

---

Cours de  
Systèmes dynamiques, chaos et applications.

Frédéric Faure

Université Grenoble Alpes, France  
frederic.faure@univ-grenoble-alpes.fr

Master de Physique M1  
(version : 9 octobre 2017)

---

[http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~faure/enseignement/systemes\\_dynamiques](http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~faure/enseignement/systemes_dynamiques)

# Table des matières

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduction</b>   | <b>7</b>  |
| 1.1      | Introduction . . . . .  | 7         |
| 1.1.1    | Le problème de prédiction . . . . .                                   | 7         |
| 1.1.2    | Le problème inverse ou problème de découverte des lois. Modélisation. | 10        |
| 1.1.3    | Plan du cours . . . . .   | 11        |
| 1.2      | Modèle du pendule . . . . .   | 15        |
| 1.2.1    | Equation de mouvement de Newton (1687) . . . . .                      | 15        |
| 1.2.2    | Résolution numérique de l'EDO (1.2.3) par la méthode de Euler (1768)  | 16        |
| 1.2.3    | Interprétation géométrique d'une E.D.O. comme champ de vecteur        | 20        |
| 1.2.4    | Théorème fondamental qui garantit les solutions aux EDO . . . . .     | 21        |
| 1.2.5    | Section de Poincaré (1892) . . . . .                                  | 23        |
| 1.2.6    | Systèmes physiques reliés au modèle du pendule . . . . .              | 26        |
| 1.3      | L'application logistique (1838,1985) . . . . .                        | 26        |
| 1.3.1    | Définition . . . . .  | 26        |
| 1.3.2    | Observations . . . . .  | 27        |
| 1.3.3    | Ensemble de Mandelbrot (1980) . . . . .                               | 30        |
| 1.3.4    | L'ensemble de Julia (1918) . . . . .                                  | 32        |
| 1.4      | Billard de Sinaï (1970) . . . . .                                     | 33        |
| 1.4.1    | Le billard rectangulaire . . . . .                                    | 33        |
| 1.4.2    | Billard dispersif de Sinaï (1970) . . . . .                           | 34        |
| 1.4.3    | Systèmes physiques reliés au modèle de l'application logistique . . . | 36        |
| 1.5      | Dynamique spatio-temporelle . . . . .                                 | 37        |
| 1.5.1    | Modèle de Belousov-Zhabotinsky (1950) . . . . .                       | 37        |
| 1.5.2    | Interprétation du modèle en chimie . . . . .                          | 39        |
| <b>2</b> | <b>Applications et champ de vecteurs</b>                              | <b>41</b> |
| 2.1      | Applications . . . . .  | 41        |
| 2.2      | Champ de vecteur . . . . .  | 41        |
| 2.2.1    | Champ de vecteur, équations du mouvement, flot . . . . .              | 41        |
| 2.2.2    | Point fixe . . . . .  | 41        |
| 2.2.3    | Variétés stables et instables d'un point fixe hyperbolique . . . . .  | 43        |
| 2.2.4    | Flot conservatifs et dissipatifs . . . . .                            | 43        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| <b>3</b> | <b>Dynamique Hamiltonienne, Billards et flot géodésique</b>   | <b>45</b>  |
| 3.1      | Équations de mouvement : . . . . .  | 45         |
| 3.2      | Exemples . . . . .  | 47         |
| 3.3      | Particule libre sur une surface (ou espace courbe), géodésiques . . . . .   | 52         |
| 3.3.1    | Equation des géodésiques sur une surface $\mathcal{S} = u^{-1}(C) \subset \mathbb{R}^3$ à partir d'une fonction $u$ . . . . . | 53         |
