g_{\beta\alpha}(x) = 1$ , et  $g_{\alpha\beta}(x).g_{\beta\gamma}(x).g_{\gamma\alpha}(x) = 1$  et les changements de trivialisations possibles, montrent que le fibré  $L$  est caractérisé par la classe de cohomologie de Čech  $[g] \in H^1(M, \mathcal{O}^*)$ . Le **groupe de Picard** est  $Pic(M) = H^1(M, \mathcal{O}^*) = \{\text{fibrés } L \text{ sur } M\}$ .)

- Une **section holomorphe globale**  $s$  de  $L$  est une application holomorphe  $s : M \rightarrow L$  telle que  $\pi_* s = \text{Id}_M$ .  $s$  est donnée localement sur  $U_\alpha$  par la fonction holomorphe  $s_\alpha(x) = \varphi_\alpha(s(x))$ . Alors sur  $U_\alpha \cap U_\beta$ ,  $s_\alpha(x) = g_{\alpha\beta}(x) \cdot s_\beta(x)$ . Remarque :  $\varphi_\alpha$  définit une section holomorphe locale jamais nulle sur  $U_\alpha : r_\alpha(x) = \varphi_\alpha^{-1}(x, 1)$ .  
On note  $\mathcal{H}$  l'espace vectoriel des sections holomorphes globales de  $L$ .
- Chaque fibre  $L_x^*$  du **fibré dual**  $L^*$  est le dual de  $L_x$ . Par conséquent, les fonctions de transition de  $L^*$  sont  $j_{\alpha\beta}(x) = 1/g_{\alpha\beta}(x)$ .  
Chaque fibre de  $L^{(m)} = L^{\otimes m}$  est le produit  $L_x \otimes \dots \otimes L_x$ . Par conséquent les fonctions de transition de  $L^{(m)}$  sont  $g_{\alpha\beta}^{(m)}(x) = (g_{\alpha\beta}(x))^m$ . On peut donc écrire  $L^* = L^{-1}$ .
- Si  $\sigma \in A^{p,q}(L)$  (forme différentielle à valeur dans  $L$ , sur ouvert  $U$ ), cela signifie que  $\sigma = \omega \otimes r$ , avec  $\omega \in A^{p,q}(U)$  et  $r$  est une section holomorphe jamais nulle sur  $U$ . On définit l'opérateur de "Dolbeault twisté"  $\bar{\partial}$  dans  $A^{p,q}(L)$  par :

$$\bar{\partial}\sigma = (\bar{\partial}\omega) \otimes r$$

La définition ne dépend pas du choix de  $r$ .

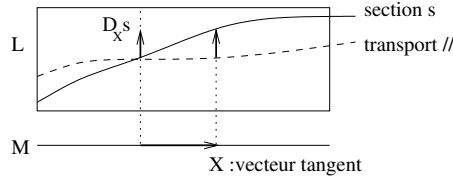
## 2.3 Fibré hermitien holomorphe en droite $(L, h)$

Références : [6] , p.71-77,p.140,p.151, Wells [13]p.67,p.77.

### 2.3.1 Métrique hermitienne

Soit  $h_x(\cdot, \cdot)$  une métrique hermitienne (non nulle) sur chaque fibre  $L_x$  (qui dépend de  $x$  de façon  $C^\infty$ ).

### 2.3.2 Connection



Une **connection**  $D$  sur  $L$  est un opérateur qui à une section  $C^\infty$  de  $L$  associe une 1-forme à valeur dans  $L$  :

$$D : A^0(L) \rightarrow A^1(L)$$

telle que :

1. Règle de Leibnitz :  $D(f \cdot s) = df \otimes s + f \cdot D(s)$ , pour  $s \in A^0(L)$ ,  $f \in C^\infty(U)$  ; avec  $U \subset M$ .
2.  $D$  soit compatible avec la métrique  $h$  :  $d(h(s_1, s_2)) = h(Ds_1, s_2) + h(s_1, Ds_2)$  (i.e si  $s$  suit la connection dans la direction  $X$ , alors  $h(s, s)$  est constant)
3.  $D$  soit compatible avec la structure complexe : comme  $A^1(L) = A^{1,0}(L) \oplus A^{0,1}(L)$ , on exige que  $D^{0,1} = \bar{\partial}$ . (i.e. si  $s$  est une section holomorphe, et  $X \in T_x^-(M)$ , alors  $D_X s = 0$ ).

En pratique, si  $r(x)$  est une section holomorphe jamais nulle sur  $U$ , On pose  $Dr = \theta_r r$ , où  $\theta_r \in A^{1,0}(U)$  dépend de  $r$ . Un petit calcul :  $dh(r, r) = \bar{\theta}_r h + \theta_r h = \bar{\partial}h + \partial h$  donne par identifications des composantes dans  $A^{1,0}$ ,  $\theta_r = h^{-1} \partial h$  et donc

$$\theta_r = \partial(\ln h(r, r))$$

donc  $D$  est unique.

### 2.3.3 Courbure

On prolonge  $D$  sur  $A^p(L) \rightarrow A^{p+1}(L)$  par : pour  $\psi \in A^p(U)$ ,  $s \in A^0(L)$ ,

$$D(\psi \otimes s) = d\psi \otimes s + (-1)^p \psi \wedge Ds$$

alors, pour  $\eta \in A^q(L)$ , on a  $D(\psi \wedge \eta) = d\psi \wedge \eta + (-1)^p \psi \wedge D\eta$ .

