

# Annexe B

## Énoncés et solutions des exercices

### Sommaire

---

<b>B.1 Chapitre introduction</b> . . . . .	<b>231</b>
B.1.1 “Suite $x_{n+1} = ax_n + b$ ”. . . . .	231
<b>B.2 Chapitre applications et champs de vecteur</b> . . . . .	<b>232</b>
<b>B.3 Chapitre dynamique Hamiltonienne, flots géodésiques et billard</b>	<b>232</b>
B.3.1 Loi de Newcomb-Bendford, “application de l’unique ergodicité”. . . . .	232
B.3.2 Billard circulaire . . . . .	233
B.3.3 Hyperbolicité d’un billard dispersif. . . . .	236
<b>B.4 Chapitre Dynamique probabiliste sur les graphes</b> . . . . .	<b>239</b>
B.4.1 “Matrice d’adjacence d’un graphe et entropie” . . . . .	239
B.4.2 « Internet Google rank » . . . . .	242
B.4.3 « Algorithme de MonteCarlo pour le modèle d’Ising » . . . . .	244
<b>B.5 Chapitre Dynamique déterministe expansive</b> . . . . .	<b>246</b>
<b>B.6 Chapitre Dynamique déterministe hyperbolique</b> . . . . .	<b>246</b>
<b>B.7 Chapitre Le modèle de Lorenz en hydrodynamique. Le moulin     de Lorenz et son attracteur étrange</b> . . . . .	<b>246</b>
<b>B.8 Chapitre Morphogenèse et ondes non linéaires</b> . . . . .	<b>246</b>

---

### B.1 Chapitre introduction

#### B.1.1 “Suite $x_{n+1} = ax_n + b$ ”.

**Exercice B.1.1.** Pour  $a, b \in \mathbb{R}$  fixés. On considère la fonction  $\phi(x) = ax + b$  et le système dynamique  $x_{n+1} = \phi(x_n)$ .

1. Exprimer  $x_n$  en fonction de  $x_0$  et  $n$ .

**Solution :** Pour  $a, b \in \mathbb{R}$  fixés. On considère la fonction  $f(x) = ax + b$  et le système dynamique  $x_{n+1} = f(x_n)$ . On cherche  $x^* \in \mathbb{R}$  point fixe, c'est à dire solution de

$$\begin{aligned} x^* &= f(x^*) \\ \Leftrightarrow x^* &= ax^* + b \\ \Leftrightarrow x^* &= \frac{b}{1-a}, \quad \text{si } a \neq 1 \end{aligned}$$

On va donc supposer  $a \neq 1$ . On fait le changement de variable

$$y_n := x_n - x^*$$

alors

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= x_{n+1} - x^* = ax_n + b - ax^* - b = a(x_n - x^*) \\ &= ay_n \end{aligned}$$

On déduit que

$$y_n = a^n y_0$$

donc

$$x_n = y_n + x^* = a^n(x_0 - x^*) + x^*$$

2. Discuter la limite de  $x_n$  pour  $n \rightarrow \infty$  en fonction de  $a, b$ .

**Solution :** Si  $|a| < 1$  alors pour  $n \rightarrow \infty$  on a  $a^n \rightarrow 0$  et donc  $x_n \rightarrow x^*$  c'est à dire que le point fixe  $x^*$  est attractif. Au contraire si  $a > 1$  alors  $a^n \rightarrow \infty$  et  $x_n \rightarrow \pm\infty$ . Le point fixe est répulsif.

## B.2 Chapitre applications et champs de vecteur

## B.3 Chapitre dynamique Hamiltonienne, flots géodésiques et billard

### B.3.1 Loi de Newcomb-Bendford, “application de l’unique ergodicité”.

Observer le tableau B.1. Suivant Newcomb et Benford 1881, on va étudier un modèle mathématique qui peut aider à expliquer pourquoi la proportion  $p_c$  décroît avec  $c$ . Voir “Loi de Bendford” sur wikipedia et son utilité pour détecter les fraudes fiscales.

On considère la suite  $u_n = 2^n$  avec  $n \in \mathbb{N}$ . On note  $c_n$  le premier chiffre de  $u_n$  en base 10. Voici les premières valeurs de  $c_n$  marquées en gras :

$$u_n = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{8}, 16, \mathbf{32}, \mathbf{64}, 128, \mathbf{256}, \mathbf{512}, 1024, \mathbf{2048}, \dots$$

Premier chiffre $c$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre de pays	49	36	23	24	13	14	13	10	12
Proportion observée $p_c$	0,253	0,186	0,119	0,123	0,067	0,072	0,067	0,051	0,062

TABLE B.1 – Répartition du premier chiffre significatif des effectifs de population de 194 pays du monde selon l’édition 2010 du CIA World Factbook

Montrer que dans cette suite  $c_n : 1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, \dots$  un chiffre donné  $c \in \{1, 2, 3 \dots 9\}$  apparaît avec la probabilité  $p_c = \frac{\log(1+\frac{1}{c})}{\log 10}$ , soit  $p_1 = 30\%, p_2 = 17\%, \dots, p_9 = 4.5\%$ . Plus précisément si  $\kappa_t(c) := \frac{1}{t} \text{Card} \{n < t, c_n = c\}$  est la proportion de présence du chiffre  $c$  dans la séquence  $\{c_0, c_1, \dots, c_{t-1}\}$ , montrer que

$$\kappa_t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} p_c.$$

*Aide : écrire  $c_n 10^{r_n} \leq u_n < (c_n + 1) 10^{r_n}$  et prendre le log pour se ramener à une dynamique de translation de  $\frac{\log 2}{\log 10}$  modulo 1. Montrer que  $\frac{\log 2}{\log 10}$  est irrationnel. Montrer l’unique ergodicité de la dynamique.*

**Solution :** Dans un premier temps, comme dans la proposition 3.4.1, on montre que si  $\alpha \notin \mathbb{Q}$  et  $q \in \mathbb{R}$  alors la suite  $q_n = n\alpha + q \bmod 1 \in [0, 1[, n \in \mathbb{N}$  est uniquement ergodique c’est à dire que pour toute fonction  $u \in C^0([0, 1])$ ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N u(q_n) = \int u(q) dq \tag{B.3.1}$$

En considérant un intervalle  $I \subset [0, 1]$  de longueur  $|I|$ , et la « fonction caractéristique »  $u(q) = 1$  si  $q \in I$ ,  $u(q) = 0$  sinon (en fait on considère une suite de fonctions continues qui approchent  $u$ ), on a que  $\sum_{n=1}^N u(q_n) = \text{Card} \{n \leq N, q_n \in I\}$  et  $\int u(q) dq = |I|$  et donc (B.3.1) s’écrit simplement  $\text{proba}(I) := \frac{1}{N} \text{Card} \{n \leq N, q_n \in I\} = |I|$ .