| 3.3.2    | Les géodésiques comme trajectoires Hamiltoniennes sur une variété Riemannienne . . . . .                                      | 54         |
| 3.4      | Du flot géodésique au billard . . . . .   | 55         |
| 3.5      | Flot Hamiltonien et crochets de Poisson . . . . .   | 56         |
| <b>4</b> | <b>Dynamique de champs et morphogénèse</b>  | <b>59</b>  |
| 4.1      | Modèle à une dimension et une composante . . . . .  | 59         |
| 4.1.1    | Modèle de Swift-Hohenberg . . . . .   | 59         |
| 4.1.2    | Analyse de la stabilité d'une solution homogène stationnaire . . . . .  | 61         |
| 4.1.3    | Stabilité du motif. Etude non linéaire. . . . .   | 64         |
| 4.1.4    | Simulation numérique . . . . .  | 65         |
| 4.2      | Modèle de réaction-diffusion à deux composantes . . . . .   | 65         |
| 4.2.1    | Modèle . . . . .  | 65         |
| 4.2.2    | Interprétation des équations du modèle de Gray Scott . . . . .  | 66         |
| 4.2.3    | Analyse de la stabilité d'une solution homogène stationnaire . . . . .  | 67         |
| 4.3      | Motifs périodiques et quasi-périodiques en dimension $\geq 2$ . . . . .   | 74         |
| 4.3.1    | Exemples en dimension 2 . . . . .   | 75         |
| 4.3.2    | Motif périodique et quasi-périodique . . . . .  | 76         |
| 4.4      | Motifs par segregation ou avalanches . . . . .  | 82         |
| 4.5      | Ondes solitaires ou Solitons . . . . .  | 84         |
| 4.5.1    | Historique . . . . .  | 85         |
| 4.5.2    | Du modèle des oscillateurs non linéaires à l'équation de KdV . . . . .  | 86         |
| 4.5.3    | Solution de l'équation KdV à profil constant . . . . .  | 92         |
| <b>5</b> | <b>Dynamique probabiliste de Markov</b>   | <b>95</b>  |
| 5.1      | Exemples introductifs . . . . .   | 95         |
| 5.1.1    | Modèle de dynamique sur un graphe . . . . .   | 95         |
| 5.1.2    | Utilisation de graphe et matrices stochastique en génétique . . . . .   | 100        |
| 5.2      | Définitions et propriétés générales . . . . .   | 100        |
| 5.2.1    | Matrices positives, irréductibles, primitives . . . . .   | 100        |
| 5.2.2    | Matrices stochastiques . . . . .  | 104        |
| 5.2.3    | Matrices réversibles ou principe de la balance détaillée . . . . .  | 109        |
| 5.3      | Processus à temps continu . . . . .   | 112        |
| <b>6</b> | <b>Dynamique déterministe expansive et théorie ergodique</b>  | <b>116</b> |
| 6.1      | Introduction . . . . .  | 116        |
| 6.2      | Modèle de dynamique expansive . . . . .   | 116        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 6.2.1    | Étude d'un exemple simple . . . . .  | 119        |
| 6.3      | (*) Stabilité structurelle . . . . .   | 120        |
| 6.4      | (*) Dynamique symbolique . . . . .   | 122        |
| 6.5      | Opérateur de transfert . . . . .   | 123        |
| 6.6      | Mélange, ergodicité, mesure d'équilibre . . . . .                                      | 125        |
| 6.6.1    | Fonction de corrélation et mélange exponentiel . . . . .                               | 125        |
| 6.6.2    | Exemples numériques d'évolution de densité et de mesures d'équilibre                   | 127        |
| 6.6.3    | (*) Ergodicité . . . . .   | 127        |
| <b>7</b> | <b>Dynamique déterministe hyperbolique et théorie ergodique</b>                        | <b>129</b> |