Remarquons que pour  $s \in A^0(L)$ ,  $f \in C^\infty(U)$ , on a  $D^2(f.s) = D(df \otimes s + fDs) = -df \wedge Ds + df \wedge Ds + f \wedge D^2s = f.D^2s \in A^2(L)$ . Donc  $(D^2)_x \in A_x^2(M) \otimes \text{Hom}(L_x, L_x) \equiv A_x^2(M)$ . On peut donc écrire

$$D^2s = \Theta s, \quad \Theta \in A^2(M)$$

Si  $r$  est une section holomorphe jamais nulle sur  $U$ , alors  $D^2r = D(\theta_r r) = d\theta_r r - \theta_r \wedge Dr = d\theta_r r - \theta_r \wedge \theta_r = d\theta_r r$ . Donc

$$\Theta = d\theta_r = \bar{\partial}\partial(\ln h(r, r)) \in A^{1,1}(M), \quad d\Theta = 0, \quad i\Theta \text{ réelle}$$

### 2.3.4 Métrique de Kähler induite sur $M$

On pose :

$$\begin{aligned} \Omega &= i\Theta \in A^{1,1}(M), & d\Omega &= 0, & \Omega &\text{ réelle} \\ g(X, Y) &= \Omega(X, JY), & & & &\text{ pour } X, Y \in TM \end{aligned}$$

Dans le cas où  $g$  est définie positive pour tout  $x \in M$ , on dit que  $(L, h)$  est un **fibré positif**. On suppose être dans ce cas dans la suite.

Alors  $(M, g)$  forme une **variété de Kähler** (plus précisément une variété de Hodge car  $\Omega$  est entière par construction, voir (3)), c'est à dire que :

$\Omega$  est une **métrique symplectique** (anti-sym. non dégénérée) sur  $M$ ;  $g$  est une **métrique Riemannienne** (sym.) sur  $M$ .

Remarque :  $(M, \Omega)$  sera l'**espace de phase des états classiques**. Si  $f \in C^\infty(M)$  est un "Hamiltonian", le champ de vecteur correspondant  $X_f$  est défini par :

$$\Omega(X_f, \cdot) = df(\cdot) \tag{1}$$

La **forme volume associée** sur  $M$  est

$$\phi = \frac{1}{(2\pi)^n} \frac{(-1)^{[n/2]}}{n!} \Omega^n$$

(on a divisé par  $(2\pi)^n$  pour avoir une classe entière, voir (3)).

Remarque : sur  $L^m$ , la métrique est  $h^{(m)} = h^m$ , et la courbure est donc  $\Theta^{(m)} = m\Theta$ .

### 2.3.5 Espace de Hilbert des sections globales

si  $s_1, s_2 \in A^0(L)$  sont des sections  $C^\infty$  de  $L$ , (en particulier si  $s_1, s_2 \in \mathcal{H}$  sont des sections holomorphes), on pose

$$\langle s_1, s_2 \rangle = \int_M h(s_1, s_2) \cdot \phi \tag{2}$$

produit hermitien, qui transforme l'espace des sections holomorphes  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  en **espace de Hilbert**. (rem : le fait que  $M$  soit compact implique que  $\dim \mathcal{H} < \infty$ ; voir ci-dessous). Ce sera l'**espace des états quantiques**.

## 2.4 Topologie de $L$ et dimension de $\mathcal{H}$

(voir les références pour plus d'explications).

### 2.4.1 Propriétés :

[6] , p.139,p.407, [13] p.99,p.103, Woodhouse [14]p.160.

La première classe de Chern

$$c_1(L) = \frac{i}{2\pi} [\Theta] \in H_{DR}^2(M, \mathbb{Z}) \quad (3)$$

est une classe entière (i.e. pour tout 2-cycle  $\Gamma \in H_2(M)$ ,  $\int_{\Gamma} c_1(L) \in \mathbb{Z}$ ) et qui ne dépend pas de la métrique  $h$ .

Explication simple ([14] p160) : Si  $\Gamma$  est une sphère, soit  $\gamma \subset \Gamma$  une courbe fermée, qui découpe  $\Gamma$  en deux parties :  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , et  $\gamma = \partial\Gamma_1 = -\partial\Gamma_2$ . Alors avec le théorème de Stokes, l'holonomie de la connection le long de  $\gamma$  est  $\varphi = \oint_{\gamma} \theta_e = \int_{\Gamma_1} \Theta = -\int_{\Gamma_2} \Theta [2\pi]$ . Donc  $\frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} \Theta \in \mathbb{Z}$ . On peut le faire pour toute surface représentée par un polygone avec des règles de recollement.

De plus,

$c_1(L)$  caractérise totalement la structure  $C^\infty$  du fibré  $L$ , mais caractérise le fibré holomorphe  $L$  à un terme de  $H_{\bar{\partial}}^{1,0}(M)/H^1(M, \mathbb{Z})$  près.

Cette dernière propriété se montre en utilisant la suite exacte de faisceaux par l'application  $\exp(i2\pi \cdot) : \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}^*$  (cela sert aussi de définition pour  $c_1(L)$ ).

Pour une surface de Riemann  $M$  de genre  $g$ ,  $c_1(L)$  est caractérisé par l'entier  $d = \int_M c_1(L)$  appelé degré de  $L$ . Et  $H_{\bar{\partial}}^{1,0}(M)/H^1(M, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{C}^g/\mathbb{Z}^g$  est un tore (variété Jacobienne de  $M$ ).