Dans un deuxième temps, on considère la suite  $u_n = 2^n = 2 \times u_{n-1}$  avec  $u_0 = 1$ . Par définition de  $k_n$ , on a  $k_n 10^r \leq u_n < (k_n + 1) 10^r$  avec  $r \in \mathbb{N}$ . Soit  $q_n := \frac{\log u_n}{\log 10} \bmod 1$ . Alors  $q_{n+1} = q_n + \alpha \bmod 1$  avec  $\alpha = \frac{\log 2}{\log 10} \notin \mathbb{Q}$  et  $\frac{\log(k_n)}{\log 10} \leq q_n < \frac{\log(k_n+1)}{\log 10}$  soit  $q_n \in I_{k_n} := [\frac{\log(k_n)}{\log 10}, \frac{\log(k_n+1)}{\log 10}[$ . Comme la suite  $q_n$  est ergodique on déduit que

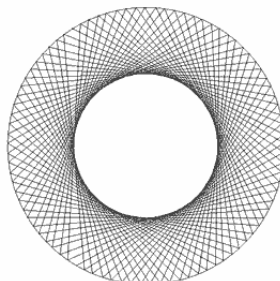
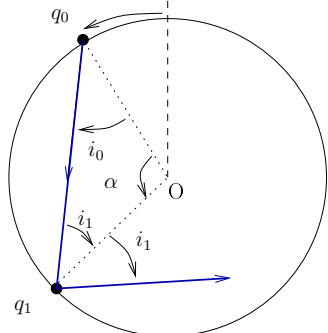
$$p_k = \text{proba}(I_k) = |I_k| = \left| \frac{\log(k+1)}{\log 10} - \frac{\log(k)}{\log 10} \right| = \frac{\log(1 + \frac{1}{k})}{\log(10)}$$

### B.3.2 Billard circulaire

**Exercice B.3.1.** On considère un billard de bord circulaire (rayon 1). Une particule se déplace à vitesse constante dans le disque et rebondit de façon parfaite sur le bord. On note

1. En effet si  $\frac{\log 2}{\log 10} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  alors  $2^q = 10^p = 2^p 5^p$  ce qui implique  $p = q = 0$ , donc impossible.

$q_0 \in [0, 2\pi]$  la position angulaire d'un point sur le bord,  $i_0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  l'angle du vecteur vitesse par rapport à la normale.  $(q_0, i_0)$  détermine l'état initial d'une particule qui suit ensuite une trajectoire dans le billard.



1. L'état initial  $(q_0, i_0)$  sur le bord détermine la suite des rebonds caractérisés par  $(q_t, i_t) \in [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  pour  $t = 0, 1, 2, \dots$ . Exprimer  $(q_t, i_t)$  à partir de  $(q_0, i_0)$ .

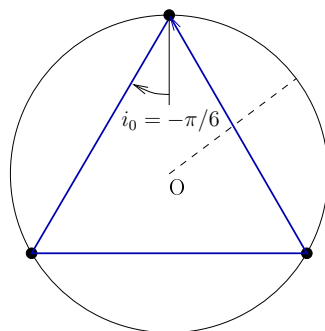
**Solution :** Le triangle  $Oq_0q_1$  est isocèle en  $O$  donc  $i_1 = i_0$ . De même  $i_t = i_{t-1}, \forall t$ , donc  $i_t = i_0$ . Remarquer que sur la figure, on a  $q_0 > 0, i_0 < 0$ . Dans le triangle isocèle  $Oq_0q_1$  on a  $2(-i_0) + (q_1 - q_0) = \pi$  donc  $q_1 = q_0 + \pi + 2i_0$ . Plus généralement  $q_t = q_{t-1} + \pi + 2i_0$  donc

$$q_t = q_0 + t(\pi + 2i_0) = q_0 + t\alpha \tag{B.3.2}$$

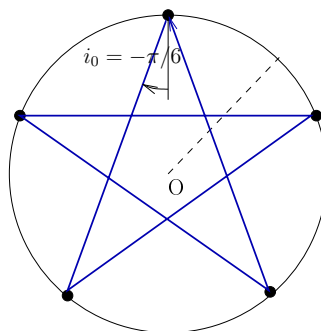
avec  $\alpha = \pi + 2i_0$ .

2. Tracer un exemple de trajectoire périodique (fermée) qui fait  $m = 3$  rebonds en  $n = 1$  tour autour du centre. Tracer un exemple de trajectoire périodique qui fait  $m = 5$  rebonds en  $n = 2$  tours autour du centre. Montrer plus généralement que une trajectoire est **périodique** si et seulement si  $i_0 = \pi \frac{a}{b}$  où  $a, b$  sont des entiers premiers entre eux (on dit que  $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$  est **rationnel**). Exprimer le nombre  $m$  de rebonds et le nombre  $n$  de tours effectués en une période en fonction de  $a, b$ ? Quelle est la longueur  $L$  parcourue pour une trajectoire périodique, en fonction de  $m, n$ ?

**Solution :** Voici deux exemples, où le nombre de tours  $n$  est le nombre de fois où le rayon en pointillé (arbitraire) est traversé et le nombre de rebonds  $m$  est le nombre de points de contacts sur le bord.



$m = 3$  rebonds,  $n = 1$  tour.



$m = 5$  rebonds,  $n = 2$  tours.