| 7.1      | Introduction . . . . .   | 129        |
| 7.1.1    | Billard dispersif de Sinai et instabilité hyperbolique . . . . .                       | 130        |
| 7.1.2    | Flot géodésique sur une surface à courbure négative . . . . .                          | 131        |
| 7.2      | Instabilité hyperbolique d'Anosov . . . . .  | 134        |
| 7.2.1    | Espace des phases et couche d'énergie . . . . .  | 134        |
| 7.2.2    | Définition de Flot Hyperbolique ou sensibilité aux conditions initiales                | 135        |
| 7.3      | Opérateur de transfert de Perron Frobenius et transport de probabilités . .            | 139        |
| 7.4      | Ergodicité et mélange . . . . .  | 140        |
| 7.4.1    | Un flot géodésique hyperbolique est mélangeant (et ergodique) . . .                    | 140        |
| 7.4.2    | Modèle simple du « cat map » qui est mélangeant (et ergodique) . .                     | 142        |
| 7.5      | Théorème central limite et diffusion . . . . .   | 144        |
| <b>8</b> | <b>L'attracteur étrange de Lorenz</b>  | <b>146</b> |
| 8.1      | Modèle de Lorenz pour l'hydrodynamique. Cellules de convection de Bénard               | 146        |
| 8.1.1    | Convection et hydrodynamique . . . . .   | 146        |
| 8.1.2    | Modèle simplifié de Rayleigh . . . . .   | 148        |
| 8.1.3    | Approximation de Lorenz sur quelques modes de Fourier. Equations<br>de Lorenz. . . . . | 153        |
| 8.1.4    | De retour au mouvement du fluide . . . . .   | 157        |
| 8.2      | Le moulin de Lorenz . . . . .  | 157        |
| 8.2.1    | Modélisation physique et équations de Lorenz . . . . .                                 | 158        |
| 8.2.2    | Preuve de la Proposition 8.2.2 . . . . .   | 160        |
| 8.3      | Etude des équations de mouvement de Lorenz . . . . .                                   | 166        |
| 8.3.1    | Points fixes et leur stabilité . . . . .   | 166        |
| 8.3.2    | Variétés stables et instables du point fixe 0 . . . . .                                | 170        |
| 8.3.3    | Contraction du flot de Lorenz et existence d'un attracteur . . . . .                   | 170        |
| 8.3.4    | Modèle géométrique du flot de Lorenz . . . . .   | 172        |
| 8.3.5    | Modèle linéaire simplifié . . . . .  | 175        |
| 8.3.6    | Cantor et dimension fractale . . . . .   | 176        |
| 8.4      | Mesure d'équilibre de Sinai-Ruelle-Bowen (SRB, 1976). Ergodicité. . . . .              | 178        |
| 8.5      | Mélange . . . . .  | 180        |
| 8.6      | Théorème central limite . . . . .  | 182        |
| 8.6.1    | Processus aléatoire de « pile ou face » et théorème central limite . . .               | 182        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 8.6.2    | Théorème central limite pour le flot de Lorenz . . . . .  | 184        |
| <b>A</b> | <b>Formulaire</b>   | <b>187</b> |
| A.1      | Algèbre linéaire . . . . .                                | 187        |
| A.1.1    | Forme normale de Jordan et diagonalisation . . . . .      | 187        |
| A.1.2    | Diagonalisation d'une matrice $2 \times 2$ . . . . .      | 189        |
| <b>B</b> | <b>Solution des exercices</b>                             | <b>191</b> |
| <b>C</b> | <b>Programmes d'illustration en langage python et C++</b> | <b>192</b> |
| C.1      | Programmes en langage python . . . . .                    | 192        |
| C.2      | Programmes en langage C++ . . . . .                       | 192        |