### 2.4.2 Théorème de Riemann-Roch-Hirzebruch

c'est un exemple de théorème de l'indice pour l'opérateur de Dolbeault twisté  $\bar{\partial}$  :

si  $L$  est positif, alors il existe  $m_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour  $m \geq m_0$ , l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}^{(m)}$  des sections holomorphes de  $L^m$  est de dimension ([13] p.153) :

$$\dim(\mathcal{H}^{(m)}) = \int_M (Ch(L^m).Todd(TM))_{\text{restreint aux } n\text{-formes}}$$

### 2.4.3 Remarques :

— Rappel :  $Ch(L^m) = \exp(c_1(L^m)) = \exp(mc_1(L)) \in H_{DR}^\bullet(M)$ , et  $Todd(M) = \det\left(\frac{\Omega(TM)}{1-e^{-\Omega(TM)}}\right) \in H_{DR}^\bullet(M)$ , où  $\Omega(TM) = \frac{i\sqrt{-1}}{2\pi}$  est la courbure Riemannienne de  $M$ . La classe de Chern est  $c(M) = \det(1 - \Omega(TM))$ .

— On observe que  $\dim(\mathcal{H}^{(m)})$  est un polynôme en  $m$  ("Pol. de Hilbert") dont le terme dominant est :

$$\dim(\mathcal{H}^{(m)}) = m^n Vol_\phi(M) + O(m^{n-1}) \quad (4)$$

En posant  $h = 2\pi\hbar = 1/m$ , cette dernière formule est "une formule de Weyl" qui montre que à la limite semi-classique  $m \rightarrow \infty$ , le nombre d'états quantiques est le nombre de cellules de Planck  $h^n$  contenues dans l'espace des phases. Note :  $d = \text{degre}(L) = \int c_1(L)^n = n! Vol_\phi(M)$  est un entier ([6] p.171), mais  $m^n Vol_\phi(M)$  n'est pas forcément entier.

— Si  $n = \dim_{\mathbb{C}} M = 1$ ,  $M$  est **une surface de Riemann** de genre  $g$ . Alors  $Todd(M) = 1 + \frac{c_1(TM)}{2}$ . Donc  $(Ch(L^m).Todd(TM))_{2\text{-formes}} = \frac{c_1(TM)}{2} + c_1(L^m)$ . Or  $\int_M c_1(TM) = 2 - 2g$  (intégrale de courbure) donc

$$\dim(\mathcal{H}^{(m)}) = 1 - g + m \int_M c_1(L) = 1 - g + m d \quad (5)$$

vrai pour  $md > g$ . ([6] p.245).

— Si  $n = \dim_{\mathbb{C}} M = 2$ , on obtient :

$$\dim(\mathcal{H}^{(m)}) = m^2 \frac{1}{2} \int_M c_1^2(L) + m \frac{1}{2} \int_M c_1(L)c_1(M) + \frac{1}{12} \int_M c_1^2(M) + c_2(M)$$

Le deuxième terme montre un "couplage" entre  $L$  et  $TM$ .

## 2.5 Exemples

### 2.5.1 Le plan

Cet exemple correspond au cotangent  $T^*\mathbb{R}$  pour décrire une particule à une dimension.

Soit  $M = \mathbb{C} \equiv T^*\mathbb{R} \ni (q, p)$ , avec la structure complexe  $J : J(\partial_q) = \partial_p$ , et on choisit les coordonnées complexes

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}}(q + ip)$$

Le fibré en droite  $L_{plan} \rightarrow M$  est trivial; on choisit une section holomorphe de référence notée  $r$ , et la métrique  $h$  telle que  $h(r, r)(z) = \exp(-|z|^2)$ . Alors la forme symplectique est comme attendue :

$$\Omega = i\bar{\partial}\partial \ln h(r, r) = idz \wedge d\bar{z} = dq \wedge dp$$

### 2.5.2 Le tore $T^2$

Cet exemple est utilisé par exemple pour décrire des électrons bi-dimensionnels en potentiel périodique, et fort champ magnétique.

*références : Perelomov [9] p.24-29, [6] p.308.*

Soit  $M = T^2 = \mathbb{C}/\Lambda$ , avec le réseau  $\Lambda = \{n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2, (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2\}$ . Le fibré  $L_{tore} \rightarrow M$  s'obtient à partir de celui du plan  $L_{plan}$  en identifiant les fibres en  $z$  et  $z + \lambda$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}, \forall \lambda \in \Lambda$ . Cette identification se fait grâce aux opérateurs qui translatent les sections holomorphes  $T(\lambda) = \exp(\bar{\lambda}a^+ - \lambda a)$  de  $\lambda \in \Lambda$ , voir eq.(8), et n'est possible que si il y a la commutativité  $T(\lambda_1)T(\lambda_2) = T(\lambda_2)T(\lambda_1)$ . Cela requiert

$$Aire_\phi(M) = \frac{1}{2\pi} \Im(\bar{\lambda}_1 \lambda_2) = d \in \mathbb{N}$$

c'est à dire que  $\frac{1}{2\pi}\Omega \in H_{DR}^2(M, \mathbb{Z})$  soit une classe entière conformément à eq(3).