Une trajectoire est périodique de période  $m$  et fait  $n$  tours (avec  $m, n$  premiers entre eux) si et seulement si

$$q_m \stackrel{(B.3.2)}{=} q_0 + m(\pi + 2i_0) = q_0 + n2\pi$$

$$\Leftrightarrow i_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{n2\pi}{m} - \pi \right) = \pi \frac{2n - m}{2m} = \pi \frac{a}{b}$$

avec  $\frac{a}{b} = \frac{2n-m}{2m} \in \mathbb{Q}$ . Inversement, si  $i_0 = \pi \frac{a}{b}$  alors  $\frac{n}{m} = \frac{b+2a}{2b} \in \mathbb{Q}$ . Par exemple,  $m = 3, n = 1$  donne  $i_0 = \pi \frac{a}{b} = -\frac{1}{6}\pi$  et  $m = 5, n = 2$  donne  $i_0 = \pi \frac{a}{b} = -\frac{1}{10}\pi$ .

Entre deux rebonds, la longueur parcourue est  $d = 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2 \sin\left(\pi \frac{n}{m}\right)$  donc  $L = md = 2m \sin\left(\pi \frac{n}{m}\right)$ .

3. Si  $I$  est un intervalle donné du bord et  $i_1 = \pi x$  avec  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  irrationnel, on note  $\kappa_t(I) \in [0, 1]$  la proportion de points  $q_{t'}$  de la trajectoire avec  $t' \in [0, t - 1]$ , qui appartiennent à l'intervalle  $I$  :

$$\kappa_t(I) := \frac{1}{t} \# \{t' \in \{0, \dots, t - 1\}, \text{t.q. } q_{t'} \in I\}.$$

Montrer que pour toute condition initiale  $q_0$ ,  $\kappa_t(I)$  converge vers la longueur relative  $|I| / (2\pi)$  de l'intervalle lorsque  $t \rightarrow \infty$ . On dit que la dynamique est **uniquement ergodique**. Aide : utiliser la fonction caractéristique l'intervalle  $\chi_I(q) = 1$  si  $q \in I$  et  $\chi_I(q) = 0$  sinon. Observer que  $\kappa_t(I) = \frac{1}{t} \sum_{t'=1}^t \chi_I(q_{t'})$  et que  $|I| = \int \chi_I(q) dq$ . Décomposer  $\chi_I$  en séries de Fourier  $\varphi_n(q) = \exp(inq)$ .

**Solution :** La décomposition en série de Fourier de  $\chi_I$  s'écrit

$$\chi_I(q) = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \exp(inq), \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inq} \chi_I(q) dq \in \mathbb{C}. \quad (B.3.3)$$

On a donc

$$\begin{aligned} \kappa_t(I) &= \frac{1}{t} \sum_{t'=0}^{t-1} \chi_I(q_{t'}) = \frac{1}{t} \sum_{t'=0}^{t-1} \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \exp(inq_{t'}) \\ &\stackrel{(B.3.2)}{=} \frac{1}{t} \sum_{t'=0}^{t-1} \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \exp(in(q_0 + t'\alpha)) \\ &= \frac{1}{t} \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \exp(inq_0) \sum_{t'=0}^{t-1} (\exp(in\alpha))^{t'} = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \exp(inq_0) \left( \frac{1}{t} S_{t,n} \right) \end{aligned} \quad (B.3.4)$$

où il apparaît la série géométrique :

$$S_{t,n} := \sum_{t'=0}^{t-1} (\exp(in\alpha))^{t'}$$

que l'on calcule ainsi : si  $n = 0$  alors  $\frac{1}{t}S_{t,0} = 1$ . Si  $n \neq 0$  alors  $\exp(in\alpha) \neq 1$  car sinon  $\alpha/\pi$  serait rationnel, ce que l'on a exclu. Alors

$$S_{t,n} = \frac{\exp(int\alpha) - 1}{\exp(in\alpha) - 1} \quad (\text{B.3.5})$$

car  $\exp(in\alpha) S_{t,n} := \sum_{t'=1}^t (\exp(in\alpha))^{t'}$  donc  $\exp(in\alpha) S_{t,n} - S_{t,n} = \exp(int\alpha) - 1$ , donnant (B.3.5). On a donc  $\frac{1}{t}S_{t,n} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$  si  $n \neq 0$  car  $|S_{t,n}| \leq \text{cste}_n$ . On reprends :

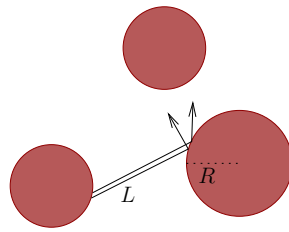
$$\begin{aligned} \kappa_t(I) &\stackrel{(\text{B.3.4})}{=} \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \exp(inq_0) \left( \frac{1}{t} S_{t,n} \right) \\ &\xrightarrow{t \rightarrow +\infty} c_0 \stackrel{(\text{B.3.3})}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi_I(q) dq = \frac{|I|}{2\pi}. \end{aligned}$$

4. Sans utiliser la question précédente, montrer que si  $i = \pi x$  avec  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  **irrationnel** alors les points  $q_1, q_2, \dots$  de la trajectoire (non périodique) sont denses sur le bord (i.e. il n'y a pas d'intervalle du bord non touché). *Aide : procéder par l'absurde en supposant qu'il y a un intervalle non touché.* Retrouver ce résultat comme conséquence de la question précédente.

**Solution** (de Katok-Hasselblatt p.27 [27]). On suppose qu'il y a un intervalle  $I$  sur le bord non atteint par la trajectoire et que cet intervalle est le plus grand existant. On a vu que à chaque rebond, le point tourne d'un angle  $\alpha$ . On note  $R$  la rotation d'un angle  $\alpha$ . Comme la rotation préserve la longueur sur le bord, alors  $R(I)$  a la même longueur que  $I$  et n'est pas atteint non plus. Les intervalles  $I, R(I), R^2(I), \dots$  etc ne se coupent pas sinon cela ferait un intervalle non atteint plus grand que  $I$ . Comme  $\alpha/\pi$  est irrationnel, on ne peut pas avoir  $R^m(I) = I$  pour un certain entier  $m$  (sinon le bord de  $I$  donnerait une trajectoire périodique). Donc les intervalles  $I, R(I), R^2(I) \dots$  etc sont tous disjoints et de même longueur. Cela n'est pas possible car l'union serait de longueur infinie, or le bord du disque est de longueur  $2\pi$  finie.

