
Cours de Systèmes dynamiques, chaos et applications.

Frédéric Faure

Université Grenoble Alpes, France
frederic.faure@univ-grenoble-alpes.fr

Master de Physique M1
(version : 5 novembre 2018)

Table des matières

1	Introduction	9
1.1	Introduction	9
1.1.1	Le problème de prédiction	9
1.1.2	Le problème inverse ou problème de découverte des lois. Modélisation.	11
1.1.3	Hasard et déterminisme	14
1.1.4	Plan du cours	14
1.2	Modèle du pendule	17
1.2.1	Equation de mouvement de Newton (1687)	17
1.2.2	Résolution numérique de l'EDO (1.2.3) par la méthode de Euler (1768)	18
1.2.3	Section de Poincaré (1892)	22
1.2.4	Systèmes physiques reliés au modèle du pendule	24
1.3	L'application logistique (1838,1985)	25
1.3.1	Définition	25
1.3.2	Observations	26
1.3.3	Ensemble de Mandelbrot (1980)	29
1.3.4	L'ensemble de Julia (1918)	31
1.4	Billard de Sinaï (1970)	32
1.4.1	Le billard rectangulaire	32
1.4.2	Billard dispersif de Sinaï (1970)	34
1.4.3	Systèmes physiques reliés au modèle du billard dispersif	36
1.5	Dynamique spatio-temporelle	37
1.5.1	Modèle de Belousov-Zhabotinsky (1950)	37
1.5.2	Interprétation du modèle en chimie	39
2	Applications et champ de vecteurs	41
2.1	Applications	41
2.1.1	Définitions et exemples	41
2.1.2	Rappels sur la différentielle	43
2.1.3	Applications conservatives ou dissipatives	43
2.1.4	Opérateur de transfert	45
2.1.5	Point fixe et stabilité	48
2.2	Champ de vecteur	51
2.2.1	Définitions : champ de vecteur, équations du mouvement, flot	51

2.2.2	Flot conservatifs et dissipatifs	52
2.2.3	Opérateur de transfert	54
2.2.4	(*)Théorème fondamental qui garantit les solutions aux EDO	57
2.2.5	Point fixe et stabilité	59
3	Dynamique Hamiltonienne, Billards et flot géodésique	63
3.1	Équations de mouvement de la mécanique	63
3.2	Exemples	65
3.3	Flot Hamiltonien et crochets de Poisson	67
3.4	Particule libre dans l'espace Euclidien. Translation sur le tore et billards	69
3.4.1	Particule libre sur le cercle S^1 ou le tore \mathbb{T}^d	70
3.5	Particule libre sur une surface (ou espace courbe). Géodésiques	74
3.5.1	Du flot géodésique au billard	76
3.6	Billards	77
3.7	Apparition du chaos dans un billard circulaire déformé	85
3.7.1	Modèle étudié	86
3.7.2	Billard circulaire ($a = 0$)	87
3.7.3	Billard légèrement déformé ($a = 0.02$)	88
3.7.4	Billard plus déformé ($a = 0.05$)	89
3.7.5	Billard déformé ($a = 0.1 - 0.2$)	90
3.8	Exemples de perturbation de modèles intégrables, apparition du chaos Hamiltonien, avec $d = 2$ degrés de liberté	92
3.8.1	L'application standard ("standard map")	92
3.8.2	Le pendule magnétique	93
3.8.3	Le problème à trois corps réduit	93
4	Dynamique probabiliste de Markov	95
4.1	Définitions et propriétés générales	95
4.1.1	Loi d'évolution sur un graphe	95
4.1.2	Exemples et quelques questions	96
4.1.3	Matrices positives, ergodiques, mélangeantes	100
4.1.4	Matrices stochastiques	105
4.1.5	Matrices réversibles ou principe de la balance détaillée	110
4.2	Processus à temps continu	113
5	Dynamique déterministe expansive et théorie ergodique	117
5.1	Introduction	117
5.2	Modèle de dynamique expansive	117
5.2.1	Étude d'un exemple simple	120
5.3	(*) Stabilité structurelle	121
5.4	(*) Dynamique symbolique	123
5.5	Opérateur de transfert	124
5.6	Mélange, ergodicité, mesure d'équilibre	126