Précisément, on choisit  $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in [0, 2\pi]^2$ . Une section holomorphe de  $L_{tore}$  notée  $|s, \theta \rangle \in \mathcal{H}_{tore}$  est une section holomorphe de  $L_{plan}$  telle que  $T(\lambda_1)|s, \theta \rangle = e^{i\theta_1}|s, \theta \rangle$  et  $T(\lambda_2)|s, \theta \rangle = e^{i\theta_2}|s, \theta \rangle$ . On obtient une telle section à partir d'une section  $|s \rangle$  de  $L_{plan}$ , en la rendant périodique :

$$|s, \theta \rangle = P_\theta |s \rangle$$

$$P_\theta = \sum_{n_1 n_2 \in \mathbb{Z}} e^{-i(n_1 \theta_1 + n_2 \theta_2)} T(n_1 \lambda_1) T(n_2 \lambda_2)$$

D'après eq.(5),  $\dim \mathcal{H} = d$ .

### 2.5.3 La sphère $M = S^2 = \mathbb{P}^1$

Cet exemple décrit par exemple la dynamique du spin et du moment angulaire.

Soit  $Z = (Z_0, Z_1) \in \mathbb{C}^2$ , et  $z = \frac{Z_1}{Z_0} = \tan(\frac{\theta}{2})e^{i\varphi}$  coordonnée inhomogène ou stéréographique de  $M = S^2 = \mathbb{P}^1$  (où  $\theta, \varphi$  sont les coordonnées sphériques de  $S^2$ ). On note  $U \rightarrow \mathbb{P}^1$  "le fibré universel" (obtenu en identifiant  $Z$  et  $\lambda Z$  avec  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ ), munit de la métrique naturelle  $h(Z, Z) = |Z_0|^2 + |Z_1|^2$ . On note  $H \rightarrow \mathbb{P}^1$  son fibré dual appelé fibré hyperplan, et  $H^d \rightarrow \mathbb{P}^1$  ses puissances tensorielles,  $d \in \mathbb{N}$ .

Une section holomorphe de  $H^d$  est un polynome homogène en  $(Z_0, Z_1)$  de degré  $d$  :  $s(Z) = \sum_{i=0}^d a_i Z_0^{d-i} Z_1^i$ . Alors  $\dim(\mathcal{H}) = d + 1$ , conformément à eq.(5). On peut poser  $j = d/2$ , demi-entier. On choisit la section de référence  $r(Z) = Z_0^d$ . On remarque que la carte  $Z_0 = 1$ , est une section méromorphe  $\tilde{Z}$  de  $U$  duale de  $r$ , car  $r(\tilde{Z}) = 1$ . Comme  $h(\tilde{Z}, \tilde{Z}) = (1 + |z|^2)$ , on déduit que

$$h(r, r)(z) = \frac{1}{(1 + |z|^2)^d}$$

et la forme symplectique

$$\Omega = i\bar{\partial}\partial \ln h(r, r) = d \frac{i}{(1 + |z|^2)^2} dz \wedge d\bar{z} = \frac{d}{2} \sin \theta d\theta \wedge d\varphi$$

**Pour l'espace projectif**  $M = \mathbb{P}^n$ , on considère de même l'espace  $\mathcal{H}$  des sections holomorphes de  $H^d \rightarrow M$ . Une section holomorphe de  $H^d$  est un polynôme homogène en  $(Z_0, \dots, Z_n)$  de degré  $d$ . Alors  $\dim(\mathcal{H}) = C_{n+d}^n = \frac{d^n}{n!} + O(d^{n-1})$  en accord avec (4).

### 3 Règles de quantification

#### 3.1 Plongement de Kodaira de $M$ dans le projectif $\mathbb{P}(\mathcal{H}^*)$

*Références : [6] p.176*

Dans ce paragraphe on suppose  $L \rightarrow M$  fibré holomorphe en droite sur  $M$  compacte **sans métrique hermitienne**.

— Soit  $r^* \in L_x^*$ , un point du fibré dual, au dessus de  $x = \pi(r^*) \in M$ . On définit  $\iota_{r^*} \in \mathcal{H}^*$  par

$$\iota_{r^*}(s) = r^*(s(x)), \quad \forall s \in \mathcal{H}$$

c'est à dire que  $r^*$  et  $\iota_{r^*}$  évaluent la valeur de la section  $s$  au point  $x \in M$ . Autrement dit,  $\iota_{r^*}$  est l'hyperplan de  $\mathcal{H}$  constitué des sections holomorphes qui s'annulent en  $x$ .

— Si  $\forall r^* \in L_x^*$ ,  $\iota_{r^*} = 0$ , cela signifie que toutes les sections s'annulent en  $x$ . On dit que  $x$  est un **point de base** de  $L$ . Dans la suite on suppose que  $\forall x \in M$ ,  $x$  n'est pas un point de base. Le théorème de plongement de Kodaira (voir + loin) le garantira dans le cas qui nous intéresse.

— Si  $r^{*'} = c.r^*$  alors  $\iota_{r^{*'}} = c.\iota_{r^*}$ ; on peut donc passer à la base de  $L^*$ , et au projectif de  $\mathcal{H}^*$ , et au fibrés duals  $L$  et  $H \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{H}^*)$  (qui est le fibré dual appelé fibré hyperplan, voir [6], p.145,p.165) :

$$\begin{array}{ccc} \iota : & r^* \in L^* & \longrightarrow & \iota_{r^*} \in \mathcal{H}^* \\ & \downarrow & & \downarrow \\ \iota : & x \in M & \longrightarrow & \mathbb{P}(\mathcal{H}^*) \\ & \uparrow & & \uparrow \\ \iota : & L & \longrightarrow & H \end{array}$$

**Conséquences** ([6]p.177) :  $L$  est le tiré en arrière de  $H$  :

$$L = \iota^*(H)$$

(voir [6] p.165) :  $S$  est une section holomorphe de  $H$  ssi  $S \in \mathcal{H}$ . (le sens  $\rightarrow$  n'est pas évident). On vérifie que  $S \equiv \iota^*(S)$ .