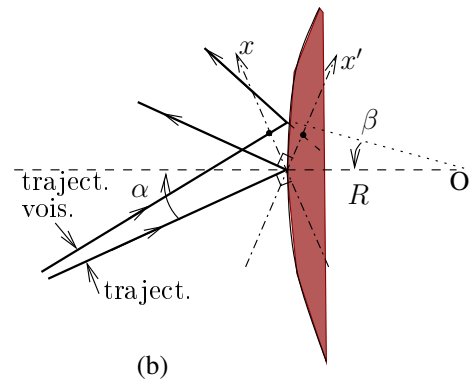
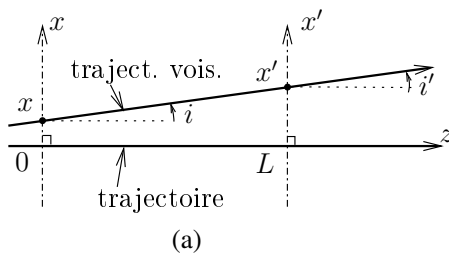
### B.3.3 Hyperbolicité d'un billard dispersif.

**Exercice B.3.2.** Le but du problème est de montrer que la dynamique d'une particule dans un billard à obstacles convexes (par exemple des disques) est « complètement chaotique » au sens précis : « **sensibilité aux conditions initiales** » ou plus précisément « uniformément hyperbolique ». Un tel billard est appelé « billard dispersif » ou « billard de Sinai ». Voir simulations numériques.



Pour montrer cela on remarque que la dynamique dans un billard plan est une succession de propagations en ligne droite et de réflexions sur des obstacles.

1. Traitons d'abord la propagation, voir figure (a). On considère une trajectoire de référence (c'est l'axe  $z$ ) et on note  $x$  l'axe orthogonal, qui sert de section de Poincaré : une trajectoire voisine coupe l'axe  $x$  à la position  $x$  et avec un angle  $i$ . On supposera  $x, i \ll 1$ . Après une longueur  $L$  donnée, exprimer les nouvelles valeurs  $(x', i')$  en fonction de  $(x, i)$  sous forme matricielle (cad au premier ordre).



**Solution :** On a  $i' = i$  et  $x' = x + L \tan i = x + Li + O(i^2)$  au premier ordre en  $i$ .  
Donc au premier ordre :

$$\begin{pmatrix} x' \\ i' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_L} \begin{pmatrix} x \\ i \end{pmatrix}$$

2. On considère maintenant la réflexion avec un angle d'incidence  $\alpha$  sur une paroi ayant un rayon de courbure  $R$  au point de réflexion, voir figure (b). Avec les mêmes définitions de  $(x, i)$  que précédemment, montrer qu'au point de réflexion, au premier ordre, on a  $\begin{pmatrix} x' \\ i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{R \cos \alpha} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ i \end{pmatrix}$ .

**Solution :** dans le cas d'une paroi plane ( $R = \infty$ ) on a  $x' = x$  et  $i' = i$  mais dans le cas d'une paroi avec rayon de courbure  $R$ , on a au premier ordre

$$R\beta \cos \alpha = x + O(x^2)$$

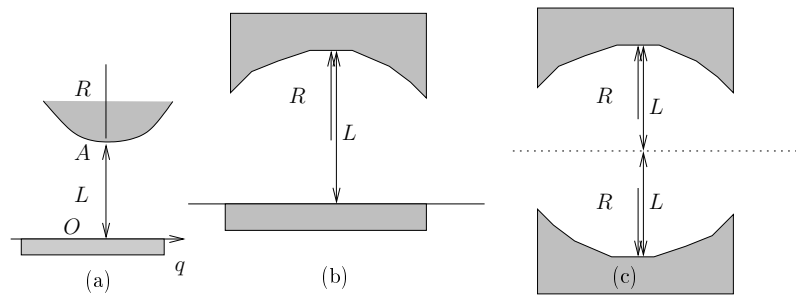
$$i' = i + 2\beta + O((x, i)^2)$$

donc  $\beta = \frac{x}{R \cos \alpha} + O(x^2)$  et au premier ordre :

$$\begin{pmatrix} x' \\ i' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{R \cos \alpha} & 1 \end{pmatrix}}_{M_{\alpha,R}} \begin{pmatrix} x \\ i \end{pmatrix}$$

Remarquer que pour une paroi plane,  $R = \infty$ , cela donne  $M_{\alpha,\infty} = \text{Id}$ .

3. On souhaite étudier la **stabilité de la trajectoire périodique verticale** OA dans le billard sur le schéma (a) suivant. On appelle  $L = OA$  et  $R > 0$  le rayon de courbure de la partie supérieure. Noter que  $R < 0$  signifierait une courbure dans l'autre sens (i.e. obstacle concave, figures (b), (c)).



Avec les notations précédentes, montrer que

$$\begin{pmatrix} x' \\ i' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ i \end{pmatrix}$$

avec une matrice  $M$  que l'on exprimera à partir de  $R, L$ . Calculer les valeurs propres<sup>2</sup> de la matrice  $M$  et déduire la stabilité de l'orbite périodique OA.

**Solution :** d'après précédemment, la trajectoire périodique OA est constitué de la succession : une propagation de longueur  $L$ , rebond avec paramètres  $\alpha = 0, R$ , propagation de longueur  $L$  et rebond avec paramètres  $\alpha = 0, R = \infty$ . Cela donne la matrice :

$$M = M_{0,\infty} M_L M_{0,R} M_L = \begin{pmatrix} 1 + \frac{2L}{R} & 2L \left(1 + \frac{L}{R}\right) \\ \frac{2}{R} & 1 + \frac{2L}{R} \end{pmatrix}$$

$T = \text{Tr}M = 2 + \frac{4L}{R} > 2$  et  $\det M = 1$  donc  $M$  est une matrice hyperbolique. Ses valeurs propres sont

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left( T + \sqrt{T^2 - 4} \right) > 1$$

$$\lambda_- = \frac{1}{\lambda_+} < 1$$

---

2. Aide : si  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  est une matrice avec  $T = \text{Tr}(M) > 2$  et  $\text{Det}(M) = 1$  alors ses valeurs propres sont  $\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} (T \pm \sqrt{T^2 - 4})$ . On observe que  $|\lambda_+| > 1$  si  $T > 2$  ou  $T < -2$ . On dit alors que la matrice est hyperbolique. On a  $\lambda_- = 1/\lambda_+$ .