5.6.1	Fonction de corrélation et mélange exponentiel	126
5.6.2	Exemples numériques d'évolution de densité et de mesures d'équilibre	127
5.6.3	(*) Ergodicité	127
6	Dynamique déterministe hyperbolique et théorie ergodique	129
6.1	Introduction	129
6.1.1	Billard dispersif de Sinaï et instabilité hyperbolique	130
6.1.2	Flot géodésique sur une surface à courbure négative	131
6.2	Instabilité hyperbolique d'Anosov	133
6.2.1	Espace des phases et couche d'énergie	133
6.2.2	Définition de Flot Hyperbolique ou sensibilité aux conditions initiales.	133
6.3	Ergodicité et mélange	137
6.3.1	Un flot géodésique hyperbolique est mélangeant (et ergodique) . . .	137
6.3.2	Modèle simple du « cat map » qui est mélangeant (et ergodique) . .	139
6.4	Théorème central limite et diffusion	141
7	L'attracteur étrange de Lorenz	143
7.1	Modèle de Lorenz pour l'hydrodynamique. Cellules de convection de Bénard	143
7.1.1	Convection et hydrodynamique	143
7.1.2	Modèle simplifié de Rayleigh	145
7.1.3	Approximation de Lorenz sur quelques modes de Fourier. Équations de Lorenz.	150
7.1.4	De retour au mouvement du fluide	154
7.2	Le moulin de Lorenz	154
7.2.1	Modélisation physique et équations de Lorenz	155
7.2.2	Preuve de la Proposition 7.2.2	157
7.3	Etude des équations de mouvement de Lorenz	163
7.3.1	Points fixes et leur stabilité	163
7.3.2	Variétés stables et instables du point fixe 0	167
7.3.3	Contraction du flot de Lorenz et existence d'un attracteur	167
7.3.4	Modèle géométrique du flot de Lorenz	170
7.3.5	Modèle linéaire simplifié	172
7.3.6	Cantor et dimension fractale	173
7.4	Mesure d'équilibre de Sinaï-Ruelle-Bowen (SRB, 1976). Ergodicité.	177
7.5	Mélange	179
7.6	Théorème central limite	181
7.6.1	Processus aléatoire de "pile ou face" et théorème central limite . . .	181
7.6.2	Théorème central limite pour le flot de Lorenz	183
8	Dynamique de champs et morphogénèse	187
8.1	Modèle à une dimension et une composante	187
8.1.1	Modèle de Swift-Hohenberg	187
8.1.2	Analyse de la stabilité d'une solution homogène stationnaire	189

8.1.3	Stabilité du motif. Etude non linéaire.	192
8.1.4	Simulation numérique	193
8.2	Modèle de réaction-diffusion à deux composantes	193
8.2.1	Modèle	193
8.2.2	Interprétation des équations du modèle de Gray Scott	194
8.2.3	Analyse de la stabilité d'une solution homogène stationnaire	195
8.3	Motifs périodiques et quasi-périodiques en dimension ≥ 2	203
8.3.1	Exemples en dimension 2	204
8.3.2	Motif périodique et quasi-périodique	205
8.4	Motifs par segregation ou avalanches	211
8.5	Ondes solitaires ou Solitons	213
8.5.1	Historique	214
8.5.2	Du modèle des oscillateurs non linéaires à l'équation de KdV	215
8.5.3	Solution de l'équation KdV à profil constant	221
A	Formulaire	225
A.1	Algèbre linéaire	225
A.1.1	Forme normale de Jordan et diagonalisation	225
A.1.2	Rayon spectral d'une matrice	228
A.1.3	Diagonalisation d'une matrice 2×2	229
B	Énoncés et solutions des exercices	231
B.1	Chapitre introduction	231
B.1.1	«Suite $x_{n+1} = ax_n + b$ ».	231
B.2	Chapitre applications et champs de vecteur	232
B.3	Chapitre dynamique Hamiltonienne, flots géodésiques et billard	232
B.3.1	Loi de Newcomb-Bendford, «application de l'unique ergodicité».	232
B.3.2	Billard circulaire	233
B.3.3	Hyperbolicité d'un billard dispersif.	236
B.4	Chapitre Dynamique probabiliste sur les graphes	239
B.4.1	«Matrice d'adjacence d'un graphe et entropie»	239
B.4.2	« Internet Google rank »	242
B.4.3	« Algorithme de MonteCarlo pour le modèle d'Ising »	244
B.5	Chapitre Dynamique déterministe expansive	246
B.6	Chapitre Dynamique déterministe hyperbolique	246
B.7	Chapitre Le modele de Lorenz en hydrodynamique. Le moulin de Lorenz et son attracteur etrange	246
B.8	Chapitre Morphogenese et ondes non linéaires	246
C	Programmes d'illustration en langage python et C++	247
C.1	Programmes en langage python	247
C.1.1	fichier syracuse.py pour la Section 1.1.1.	247
C.2	Programmes en langage C++	248

C.2.1 fichier syracuse.cc pour la Section 1.1.1. 248

Notes :

- Ce document pdf est disponible sur la page web :
https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~faure/enseignement/systemes_dynamiques
avec des liens html cliquables.
- La marque (*) signifie que ce passage peut être sauté en première lecture et sera probablement sauté en cours.
- Notations : le signe := signifie une définition. Par exemple $A := \sin(x)$ signifie que dans la suite on pose $A = \sin(x)$.