**Théorème de plongement de Kodaira** (référence : [6] p181,p.191,p.192)

*Si  $L$  est positif, alors  $\exists m_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall m \geq m_0$ ,  $\iota : M \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{H}^{(m)*})$  est un plongement (i.e. bien défini, injectif et différentielles non nulles). On dit que  $L^m$  est un fibré très ample.*

(Conséquences :  $M$  est une variété algébrique, décrite par les zéros de polynômes homogènes dans  $\mathbb{P}(\mathcal{H}^{(m)*})$ , d'après le théorème de Chow, [6]p.167).

### 3.2 Etats cohérents

On suppose maintenant que  $L$  est munit d'une métrique hermitienne  $h$ .

— Soit  $r^* \in L_x^*$ . On note  $|e_{r^*} \rangle \in \mathcal{H}$  (section holomorphe), le anti-dual métrique de  $\iota_{r^*} \in \mathcal{H}^*$  :

$$\langle e_{r^*} | s \rangle = \iota_{r^*}(s) = r^*(s(x)), \quad \forall s \in \mathcal{H}$$

autrement dit,  $|e_{r^*} \rangle$  est orthogonal à l'hyperplan des sections qui s'annulent en  $x$ ; on l'appelle “**état cohérent en  $x \in M$** ”.

— En pratique, si on choisit  $r$  une section holomorphe de  $L$  jamais nulle sur  $U$  (section de référence), on pose  $r^* \in L^*$  sa base duale (i.e.  $r^*(r) = 1$ ), et on notera pour simplifier :

$$|x \rangle = |e_{r^*} \rangle$$

Pour toute section  $s \in \mathcal{H}$ , on a alors la relation :

$$s(x) = \langle x | s \rangle \cdot r(x) \tag{6}$$

la fonction analytique  $b_s(x) = \langle x | s \rangle$  s'appelle **la fonction de Bargmann de  $s$** .

Remarque :  $x \in U \rightarrow |x \rangle \in \mathcal{H}$  est anti-holomorphe.

— Soit

$$P_x = |x \rangle \langle x|$$

avec

$$|x \rangle_n = \frac{|x \rangle}{\sqrt{\langle x | x \rangle}}$$

Alors  $P_x$  est **un projecteur sur l'état cohérent en  $x$** , et ne dépend pas du choix de la section de référence  $r(x)$ .

— Pour une section  $s \in \mathcal{H}$ , sa **représentation de Husimi** sur  $M$  est la fonction positive

$$H_s(x) = \langle s | P_x | s \rangle = |\langle x | s \rangle|^2$$

$H_s(x)$  s'annule au diviseur  $D = (s)$  de  $s$ . Or  $D = (s)$  détermine  $s$  à une constante près (car  $M$  est compacte); donc  $H_s$  détermine aussi  $s$ .

— La métrique  $h$  introduite dans le diagramme 3.1, a pour effet de se “*mordre la queue*”. En effet  $h_x(\cdot, \cdot)$  est une métrique sur la fibre  $L_x$ . Mais  $h$  induit un produit scalaire global sur  $\mathcal{H}$  qui induit une métrique dans les fibres de  $H \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{H}^*)$ . Par tiré arrière de  $\iota$ , on obtient à nouveau une métrique  $h'_x$  sur la fibre  $L_x$ , qui ne coïncide pas avec  $h_x$  à priori. Pour mesurer cette discordance, on définit **la fonction epsilon de Rawnsley**[3]

$$x \in M \longrightarrow \epsilon(x) = \frac{h_x}{h'_x} = h_x h_x^{*'} = h_x(r(x), r(x)) h_U(\iota_{r^*}, \iota_{r^*}) = h(r(x), r(x)) \cdot \langle x | x \rangle \in \mathbb{R}^+$$

Autre interprétation : si on note  $\Omega_{F.S.}$  ( Fubiny-Study) la métrique de Kähler sur  $\mathbb{P}(\mathcal{H}^*)$  induite par  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , on montre que  $\Omega = \iota^*(\Omega_{F.S.}) \Leftrightarrow \epsilon(x) = cste$ . On dit que le plongement de Kodaira est isométrique. (C'est le cas si  $M$  est un espace homogène, lorsque un groupe agit de façon transitive, comme dans la construction des états cohérents de Perelomov [9]).

— **Relation de fermeture** : pour  $s_1, s_2 \in \mathcal{H}$ , on a  $\langle s_1 | s_2 \rangle = \int_{x \in M} h_x(s_1, s_2)(x) \phi(x) = \int \langle s_1 | P_x | s_2 \rangle \epsilon(x) \phi(x)$ , car  $h_x(s_1, s_2) = \langle s_1 | x \rangle \langle x | s_2 \rangle h_x(r, r)$ . Donc

$$Id_{\mathcal{H}} = \int_x P_x \epsilon(x) \phi(x) \tag{7}$$

Par conséquent, si  $\epsilon(x) = cste$ ,  $dim(\mathcal{H}) = \epsilon Vol_{\phi}(M)$ .