**Notes :**

- Les marques @@ signifient que le passage n'est pas terminé.
- La marque (\*) signifie que ce passage peut être sauté en première lecture et sera probablement sauté en cours.
- Notations : le signe := signifie une définition. Par exemple  $A := \sin(x)$ .

**Animations sur la page web :** il y a de nombreuses animations qui illustrent chaque parties du cours sur la page web :

[http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~faure/enseignement/systemes\\_dynamiques](http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~faure/enseignement/systemes_dynamiques)

**Références** On recommande la consultation de Wikipedia pour plus de renseignements.

## Annexe C

# Programmes d'illustration en langage python et C++

C.1 Programmes en langage python

C.2 Programmes en langage C++

# Index

## A

algorithme de montecarlo, 110  
Anosov, 129, 135  
application de Poincaré, 23, 173  
application logistique, 26  
application quadratique, 31  
attracteur, 20  
attracteur étrange, 32  
attracteur étrange de Lorenz, 172

## B

Belousov-Zhabotinsky, 37  
bifurcation, 29  
billard de Sinai, 130  
Billard dispersif de Sinai, 34  
billard rectangulaire, 33  
blocs de Jordan, 187  
Box counting dimension, 177

## C

cat map, 142  
catalyseur, 39  
coefficient d'instabilité de Lyapounov, 135, 137  
connexion de Levi-Civita, 52, 133  
conservatif, 43, 140, 170  
convection thermique, 146  
couche d'énergie, 134  
courbe Hölder continue, 32  
crochet de Poisson, 57  
cycle limite attractif, 20

## D

dérivée covariante, 52, 133  
diagonalisable, 188  
dimension fractale de Minkowski, 177

direction instable, 135  
direction neutre, 135  
direction stable, 135  
dissipatif, 43, 170  
distribution de Boltzmann, 110  
distribution de Gibbs, 110  
dynamique symbolique, 122, 176

## E

E.D.O., 16  
énergie, 57  
énergie cinétique, 46  
énergie potentielle, 46  
ensemble de Cantor, 32  
ensemble de Julia, 32  
ensemble de Julia plein, 32  
ensemble de Mandelbrot, 30  
ensemble répulsif, 32  
entropie, 36, 131  
équation de Burgers, 94  
équation de diffusion de la chaleur, 149  
équation de KdV, 89  
équation de Lotka Volterra, 24  
équation d'évolution, 112  
équation différentielle ordinaire, 16  
équation KdV, 85  
Équations de Hamilton, 46  
équations de Lorenz, 154, 160, 164, 166  
équations de mouvement de Fermi-Pasta-Ulam, 88  
équations de Navier Stokes, 149  
équations de Saltzman, 150  
ergodicité, 141  
ergodique, 101, 127, 142  
espace des phases, 46  
état d'équilibre, 99, 106



évolution à temps continu, 112  
 évolution effective, 36, 131  
 expansif, 43, 170  
 expansive, 117

**F**

flot, 16, 41, 166  
 flot géodésique, 133  
 fonction de corrélation dynamique, 125  
 force, 46  
 force potentielle, 46  
 forme symplectique, 58  
 fractale, 32, 177

**G**

générateur, 112  
 géodésique, 52, 133  
 géométrie symplectique, 58  
 gradient symplectique, 152

**H**

Hamiltonien, 46

**I**

impulsion, 46  
 instabilité de Rayleigh (1916)-Bénard (1901),  
 146  
 irréductible, 101

**L**

l'attracteur étrange, 146  
 Le Brusselator, 73  
 le passage à un modèle continu, 89  
 Le problème à deux corps, 48  
 Loi de Benford, 51  
 Loi de Newton, 46  
 loi d'évolution déterministe, 17  
 loi probabiliste, 7

**M**

marche aléatoire, 182  
 matrice d'adjacence, 97  
 matrice hyperbolique, 137  
 matrice stochastique, 97  
 mécanique classique, 45

mélangeant, 141  
 mélangeant à taux super-exponentielle, 143  
 mélangeante, 102, 180  
 mélangeante à taux exponentiel, 126  
 mesure d'équilibre, 126, 142  
 mesure d'équilibre de Sinai-Ruelle-Bowen, 178  
 mesure naturelle, 126  
 mesure physique, 126  
 mesure SRB, 126  
 méthode de Euler, 17  
 méthode des images, 33  
 mode de Fourier, 50, 144  
 modèle de Gray-Scott, 66  
 modèle de Jukes-Cantor, 100  
 modèle du Brusselator, 66  
 mouvement Brownien, 182

