$$\Delta := T^2 - 4D.$$

Si $\Delta \neq 0$ alors la matrice M est diagonalisable, avec deux valeurs propres

$$\lambda_\pm = \frac{T \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \tag{A.1.3}$$

Si $\Delta \neq 0$ on a $\lambda_+ \neq \lambda_-$ et les vecteurs propres associés sont [1] :

$$U_\pm = \begin{pmatrix} T \pm \sqrt{\Delta} - 2d \\ 2c \end{pmatrix}.$$

On peut écrire :

$$M = ANA^{-1}, \qquad A = \begin{pmatrix} T + \sqrt{\Delta} - 2d & T - \sqrt{\Delta} - 2d \\ 2c & 2c \end{pmatrix} = (U_+, U_-), \qquad N = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}. \tag{A.1.4}$$

Démonstration. Le polynome caractéristique est

$$P(\lambda) := \det(\lambda \mathrm{Id} - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{pmatrix} = (\lambda - a)(\lambda - b) - bc = \lambda^2 - T\lambda + D$$

L'équation $P(\lambda) = 0$ est du second degré. Ses solutions sont

$$\lambda_\pm = \frac{T \pm \sqrt{\Delta}}{2},$$

avec

$$\Delta := T^2 - 4D.$$

On cherche un vecteur propre $V_\pm \in \mathbb{R}^2$ sous la forme $V_\pm = \begin{pmatrix} v_\pm \\ 2c \end{pmatrix}$ avec $v_\pm \in \mathbb{R}$ donnant (deuxième ligne de l'équation $AV_\pm = \lambda_\pm V_\pm$),

$$cv_\pm + 2dc = \lambda_\pm 2c \Leftrightarrow v_\pm = 2(\lambda_\pm - d) = T \pm \sqrt{\Delta} - 2d.$$

Les deux vecteurs $V_\pm$ forment une base si et seulement si $v_+ \neq v_-$, c'est à dire si $\Delta \neq 0$. □

Cas particulier : Si

$$M = \begin{pmatrix} 0 & b \\ \bar{b} & 0 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} |b| & -|b| \\ \bar{b} & \bar{b} \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} |b| & 0 \\ 0 & -|b| \end{pmatrix}$$

1. Avec le logiciel gratuit **xcas** de calcul formel (pour l'obtenir, taper **xcas** dans google). Et dans xcas, écrire : `A:=[[a,b],[c,d]];` `N:=egvl(A);` `P:=egv(A);` On vérifira que `simplify(P*N*inv(P));` redonne bien la matrice `A` .

Annexe B

Solution des exercices

Solution de l'exercice 5.2.10 page 104: @@

Solution de l'exercice 1.3.3 page 27: Pour $a, b \in \mathbb{R}$ fixés. On considère la fonction $f(x) = ax + b$ et le système dynamique $x_{n+1} = f(x_n)$. On cherche $x^* \in \mathbb{R}$ point fixe, c'est à dire solution de

$$\begin{aligned} x^* &= f(x^*) \\ \Leftrightarrow \quad x^* &= ax^* + b \\ \Leftrightarrow \quad x^* &= \frac{b}{1-a}, \qquad \text{si } a \neq 1 \end{aligned}$$

On va donc supposer $a \neq 1$. On fait le changement de variable

$$y_n := x_n - x^*$$

alors

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= x_{n+1} - x^* = ax_n + b - ax^* - b = a(x_n - x^*) \\ &= ay_n \end{aligned}$$

On déduit que

$$y_n = a^n y_0$$

donc

$$x_n = y_n + x^* = a^n (x_0 - x^*) + x^*$$

Si $|a| < 1$ alors pour $n \to \infty$ on a $a^n \to 0$ et donc $x_n \to x^*$ c'est à dire que le point fixe x^* est attractif. Au contraire si $a > 1$ alors $a^n \to \infty$ et $x_n \to \pm\infty$. Le point fixe est répulsif.

Annexe C

Programmes d'illustration en langage python et C++

C.1 Programmes en langage python

C.2 Programmes en langage C++