### 3.2.1 Exemples (suite)

**Le plan** On montre que les sections holomorphes (de l'Oscillateur Harmonique) notées  $|n\rangle$ ,  $n = 0, 1, \dots$  définies par leur fonction de Bargmann  $\langle z|n\rangle = \frac{z^n}{\sqrt{n!}}$  forment une base o.n (voir [7], p.11). On déduit que  $\langle z'|z\rangle = \sum_n \langle z'|n\rangle \langle n|z\rangle = \exp(z'\bar{z})$ . Alors

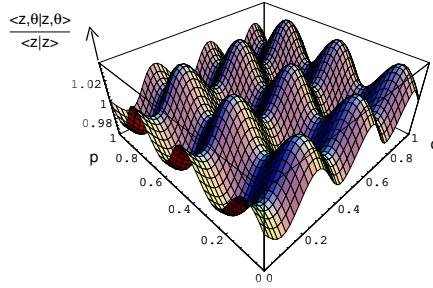
$$|\langle z'|z\rangle|^2 = e^{-|z'-z|^2}$$

montrant la localisation gaussienne des états cohérents sur l'espace des phases. On déduit aussi que  $\epsilon(z) = h(r, r) \cdot \langle z|z\rangle = 1$ .

**Le Tore** Si on note  $|z, \theta\rangle$  un état cohérent du Tore, on a par définition,  $\langle z, \theta|s\rangle = \langle z|s, \theta\rangle = \langle z|P_\theta|s\rangle$  donc

$$|z, \theta\rangle = P_\theta|z\rangle$$

Ainsi la fonction epsilon est  $\epsilon(z) = h(r, r) \langle z, \theta|z, \theta\rangle = \frac{\langle z, \theta|z, \theta\rangle}{\langle z|z\rangle}$ . Cette fonction n'est pas constante comme le montre la figure suivante ([5] p.88), pour  $N = 3$ ,  $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$ . Cette non uniformité révèle la non homogénéité de "l'espace des phase quantique", i.e de  $L \rightarrow M$ .



**La sphère** D'après (6) on a pour toute section holomorphe de  $H^d$ ,  $\langle z|s\rangle = \sum_{i=0}^d a_i z^i$ , . On montre alors que les sections  $|n\rangle$  définies par  $\langle z|n\rangle = z^n \sqrt{C_d^n}$ , forment une base o.n., et on déduit que  $\langle z'|z\rangle = \sum_n \langle z'|n\rangle \langle n|z\rangle = (1 + z'\bar{z})^d$  ( $|n\rangle$  est l'état habituellement noté  $|m\rangle$  de projection du spin sur un axe fixé, avec  $m = n - j = -j \rightarrow +j$ ). Alors  $|\langle z'|z\rangle| = \cos^{2d}(\alpha/2)$ , où  $\alpha$  est l'angle séparant  $z$  et  $z'$  sur la sphère. Cette dernière formule montre la localisation des états cohérents sur la sphère dans la limite  $d \rightarrow \infty$ . La fonction Epsilon est  $\epsilon(z) = h(r, r) \langle z|z\rangle = 1$ .

## 3.3 Quantification de Toeplitz

### 3.3.1 Quantification de Toeplitz

L'espace  $\mathcal{H}$  des sections holomorphes de  $L$  est un sous espace (de dimension finie) de l'espace des sections  $C^\infty$  de  $L$  noté  $A^0(L)$  ou  $\Gamma^\infty$ , munit du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , eq.(2). On notera  $\Pi : \Gamma^\infty \rightarrow \mathcal{H}$  le **projecteur orthogonal sur  $\mathcal{H}$** . Pour  $f \in C^\infty(M)$  (réelle ou complexe), on note  $M_f : \Gamma^\infty \rightarrow \Gamma^\infty$  l'opérateur de multiplication par  $f$  (i.e.  $(M_f s)(x) = f(x)s(x)$ ). Alors l'**opérateur de Toeplitz**  $T_f \in \text{End}(\mathcal{H})$  est défini par

$$T_f = \Pi M_f$$

(" $T_f$  est le quantifié de Toeplitz de l'observable classique  $f$ ").

**Propriétés :**

- $T_1 = Id_{\mathcal{H}}$ ;  $T_{\bar{f}} = (T_f)^+$  donc si  $f$  réelle,  $T_f$  est auto-adjoint.
- On peut écrire, avec eq.(7),  $\Pi = \int_x P_x \epsilon(x) \phi(x)$  sur  $\Gamma^\infty$  et :

$$T_f = \int_{x \in M} f(x) |x \rangle_n \langle x| \epsilon(x) \phi(x)$$

- $T : C^\infty(M) \rightarrow End(\mathcal{H})$  est surjective. ([10] p.7).
- En général,  $T_{fg} \neq T_f T_g$ , et  $iT_{\{f,g\}} \neq [T_f, T_g]$ .