Remarque : la flot du billard est Hamiltonien donc conservatif d'après le théorème de Liouville. Cela se traduit ici par  $\det M = 1$ , car l'application  $M$  est conservative sur la section de Poincaré.

4. Dans les billards (b) et (c) où  $R < 0$ , déduire la stabilité de l'orbite périodique verticale selon les valeurs de  $L/|R|$ . Remarques : avec des miroirs, ces géométries sont utilisées dans des cavités optiques Laser par exemple.

**Solution :** Dans (b), pour la trajectoire périodique on a le même résultat que (a) avec  $R \rightarrow (-R)$ . Donc  $T = 2 - \frac{4L}{|R|}$ . La matrice est elliptique (stable) si  $|T| < 2$  et hyperbolique (instable) si  $|T| > 2$ . Cela donne

$$\text{instabilité (hyperbolicité)} \Leftrightarrow T < -2 \Leftrightarrow L > |R|.$$

Dans (c), on a la matrice totale  $M^2$  donc le même résultat de stabilité.

5. Pour une propagation de longueur  $L$  suivie d'une réflexion (comme sur la figure 6.1.2), déduire que la matrice qui transforme  $(x, i)$  en  $(x', i')$  en fonction de  $L, R, \cos \alpha$  est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & L \\ \frac{2}{R \cos \alpha} & \frac{2L}{R \cos \alpha} + 1 \end{pmatrix}. \tag{B.3.6}$$

Pour un **billard dispersif**, trouver les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice  $M$  (B.3.6) et déduire qu'il y a une **instabilité uniforme** de la dynamique.

**Solution :** Pour une propagation suivie d'un rebond la matrice totale est donc

$$M = M_{\alpha, R} M_L = \begin{pmatrix} 1 & L \\ \frac{2}{R \cos \alpha} & \frac{2L}{R \cos \alpha} + 1 \end{pmatrix}.$$

$T = \text{Tr}M = 2 + \frac{2L}{R \cos \alpha} > 2$  et  $\det M = 1$  donc  $M$  est une matrice hyperbolique ; Ses valeurs propres sont

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left( T + \sqrt{T^2 - 4} \right) > 1$$

$$\lambda_{-} = \frac{1}{\lambda_{+}} < 1$$

On observe de plus que les directions propres sont respectivement dans les secteurs  $(x > 0, i > 0)$  et  $(x < 0, i > 0)$ . Ainsi rebond après rebond l'instabilité créée par  $\lambda_{+} > 1$  s'amplifie. Si les obstacles sont suffisants dans les billards de sorte que toute trajectoire rencontre forcément un obstacle avant de parcourir une longueur  $L_{max} > 0$  donnée (on dit que  $L_{max}$  est "l'horizon du billard") alors on déduit qu'il y a un coefficient d'instabilité  $\bar{\lambda} > 1$  par unité de longueur uniforme. On déduit que la dynamique est uniformément hyperbolique.

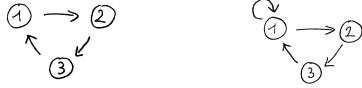
## B.4 Chapitre Dynamique probabiliste sur les graphes

### B.4.1 "Matrice d'adjacence d'un graphe et entropie"

#### Exercice B.4.1. "Matrice d'adjacence d'un graphe et entropie"

Si  $\Gamma$  est un graphe fini orienté avec  $m$  sommets, sa **matrice d'adjacence**  $\mathcal{L}$  est définie par  $\mathcal{L}_{j,i} = 1$  si  $i \rightarrow j$  (i.e. une arête relie  $i$  vers  $j$ ), et  $\mathcal{L}_{j,i} = 0$  sinon.

1. Ecrire la matrice d'adjacence  $\mathcal{L}$  pour les exemples suivants de graphes.



**Solution :** Pour le premier graphe,  $\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Pour le deuxième graphe,

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Pour un graphe quelconque  $\Gamma$ , montrer que le nombre de chemins reliant les sommets  $i$  à  $j$  au temps  $t \in \mathbb{N}$ , noté<sup>3</sup>  $\mathcal{N}_{i \rightarrow j}(t) := \#\{\text{chemins } i \rightarrow j \text{ au temps } t\}$  est donné par

$$\mathcal{N}_{i \rightarrow j}(t) = (\mathcal{L}^t)_{j,i} \quad (\text{B.4.1})$$

Déduire une formule pour

$$\mathcal{N}(t) := \{\text{chemins périodiques de période } t\}.$$

**Solution 1 :** D'après la formule du produit de deux matrices, on a

$$(\mathcal{L}^2)_{j,i} = \sum_{k=1}^m \mathcal{L}_{j,k} \mathcal{L}_{k,i}$$

et donc pour  $t \geq 1$  quelconque

$$(\mathcal{L}^t)_{j,i} = \sum_{k_1, \dots, k_{t-1}=1}^m (\mathcal{L}_{j,k_{t-1}} \dots \mathcal{L}_{k_2,k_1} \mathcal{L}_{k_1,i})$$

Comme la matrice  $\mathcal{L}$  est formée seulement d'éléments 1 ou 0 alors  $(\mathcal{L}_{j,k_{t-1}} \dots \mathcal{L}_{k_2,k_1} \mathcal{L}_{k_1,i}) = 1$  si tous les éléments sont 1 auquel cas cela signifie que  $i \rightarrow k_1 \rightarrow k_2 \dots \rightarrow k_{t-1} \rightarrow j$  est un chemin de longueur  $t$  possible et sinon  $(\mathcal{L}_{j,k_{t-1}} \dots \mathcal{L}_{k_2,k_1} \mathcal{L}_{k_1,i}) = 0$ . Donc