**N**

nombre de Prandtl, 150  
 nombre de Rayleigh, 150  
 normale de Jordan, 187

**O**

ondes solitaires, 84  
 opérateur de composition, 123  
 opérateur de Liouville, 57  
 opérateur de Perron-Frobenius, 125, 139  
 opérateur de Ruelle, 125, 139  
 opérateur de transfert, 123  
 opérateur d'évolution, 112  
 opérateur stochastique, 125, 139  
 orbite périodique attractive, 20  
 oscillateur harmonique, 49

**P**

partition de Markov, 122  
 position d'une particule, 45  
 positive, 100  
 primitive, 102  
 principe d'équivalence, 48  
 principe d'incertitude, 138  
 processus stochastique, 183  
 projecteur spectral, 188

**R**

relativité générale, 45  
relativité restreinte, 45  
Runge Kutta d'ordre 4, 17

**S**

section de Poincaré, 23  
sensibilité aux conditions initiales, 116, 117,  
129, 175  
spatio-temporelle, 37  
spectre, 187  
Stabilité structurelle, 121  
suite de Syracuse, 9  
système dynamique, 17  
systèmes intégrables, 47

**T**

tenseur métrique, 55  
Théorème central limite, 145  
Théorème central limite pour des variables  
aléatoires, 184  
théorème de Fourier, 61  
Théorème d'équidistribution de Kronecker-  
Weyl, 50  
trajectoire, 117  
trajectoire de la particule, 45

**U**

une loi déterministe, 7  
uniformément hyperbolique, 129  
uniquement ergodique, 50

**V**

valeur propre, 187  
vecteur cotangent, 55  
vecteurs tangents, 55

# Bibliographie

- [1] Mark J Ablowitz and Harvey Segur. *Solitons and the inverse scattering transform*, volume 4. SIAM, 1981.
- [2] D. Anosov. Geodesic flows on compact riemannian manifolds of negative curvature. *Proceedings of the Steklov Mathematical Institute*, 90 :1 :1–235, 1967.
- [3] V.I. Arnold. *Les méthodes mathématiques de la mécanique classique*. Ed. Mir. Moscou, 1976.
- [4] Franck Boyer and Pierre Fabrie. *Mathematical tools for the study of the incompressible Navier-Stokes equations and related models*, volume 183. Springer Science & Business Media, 2012.
- [5] M. Brin and G. Stuck. *Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 2002.
- [6] N. Chernov and R. Markarian. *Chaotic billiards*. Number 127. American Mathematical Soc., 2006.
- [7] Y. Coudène. *Théorie ergodique et systèmes dynamiques*. EDP sciences, 2013.
- [8] Michael Cross and Henry Greenside. *Pattern formation and dynamics in nonequilibrium systems*. Cambridge University Press, 2009.
- [9] E.B. Davies and E.B. Davies. *Spectral theory and differential operators*, volume 42. Cambridge Univ Pr, 1996.
- [10] Robert L Devaney, Luke Devaney, and Luke Devaney. *An introduction to chaotic dynamical systems*, volume 13046. Addison-Wesley Reading, 1989.
- [11] D. Dolgopyat. On decay of correlations in Anosov flows. *Ann. of Math. (2)*, 147(2) :357–390, 1998.
- [12] L. Euler, A.P. Juskevici, and R. Taton. *Correspondance de Leonhard Euler Avec A. C. Clairaut, J. D’Alembert Et J. L. Lagrange*. Commercium epistolicum. Birkhäuser Basel, 1980.
- [13] K.J. Falconer. *Fractal geometry : mathematical foundations and applications*. John Wiley & Sons Inc, 2003.
- [14] F. Faure. *Cours de géométrie et topologie pour la physique pour Master M2 de physique*. [http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~faure/enseignement](http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~faure/enseignement), 2010.