**3.3.2 Symbole de Berezin**

Le **symbole covariant de Berezin** est  $\sigma : End(\mathcal{H}) \rightarrow C^\infty(M)$  définit par

$$\sigma(\hat{f})(x) = {}_n \langle x | \hat{f} | x \rangle_n, \quad \text{pour } \hat{f} \in End(\mathcal{H}), \quad x \in M$$

**Propriété :**  $\sigma$  est injective ([1] p.8).

**Composition de symboles :** on définit  $*$  par

$$\sigma(\hat{f}) * \sigma(\hat{g}) = \sigma(\hat{f}\hat{g})$$

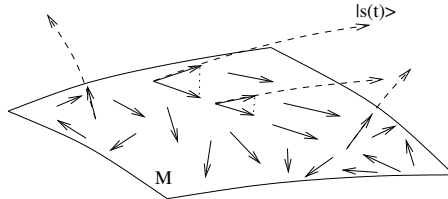
On peut aussi définir  $*$  sur  $C^\infty(M)$  par

$$f * g = \sigma(T_f T_g)$$

(\* est associatif, et devient est une “quantification par déformation” dans la limite semi-classique  $m \rightarrow \infty$ , voir [10]).

**3.3.3 Signification géométrique du symbole de Berezin**

Soit  $\hat{f} \in End(\mathcal{H})$  auto-adjoint. L'équation de Schrödinger  $i\partial_t |s(t)\rangle = \hat{f} |s(t)\rangle$  définit un flot dans le projectif  $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ . Considérons un point  $x$  du projectif sur le plongement de  $M : x \in \iota(M)$ ; c'est un état cohérent  $[|x\rangle] \in \mathbb{P}(\mathcal{H})$ . En tout point  $x \in \iota(M)$ , on projette orthogonalement le vecteur vitesse du flot de Schrödinger sur  $\iota(M)$ . Il est montré dans [5], que le champ de vecteur ainsi obtenu sur  $M$  est le champ de vecteur Hamiltonien  $X_f$  eq.(1), généré par le Hamiltonien classique  $f(x) = \sigma(\hat{f})(x) = {}_n \langle x | \hat{f} | x \rangle_n$  (résultat naturel). Noter que l'angle de la projection renseigne sur la validité de l'approximation classique.



**3.3.4 Relation avec la quantification géométrique de Kostant-Souriau-Kirillov**

Pour  $f \in C^\infty(M)$ , l'opérateur de préquantification  $P : C^\infty(M) \rightarrow End(\Gamma^\infty)$  est définit par

$$P_f = -iD_{X_f} + f$$

avec  $X_f$  définit par eq.(1).

**Propriété :**  $iP_{\{f,g\}} = [P_f, P_g]$ . Cette relation appelé **principe de correspondance**, fait l'intérêt de cette définition.

Mais l'espace des section  $C^\infty$  est trop vaste. Pour cette raison, on définit :

$$Q_f = \Pi P_f \Pi \in \text{End}(\mathcal{H})$$

En général  $iQ_{\{f,g\}} \neq [Q_f, Q_g]$ . Par contre cette **quantification est équivalente à celle de Toeplitz**, dans le sens où :

**Relation de Tuynmann ([11], voir aussi [2] p223) :**

$$Q_f = T_{f-\frac{1}{2}\Delta f}$$

où  $\Delta f$  est le Laplacien associé à la métrique  $g$  sur  $M$ .

démonstration : Il faut montrer que  $\forall s_1, s_2 \in \mathcal{H}$ ,  $\int h(s_1, D_{X_f} s_2) \phi(x) = \frac{i}{2} \int h(s_1, s_2) \Delta f \phi(x)$ . Pour cela on pose  $X^+ = \frac{1}{2}(X_f - iJX_f) \in T^+M$  vecteur de type  $(1,0)$ . Alors par la compatibilité de  $D$  avec  $h$ , puis par intégration par parties, on a :  $\int h(s_1, D_{X_f} s_2) \phi(x) = \int dh(s_1, s_2) X^+ \phi = - \int h(s_1, s_2) \text{div}(X^+) \phi$ . Or  $JX_f = \text{grad}(f)$  et  $\text{div}(X_f) = 0$  (théorème de Liouville); d'où le résultat.  $\diamond$

### 3.3.5 Exemples

**Le plan** On a  $\langle z | T_z | n \rangle = \frac{z^{n+1}}{\sqrt{n!}} = \sqrt{n+1} \langle z | n+1 \rangle$  donc  $T_z$  et  $T_{\bar{z}}$  sont les opérateurs de création et annihilation habituels ( $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{q} + i\hat{p})$ ) :

$$T_z = a^+, \quad T_{\bar{z}} = a$$

On observe que

$$T_{\bar{z}}^n T_z^m = (T_{\bar{z}})^n (T_z)^m = a^n a^+{}^m$$

montrant que la quantification de Toeplitz correspond à la quantification dite **Anti-Wick** ou **anti-normale**, où "on met les  $a$  à gauche des  $a^+$ " [12].

Le symbole de Berezin est  $\sigma(a^+{}^m a^n) = \langle z | a^+{}^m a^n | z \rangle = z^m \bar{z}^n$ , montrant que son inverse est la quantification dite **Wick** ou **Normale**, où "on met les  $a$  à droite des  $a^+$ " [12].

La **quantification de Weyl** (dite symétrique) est reliée aux précédentes par lissage (voir [7] p.51) :  $Q_{\text{Weyl}}(e^{\frac{1}{2}\Delta f}) = T_f$ .

Les opérateurs  $(a, a^+, Id)$  génèrent l'algèbre de Weyl, et l'opérateur

$$T(\lambda) = \exp(\bar{\lambda}a^+ - \lambda a) \tag{8}$$

est un opérateur unitaire qui donne  $T(\lambda)|z \rangle_n = e^{i\Im(\bar{\lambda}z)}|z + \lambda \rangle_n$ , et donc translate de  $\lambda$  les sections holomorphes dans l'espace de phase.