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}^t)_{j,i} &= \sum_{\text{chemins } i \rightarrow j \text{ au temps } t} 1 \\ &= \mathcal{N}_{i \rightarrow j}(t) \end{aligned}$$

**Solution 2 :** Procédons par récurrence sur  $t$  pour montrer la proposition (B.4.1).  $P_1$  est vraie d'après la définition de la matrice d'adjacence. Supposons que  $P_t$  est

---

3. Le signe  $\#$  veut dire "cardinal" c'est à dire "nombre de .."

vraie. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{i \rightarrow j}(t+1) &= \sum_{k=1}^m \mathcal{N}_{i \rightarrow k}(t) \mathcal{N}_{k \rightarrow j}(1) = \sum_{k=1}^m \mathcal{N}_{k \rightarrow j}(1) \mathcal{N}_{i \rightarrow k}(t) \\ &= \sum_{k=1}^m (\mathcal{L})_{j,k} (\mathcal{L}^t)_{k,i} = (\mathcal{L}^{t+1})_{j,i}. \end{aligned}$$

Donc  $P_{t+1}$  est vraie.

On a

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(t) &:= \{\text{chemins périodiques de période } t\} = \sum_i \mathcal{N}_{i \rightarrow i}(t) \\ &= \sum_i (\mathcal{L}^t)_{i,i} = \text{Tr}(\mathcal{L}^t). \end{aligned}$$

3. Supposons la matrice  $\mathcal{L}$  **mélangeante**. On définit l'**entropie topologique** du graphe par

$$h_{\text{top}}(\Gamma) := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \mathcal{N}_{i \rightarrow j}(t)$$

c'est à dire le taux de croissance exponentiel de la complexité des chemins, car on peut écrire :  $\#\{\text{chemins}\} = e^{th_{\text{top}} + o(t)}$ . Montrer que

$$h_{\text{top}}(\Gamma) = \log \lambda_1$$

où  $\lambda_1$  est la valeur propre dominante de la matrice d'adjacence. Calculer  $h_{\text{top}}(\Gamma)$  pour l'exemple précédent.

**Solution :** d'après le théorème de Perron Frobenius 4.1.18, si la matrice  $\mathcal{L}$  est mélangeante alors elle a une valeur propres strictement dominante  $\lambda_1 > |\lambda_2| > 0$  et

$$\mathcal{L}^t \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \lambda_1^t |U_1\rangle \langle V_1| \left( 1 + O\left(\frac{|\lambda_2|}{\lambda_1}\right)^t \right)$$

avec les éléments de  $U_1, V_1$  tous non nuls positifs et  $\langle V_1 | U_1 \rangle = 1$ . Donc

$$\mathcal{N}_{i \rightarrow j}(t) = (\mathcal{L}^t)_{j,i} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \lambda_1^t \langle \delta_j | U_1 \rangle \langle V_1 | \delta_i \rangle \left( 1 + O\left(\frac{|\lambda_2|}{\lambda_1}\right)^t \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \log \mathcal{N}_{i \rightarrow j}(t) &= \frac{1}{t} \log \lambda_1 + \frac{1}{t} \log (\langle \delta_j | U_1 \rangle \langle V_1 | \delta_i \rangle) \\ &\quad + \frac{1}{t} \log \left( 1 + O\left(\frac{|\lambda_2|}{\lambda_1}\right)^t \right) \\ &\xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \log \lambda_1. \end{aligned}$$

Donc  $h_{\text{top}}(\Gamma) = \log \lambda_1$ .

La matrice  $\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  est mélangeante et avec **xcas** on écrit  $L := [[1.,0,1],[1,0,0],[0,1,0]]$  ;  
 $\text{eigenvals}(L)$  ;  $\text{abs}(\text{eigenvals}(L)[1])$  et obtient  $\lambda_1 = 1.46\dots$ ,  $|\lambda_2| = 0.82\dots$

## B.4.2 « Internet Google rank »

### Exercice B.4.2. « Internet Google rank »

ref : Brin [6]p.104, **Page rank sur Wikipedia**. L'algorithme de Brin et Page a été breveté pour Google en 1997 et a pris fin en 2011.

On considère le graphe  $G$  où les sommets  $i$  sont les pages webs qui existent sur le réseau internet,  $i = 1 \rightarrow N$ , et avec une arête  $i \rightarrow j$  si la page  $i$  possède un lien html vers la page  $j$ . On note  $L(i) \geq 0$  le nombre de liens de la page  $i$  vers d'autres pages.

Le graphe modifié  $\tilde{G}$  est le graphe  $G$  auquel on rajoute un sommet noté  $\{0\}$  et des arêtes  $0 \rightarrow i$ ,  $i \rightarrow 0$ ,  $\forall i = 1 \dots N$ . Soit  $0 < p < 1$  un paramètre appelé damping (amortissement).

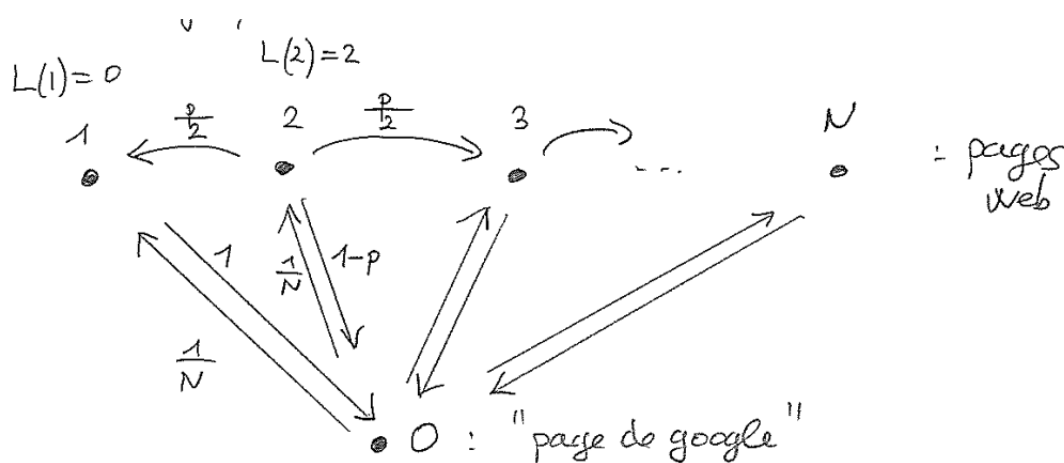
On définit la matrice  $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_{i,j})_{i,j=0 \rightarrow N}$  par :  $\mathcal{L}_{0,0} = 0$  et pour  $i, j \neq 0$ ,