Animations sur la page web : il y a de nombreuses animations qui illustrent chaque parties du cours sur [la page web](#).

Index

A

Anosov, 129, 134
application de Belousov-Zhabotinsky, 42
application de Poincaré, 23, 170
application logistique, 25, 42
application quadratique, 30
attracteur, 22
attracteur étrange, 31
attracteur étrange de Lorenz, 169

B

Belousov-Zhabotinsky, 37
bifurcation, 29
billard de Sinaiï, 130
Billard dispersif de Sinaiï, 34
billard rectangulaire, 32
blocs de Jordan, 226
Box counting dimension, 174

C

cat map, 139
catalyseur, 39
coefficient d'instabilité de Lyapounov, 134, 135
connexion de Levi-Civita, 75
conservatif, 67, 167
convection thermique, 143
couche d'énergie, 133
courbe Hölder continue, 31
crochet de Poisson, 68
cycle limite attractif, 22

D

dérivée covariante, 75
diagonalisable, 226
différentielle de l'application, 43

dimension fractale de Minkowski, 174
direction instable, 134
direction neutre, 134
direction stable, 134
dissipatif, 167
distribution de Boltzmann, 111
distribution de Gibbs, 111
divergence du champs de vecteur, 52
dynamique symbolique, 123, 173

E

E.D.O., 18
élément de volume, 43, 52
énergie, 67
énergie cinétique, 64
énergie potentielle, 64
ensemble de Cantor, 31
ensemble de Julia, 31
ensemble de Julia plein, 31
ensemble de Mandelbrot, 29
ensemble répulsif, 31
entropie, 35, 131
équation de Burgers, 223
équation de diffusion de la chaleur, 146
équation de KdV, 218
équation de Lotka Volterra, 24
équation d'évolution, 113
équation différentielle ordinaire, 18
équation KdV, 214
Équations de Hamilton, 64
équations de Lorenz, 151, 157, 161, 163
équations de mouvement de Fermi-Pasta-Ulam, 217
équations de Navier Stokes, 146
équations de Saltzman, 147
ergodicité, 138

ergodique, 100, 127, 139
 espace des phases, 64
 état d'équilibre, 99, 106
 évolution à temps continu, 113
 évolution effective, 35, 131
 expansif, 167
 expansive, 118

F

flot, 18, 51, 163
 fonction de corrélation dynamique, 126
 force, 63
 force potentielle, 64
 forme normale, 20
 forme normale de Jordan, 226
 forme symplectique, 69
 fractale, 31, 174

G

générateur, 113
 géodésique, 75
 géométrie symplectique, 69
 gradient symplectique, 149

H

Hamiltonien, 64

I

impulsion, 64
 instabilité de Rayleigh (1916)-Bénard (1901),
 143
 irréductible, 100

L

l'attracteur étrange, 143
 Le Brusselator, 201
 le passage à un modèle continu, 218
 Le problème à deux corps, 65
 libre, 69
 Lipschitz, 57
 Loi de Newton, 63
 loi d'évolution déterministe, 19
 loi probabiliste, 9
 l'unique ergodicité, 72

M

marche aléatoire, 181
 matrice d'adjacence, 97
 matrice hyperbolique, 135
 mécanique classique, 63
 mélangeant, 138
 mélangeant à taux super-exponentielle, 140
 mélangeante, 101, 179
 mélangeante à taux exponentiel, 126
 mesure d'équilibre, 126, 139
 mesure d'équilibre de Sinaï-Ruelle-Bowen, 177
 mesure naturelle, 126
 mesure physique, 126
 mesure SRB, 126
 méthode de Euler, 19
 méthode des images, 32
 mode de Fourier, 71, 141
 modèle de Gray-Scott, 194
 modèle de Jukes-Cantor, 109
 modèle du Brusselator, 194
 mouvement Brownien, 181