On obtient aussi :  $|z \rangle = e^{\bar{z}a^+}|0 \rangle$  qui sert de définition des états cohérents du plan [9], (avec  $|0 \rangle = |z = 0 \rangle = |r \rangle$ ).

**La sphère** Pour faire le rapprochement avec la construction des états cohérents de groupe  $SU(2)$  ([9],[12]) : les opérateurs  $J_0, J_+, J_-$  définis par  $J_0|n \rangle = (n - \frac{d}{2})|n \rangle$ ,  $J_+|n \rangle = \sqrt{(d-n)(n+1)}|n+1 \rangle$ ,  $J_- = (J_+)^+$ , sont des représentations irréductibles des générateurs de l'algèbre de Lie  $su(2)$ . Une écriture usuelle des états cohérents est  $|z \rangle = e^{\bar{z}J_+}|0 \rangle$  (avec  $|0 \rangle = |z = 0 \rangle = |r \rangle$ ).

Voici la quantification de Toeplitz des opérateurs précédents ([9]p.65) :

$$\begin{aligned} f(\theta, \varphi) &= \left(\frac{d}{2} + 1\right) \cos \theta, \quad \implies \quad T_f = J_0 \\ f(\theta, \varphi) &= \left(\frac{d}{2} + 1\right) \sin \theta e^{+i\varphi}, \quad \implies \quad T_f = J_+ \end{aligned}$$

et leur symbole de Berezin :

$$\begin{aligned}\sigma(J_0) &= \frac{d}{2} \cos \theta \\ \sigma(J_+) &= \frac{d}{2} \sin \theta e^{i\varphi}\end{aligned}$$

## 4 Limite semi-classique

(paragraphe très incomplet).

Comme le suggère eq.(4), la limite semi-classique consiste à considérer le fibré très ample  $L^m = L^{\otimes m}$ , dans la limite  $m \rightarrow +\infty$ .

On a alors les relations suivantes donnant “le principe de correspondance” ([10] oct 99, p.6) :

$$\begin{aligned}\|T_f\| &\rightarrow \|f\|_\infty \\ \|m [T_f, T_g] - iT_{\{f,g\}}\| &= O\left(\frac{1}{m}\right)\end{aligned}$$

Les états cohérents deviennent localisés sur l’espace de phase :

$$\langle e_x | e_y \rangle = O(m^{-\infty}), \quad \text{si } x \neq y$$

M.Schlichenmaier [10], et Laurent Charles [4] montrent que l’on obtient **une quantification par déformation**. Le sens géométrique de chaque terme de la série formelle est identifié.

## 5 Perspectives

Il ressort de cette approche que l’espace de phase classique  $M$  est une sous variété projective non dégénérée (i.e. non contenue dans un hyperplan) du projectif  $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ .

Une démarche opposée à l’approche conventionnelle suivie dans cet exposé, et qui correspondrait peut être plus à certaines problématiques rencontrées en physique, serait de partir d’un problème quantique : un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ , avec une dynamique spécifiée par un opérateur Hamiltonien  $\hat{f}$ , et de trouver “la meilleure” approximation classique associée, i.e. une sous variété projective  $M$  qui minimiserait un critère géométrique, comme celui de suivre au mieux le flot quantique, voir [5].

## Références

- [1] Martin Bordemann, Eckhard Meinrenken, and Martin Schlichenmaier. Toeplitz quantization of Kaehler manifolds and  $gl(N)$ ,  $N \rightarrow \infty$  limits. *Commun. Math. Phys.*, 165(2) :281–296, 1994.
- [2] Bordemann, Martin and Hoppe, Jens and Schaller, Peter and Schlichenmaier, Martin.  $gl(\infty)$  and geometric quantization. *Commun. Math. Phys.* 138, No.2, 209-244, 1991.
- [3] Cahen, Michel and Gutt, Simone and Rawnsley, John. Quantization of Kaehler manifolds. II. *Trans. Am. Math. Soc.* 337, No.1, 73-98, 1993.
- [4] Charles, Laurent. These en cours. 2000.
- [5] F. Faure. Approche géométrique de la limite semi-classique par les états cohérents et mécanique quantique sur le tore. *Thesis of the university Joseph Fourier , Grenoble, 93 -112, http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~faure*, 1993.
- [6] Griffiths, Phillip and Harris, Joseph. *Principles of algebraic geometry*. A Wiley-Interscience Publication. New York, 1978.

- [7] B. Hall. Holomorphic Methods in Mathematical Physics. *Contemp. Math.*, 260 :1–59, 1999.
- [8] M. Nakahara. *Geometry, topology and physics*. Institute of Physics Publishing, 2003.
- [9] A. Perelomov. *Generalized coherent states and their applications*. Springer-Verlag., 1986.
- [10] Schlichenmaier, Martin. . *e-prints* : QA/9902066 QA/9910137 QA/9903105, 1999.
- [11] Tuynman, G.M. . Quantization : Towards a comparison between methods. *J. Math. Phys.* 28, 2829-2840, 1987.
- [12] W. M. Zhang, D. H. Feng, and R. Gilmore. Coherent states : theory and some applications. *Rev. Mod. Phys.*, 62 :867, 1990.
- [13] R.O. Wells. *Differential analysis on complex manifolds*. Springer-Verlag, 1980.
- [14] N.M.J. Woodhouse. *Geometric quantization*. Clarendon Press, Oxford, 1992.