$$\mathcal{L}_{i,0} = \frac{1}{N}, \quad \mathcal{L}_{0,i} = \begin{cases} 1 & \text{si } L(i) = 0 \\ 1-p & \text{si } L(i) \geq 1 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}_{j,i} = \begin{cases} \frac{1}{L(i)}p & \text{si } i \rightarrow j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que la matrice  $\mathcal{L}$  est **stochastique** et **mélangeante**. Que déduit t-on sur le spectre de  $\mathcal{L}$  ?

**Solution** : voici un exemple de graphe avec  $L(1) = 0$  et  $L(2) = 2$ .



donnant la matrice

$$\mathcal{L} = \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & \dots & N \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ N \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1-p & \dots & \\ \frac{1}{N} & 0 & \frac{p}{2} & & \\ \frac{1}{N} & \vdots & 0 & & \\ \vdots & & \frac{p}{2} & & \\ \frac{1}{N} & & \vdots & & \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Dans la première colonne on a  $\sum_{j=1}^N \frac{1}{N} = 1$ . Dans une colonne  $i \geq 1$  telle que  $L(i) = 0$  on a  $\sum_j \mathcal{L}_{j,i} = \mathcal{L}_{0,i} = 1$ . Dans une colonne  $i \geq 1$  telle que  $L(i) > 0$  on a  $\sum_j \mathcal{L}_{j,i} = (1-p) + L(i) \left(\frac{p}{L(i)}\right) = 1$ . Dans tous les cas, on a  $\sum_j \mathcal{L}_{j,i} = 1$  donc la matrice est **stochastique**.

On suppose qu'il y a deux sites  $a, b$  connectés, cad que le lien  $a \rightarrow b$  existe. Alors au temps  $t = 4$ , on peut rejoindre tous sommets.  $\forall i, j \geq 1$  on a :

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow i \rightarrow 0 \rightarrow i \rightarrow 0 \\ 0 &\rightarrow a \rightarrow b \rightarrow 0 \rightarrow i \\ i &\rightarrow 0 \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow 0 \\ i &\rightarrow 0 \rightarrow j \rightarrow 0 \rightarrow j \end{aligned}$$

Donc la matrice  $\mathcal{L}$  est **mélangeante**. D'après le théorème de Perron Forbenius 4.1.18,  $\mathcal{L}$  a une valeur propres strictement dominante  $\lambda_1 = 1 > |\lambda_2| > 0$  (car  $\mathcal{L}$  est stochastique) et

$$\mathcal{L}^t \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} |U_1\rangle\langle V_1| \left(1 + O\left(\frac{|\lambda_2|}{\lambda_1}\right)^t\right)$$

avec les éléments de  $U_1, V_1$  tous non nuls positifs et  $\langle V_1|U_1\rangle = 1$ . De plus  $V_1 =$

$$(1, 1, \dots, 1) \text{ car } \mathcal{L} \text{ est stochastique, donc } 1 = \langle V_1|U_1\rangle = \sum_{j=0}^N u_j \text{ et } U_1 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} \text{ re-}$$

présente une distribution de probabilité sur le graphe appelé état d'équilibre. Les  $u_j$  sont les probabilités de présence sur chaque page web  $j$  si on suivait un mouvement aléatoire sur le réseau internet en choisissant des liens au hasard.

2. Lorsqu'un internaute fait une requête de recherche à "google search" avec des mots clefs, le classement envoyé par google des pages web ("Rankpage") est donné par l'ordre décroissant des composantes  $(u_i)_i$  de l'état d'équilibre de la matrice  $\mathcal{L}$  (et après application d'un filtre relatif aux mots clefs demandés). Pourquoi cette ordre est pertinent ?

**Solution :** Google trie les pages webs  $i_1, i_2, \dots, i_N$  par ordre décroissant des composantes de l'état d'équilibre

$$u_{i_1} \geq u_{i_2} \geq \dots \geq u_{i_N}.$$

3. Trouver une majoration de  $|\lambda_2|$  (la deuxième plus grande valeur propre de  $\mathcal{L}$ ).
4. Google calcule les composantes de l'état d'équilibre  $u_i$  régulièrement (tous les quelques jours). Quel algorithme efficace proposez vous pour faire ce calcul ?

**Solution :** la première fois on choisit  $u(0) = \left(\frac{1}{N+1}, \frac{1}{N+1}, \dots, \frac{1}{N+1}\right)$  qui est une distribution de probabilité uniforme sur les sites. On itère la formule

$$u(t+1) = \mathcal{L}u(t).$$

Ce calcul se fait pour chaque composante, il est de complexité  $O(N)$ . D'après le théorème de Perron Forbenius, rapidement on a convergence vers l'état d'équilibre

$$u(t) = \mathcal{L}^t u(0) \rightarrow U_1 \langle V_1 | u(0) \rangle = U_1$$

Si la matrice  $\mathcal{L}$  a un peu changée, on refais le calcul, mais en partant de l'état d'équilibre précédent.