N

nombre de Prandtl, 147
 nombre de Rayleigh, 147
 notation de Dirac, 228

O

ondes solitaires, 213
 opérateur de composition, 45, 54, 124
 opérateur de Liouville, 68
 opérateur de Perron-Frobenius, 46
 opérateur de Ruelle, 46
 opérateur de transfert, 45, 54, 124
 opérateur d'évolution, 113
 opérateur stochastique, 46
 orbite périodique attractive, 22
 oscillateur harmonique, 66

P

partition de Markov, 123
 position d'une particule, 63
 positive, 100
 primitive, 101

principe de balance détaillée, 110

principe d'équivalence, 66

principe d'incertitude, 137

processus stochastique, 182

projecteur spectral, 227

R

rayon spectral, 228

relativité générale, 63

relativité restreinte, 63

résolvente, 227

réversible, 110

Runge Kutta d'ordre 4, 19

S

section de Poincaré, 23

sensibilité aux conditions initiales, 117, 118,
129, 172

spatio-temporelle, 37

spectre, 226

Stabilité structurelle, 122

suite de Syracuse, 11

système dynamique, 19

systèmes intégrables, 65

T

Théorème central limite, 142

Théorème central limite pour des variables
aléatoires, 183

théorème de Fourier, 189

Théorème d'équidistribution de Kronecker-
Weyl, 71

Théorie KAM, 89

tore KAM, 89

trajectoire, 118

trajectoire de la particule, 63

U

une loi déterministe, 9

uniformément hyperbolique, 129

uniquement ergodique, 71

V

valeur propre, 226

Bibliographie

- [1] Mark J Ablowitz and Harvey Segur. *Solitons and the inverse scattering transform*, volume 4. SIAM, 1981.
- [2] D. Anosov. Geodesic flows on compact riemannian manifolds of negative curvature. *Proceedings of the Steklov Mathematical Institute*, 90 :1 :1–235, 1967.
- [3] V.I. Arnold. *Les méthodes mathématiques de la mécanique classique*. Ed. Mir. Moscou, 1976.
- [4] V.I. Arnold and A. Avez. *Méthodes ergodiques de la mécanique classique*. Paris : Gauthier Villars, 1967.
- [5] Franck Boyer and Pierre Fabrie. *Mathematical tools for the study of the incompressible Navier-Stokes equations and related models*, volume 183. Springer Science & Business Media, 2012.
- [6] M. Brin and G. Stuck. *Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 2002.
- [7] N. Chernov and R. Markarian. *Chaotic billiards*. Number 127. American Mathematical Soc., 2006.
- [8] Y. Coudène. *Théorie ergodique et systèmes dynamiques*. EDP sciences, 2013.
- [9] Michael Cross and Henry Greenside. *Pattern formation and dynamics in nonequilibrium systems*. Cambridge University Press, 2009.
- [10] E.B. Davies and E.B. Davies. *Spectral theory and differential operators*, volume 42. Cambridge Univ Pr, 1996.
- [11] Robert L Devaney, Luke Devaney, and Luke Devaney. *An introduction to chaotic dynamical systems*, volume 13046. Addison-Wesley Reading, 1989.
- [12] D. Dolgopyat. On decay of correlations in Anosov flows. *Ann. of Math. (2)*, 147(2) :357–390, 1998.
- [13] L. Euler, A.P. Juskevic, and R. Taton. *Correspondance de Leonhard Euler Avec A. C. Clairaut, J. D’Alembert Et J. L. Lagrange*. Commercium epistolicum. Birkhäuser Basel, 1980.
- [14] K.J. Falconer. *Fractal geometry : mathematical foundations and applications*. John Wiley & Sons Inc, 2003.