- [15] F. Faure. *Cours de Mathématiques pour la physique. Niveau Master 1.* <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~faure/enseignement>, 2010.
- [16] F. Faure and N. Roy. Ruelle-Pollicott resonances for real analytic hyperbolic map. *Nonlinearity*. *link*, 19 :1233–1252, 2006.
- [17] F. Faure, N. Roy, and J. Sjöstrand. A semiclassical approach for Anosov diffeomorphisms and Ruelle resonances. *Open Math. Journal*. *link*, 1 :35–81, 2008.
- [18] F. Faure and J. Sjöstrand. Upper bound on the density of Ruelle resonances for Anosov flows. a semiclassical approach. *Comm. in Math. Physics, Issue 2*. *link*, 308 :325–364, 2011.
- [19] V. Guillemin and S. Sternberg. *Geometric asymptotics*. Amer Mathematical Society, 1990.
- [20] V. Guillemin and S. Sternberg. *Symplectic techniques in physics*. Cambridge Univ Pr, 1990.
- [21] Etienne Guyon, Jean-Pierre Hulin, and Luc Petit. *Hydrodynamique physique*. Edp Sciences, 2001.
- [22] Leys J., Ghys E., and Alvarez A. *Chaos. Videos*. <http://www.chaos-math.org/fr>.
- [23] Lev Davidovitch Landau and Evgenii Mikhailovich Lifchitz. *Physique théorique. tome vi, mécanique des fluides*. 1971.
- [24] C. Liverani. On contact Anosov flows. *Ann. of Math. (2)*, 159(3) :1275–1312, 2004.
- [25] Andrew J Majda and Andrea L Bertozzi. *Vorticity and incompressible flow*, volume 27. Cambridge University Press, 2002.
- [26] D McDuff and D Salamon. *Introduction to symplectic topology, 2nd edition*. clarendon press, Oxford, 1998.
- [27] Michel Peyrard. *Physique des solitons*. EDP Sciences, 2012.
- [28] D. Ruelle. *Hasard et chaos*. Odile Jacob, 1991.
- [29] D. Ruelle. *Turbulence, strange attractors, and chaos*. World Scientific Series on Non-linear Science. Series A. 16. Singapore : World Scientific, 1995.
- [30] A. Cannas Da Salva. *Lectures on Symplectic Geometry*. Springer, 2001.
- [31] M. Taylor. *Partial differential equations, Vol I*. Springer, 1996.
- [32] M. Taylor. *Partial differential equations, Vol II*. Springer, 1996.
- [33] M. Tsujii. Quasi-compactness of transfer operators for contact Anosov flows. *Nonlinearity, arXiv :0806.0732v2 [math.DS]*, 23(7) :1495–1545, 2010.
- [34] M. Tsujii. Contact Anosov flows and the fourier–bros–iagolnitzer transform. *Ergodic theory and dynamical systems*, 32(06) :2083–2118, 2012.
- [35] Alan Mathison Turing. The chemical basis of morphogenesis. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London B : Biological Sciences*, 237(641) :37–72, 1952.
- [36] N.M.J. Woodhouse. *Geometric quantization*. Clarendon Press, Oxford, 1992.

**#script qui selectionne les chapitres pour faire des fichiers pdf individuels.**

```
pdftk cours_chaos.pdf cat 1-6 192-end output cours_table_materies.pdf
pdftk cours_chaos.pdf cat 7-39 output cours_intro.pdf
pdftk cours_chaos.pdf cat 59-94 output cours_morphogenese.pdf
pdftk cours_chaos.pdf cat 146-186 output cours_lorenz.pdf
pdftk cours_chaos.pdf cat 45-58 output cours_hamilton.pdf
pdftk cours_chaos.pdf cat 129-145 output cours_dynamique_hyperbolique.pdf
pdftk cours_chaos.pdf cat 95-115 output cours_Markov.pdf
pdftk cours_chaos.pdf cat 116-128 output cours_dynamique_expansive.pdf
pdftk cours_chaos.pdf cat 187-190 output cours_annexe.pdf
pdftk cours_chaos.pdf cat 190-192 output cours_solutions.pdf
pdftk cours_chaos.pdf cat 191-191 output cours_programmes.pdf
pdftk cours_chaos.pdf cat 1-190 192-end output cours_complet_sans_solutions.pdf
```