- [15] F. Faure. Prequantum chaos : Resonances of the prequantum cat map. *arXiv :nlin/0606063*. *Journal of Modern Dynamics*, 1(2) :255–285, 2007.
- [16] F. Faure. *Cours de Mathématiques pour la physique. Niveau Master 1*. [link](#), 2010.
- [17] F. Faure. *Cours de Mécanique Analytique pour Licence L3 de physique*. [link](#), 2010.
- [18] F. Faure and N. Roy. Ruelle-Pollicott resonances for real analytic hyperbolic map. *Nonlinearity*. [link](#), 19 :1233–1252, 2006.
- [19] F. Faure, N. Roy, and J. Sjöstrand. A semiclassical approach for Anosov diffeomorphisms and Ruelle resonances. *Open Math. Journal*. [link](#), 1 :35–81, 2008.
- [20] F. Faure and J. Sjöstrand. Upper bound on the density of Ruelle resonances for Anosov flows. a semiclassical approach. *Comm. in Math. Physics, Issue 2*. [link](#), 308 :325–364, 2011.
- [21] F. Faure and M. Tsujii. Prequantum transfer operator for symplectic Anosov diffeomorphism. *Asterisque 375 (2015)*, [link](#), pages ix+222 pages, 2015.
- [22] I. Gohberg, S. Goldberg, and N. Krupnik. *Traces and Determinants of Linear Operators*. Birkhauser, 2000.
- [23] V. Guillemin and S. Sternberg. *Geometric asymptotics*. Amer Mathematical Society, 1990.
- [24] V. Guillemin and S. Sternberg. *Symplectic techniques in physics*. Cambridge Univ Pr, 1990.
- [25] Etienne Guyon, Jean-Pierre Hulin, and Luc Petit. *Hydrodynamique physique*. Edp Sciences, 2001.
- [26] Leys J., Ghys E., and Alvarez A. *Chaos. Videos*. <http://www.chaos-math.org/fr>.
- [27] A. Katok and B. Hasselblatt. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 1995.
- [28] Lev Davidovitch Landau and Evgenii Mikhailovich Lifchitz. *Physique théorique. tome vi, mécanique des fluides*. 1971.
- [29] C. Liverani. On contact Anosov flows. *Ann. of Math. (2)*, 159(3) :1275–1312, 2004.
- [30] Andrew J Majda and Andrea L Bertozzi. *Vorticity and incompressible flow*, volume 27. Cambridge University Press, 2002.
- [31] D McDuff and D Salamon. *Introduction to symplectic topology, 2nd edition*. clarendon press, Oxford, 1998.
- [32] Y. Pesin. *Lectures on Partial Hyperbolicity and Stable Ergodicity*. European Mathematical Society, 2004.
- [33] Michel Peyrard. *Physique des solitons*. EDP Sciences, 2012.
- [34] D. Ruelle. *Hasard et chaos*. Odile Jacob, 1991.
- [35] D. Ruelle. *Turbulence, strange attractors, and chaos*. World Scientific Series on Non-linear Science. Series A. 16. Singapore : World Scientific, 1995.

- [36] A. Cannas Da Salva. *Lectures on Symplectic Geometry*. Springer, 2001.
- [37] I.M. Sigal. *Introduction to spectral theory : With applications to Schrödinger operators*, volume 113. Springer, 1996.
- [38] S. Tabachnikov. *Billiards*. Soc. Math. de France, 1995.
- [39] M. Taylor. *Partial differential equations, Vol I*. Springer, 1996.
- [40] L.N. Trefethen and M. Embree. *Spectra and pseudospectra*. Princeton University Pr., 2005.
- [41] M. Tsujii. Quasi-compactness of transfer operators for contact Anosov flows. *Nonlinearity, arXiv :0806.0732v2 [math.DS]*, 23(7) :1495–1545, 2010.
- [42] M. Tsujii. Contact Anosov flows and the fourier–bros–iagolnitzer transform. *Ergodic theory and dynamical systems*, 32(06) :2083–2118, 2012.
- [43] Alan Mathison Turing. The chemical basis of morphogenesis. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London B : Biological Sciences*, 237(641) :37–72, 1952.
- [44] N.M.J. Woodhouse. *Geometric quantization*. Clarendon Press, Oxford, 1992.

#script qui selectionne les chapitres pour faire des fichiers pdf individuels.

```
pdftk cours_chaos.pdf cat 1-8 249-end output cours_table_matieres.pdf
pdftk cours_chaos.pdf cat 9-40 output cours_intro.pdf
pdftk cours_chaos.pdf cat 41-61 output cours_applications_champs_de_vecteurs.pdf
pdftk cours_chaos.pdf cat 63-93 output cours_hamilton.pdf
pdftk cours_chaos.pdf cat 187-223 output cours_morphogenese.pdf
pdftk cours_chaos.pdf cat 95-116 output cours_Markov.pdf
pdftk cours_chaos.pdf cat 117-128 output cours_dynamique_expansive.pdf
pdftk cours_chaos.pdf cat 129-142 output cours_dynamique_hyperbolique.pdf
pdftk cours_chaos.pdf cat 143-185 output cours_lorenz.pdf
pdftk cours_chaos.pdf cat 225-230 output cours_annexe.pdf
pdftk cours_chaos.pdf cat 231-248 output cours_solutions.pdf
pdftk cours_chaos.pdf cat 247-246 output cours_programmes.pdf
pdftk cours_chaos.pdf cat 1-230 249-end output cours_complet_sans_solutions.pdf
```