### B.4.3 « Algorithme de MonteCarlo pour le modèle d'Ising »

#### Exercice B.4.3. « Algorithme de MonteCarlo pour le modèle d'Ising »

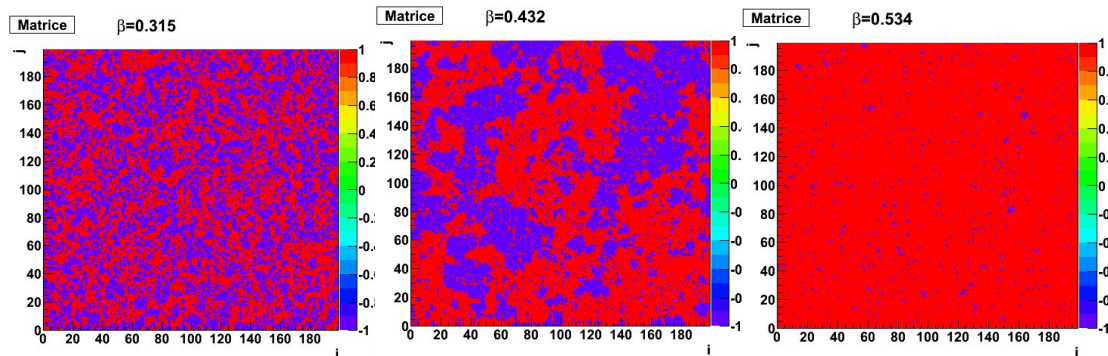


FIGURE B.4.1 – Resultat de l'algorithme de Monte-Carlo pour le modèle d'Ising, aux températures  $\beta = 0.3$  (désordre),  $0.4$  (transition de phase) et  $0.5$  (ordre magnétique).

On considère un réseau  $N \times N$  périodique dont les sites sont notés  $X = (x, y)$  et dont les variables sont  $f_X = \pm 1$  et modélisent des spins (up/down). Si deux sites sont voisins on note  $X \sim Y$ . Une configuration des spins est un champ donné :  $f = (f_X)_X$ . Son énergie ferromagnétique est :

$$E(f) := \sum_X \sum_{Y \text{ tq } X \sim Y} (-f_X \cdot f_Y)$$

1. Combien y a-t-il de sites ? Combien de configurations possibles ? Quelles configurations donnent l'énergie minimale ? et maximale ?

**Solution :** Il y a  $N^2$  sites. Chaque site  $X$  a deux états possibles  $f_X = \pm 1$  donc il y a  $2^{N^2}$  configurations  $f$  possibles. Par exemple  $N = 100$  donne  $2^{100^2} \sim 10^{3010}$ .

L'énergie  $E(f)$  est minimale si  $(-f_X \cdot f_Y)$  est minimale, soit  $f_X \cdot f_Y$  maximal. Cela donne les deux configurations  $f : f_X = +1, \forall X$  ou  $f : f_X = -1, \forall X$  appelées "état ferromagnétique" d'énergie  $E(f) = -4N^2$ .

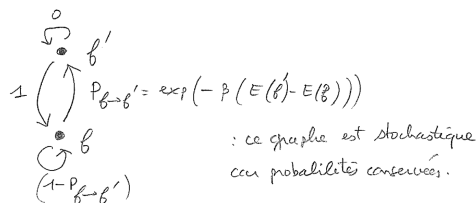
L'énergie  $E(f)$  est maximale si  $(-f_X \cdot f_Y)$  est maximale, soit  $f_X \cdot f_Y$  minimale. Si  $N$  est pair, cela est possible pour les deux configurations où les spins sont alternés. appelées "état anti-ferromagnétique" d'énergie  $E(f) = 4N^2$ .

2. L'algorithme d'évolution suivant est appelé **algorithme de montecarlo**.  $\beta \geq 0$  est un paramètre fixé qui est l'inverse de la température :  $\beta = 1/(k_b T)$ .
  - (a) A l'instant  $n = 0$ , on part d'une configuration  $f$  choisie au hasard.
  - (b) On choisit un site  $X$  au hasard, et on note  $f'$  la configuration identique à  $f$  sauf au site  $X$  où le spin est opposé :  $f'_X = -f_X$  (spin opposé).
  - (c) A l'instant  $n + 1$ ,
    - i. Si  $E(f') < E(f)$  on choisit la configuration  $f'$
    - ii. Si  $E(f') \geq E(f)$  on choisit la configuration  $f'$  avec la probabilité  $P_{f \rightarrow f'} = \exp(-\beta \cdot (E(f') - E(f)))$  (et on reste donc avec  $f$  avec la probabilité complémentaire).
  - (d) On revient en (b) pour poursuivre l'évolution du champ de spins.

Montrer que cet algorithme correspond à une matrice  $2 \times 2$  concernant seulement les 2 états  $f, f'$ , qui est **stochastique** et **réversible** pour la mesure de Boltzmann :

$$u_f = \frac{1}{Z} \exp(-\beta E(f))$$

**Solution :** Concernant deux sites on a le graphe (et matrice) stochastique suivant :



Cela donne

$$\mathcal{L}_{f',f} u_f = e^{-\beta(E(f')-E(f))} \frac{1}{Z} e^{-\beta E(f)} = \frac{1}{Z} e^{-\beta E(f')}$$

$$\mathcal{L}_{f,f'} u_{f'} = 1 \frac{1}{Z} e^{-\beta E(f')} = \frac{1}{Z} e^{-\beta E(f')}$$

donc  $\mathcal{L}_{f',f} u_f = \mathcal{L}_{f,f'} u_{f'}$  montrant que la matrice  $\mathcal{L}$  est réversible pour la distribution de Boltzmann.

3. Dans cette description de toutes les configurations en terme de graphe, quels sont les sommets du graphes ? il a combien de sommets ? et quelles sont les arêtes et leur probabilité ?

**Solution :** Dans le graphe associé à la matrice  $\mathcal{L}$  totale, il y a  $2^{N^2}$  sommets, chaque sommet est une configuration  $f$  reliée à d'autres configurations  $f'$  si  $f$  et  $f'$  diffèrent en un site seulement. Donc chaque site est relié à  $N^2 - 1$  autres sommets. Les probas sont celles de la question deux, mais pondérées par le facteur  $\frac{1}{(N^2-1)}$ .

- B.5** Chapitre Dynamique déterministe expansive
- B.6** Chapitre Dynamique déterministe hyperbolique
- B.7** Chapitre Le modele de Lorenz en hydrodynamique.  
Le moulin de Lorenz et son attracteur etrange
- B.8** Chapitre Morphogenese et ondes non linéaires



# Annexe C

## Programmes d'illustration en langage python et C++

### C.1 Programmes en langage python

#### C.1.1 fichier syracuse.py pour la Section 1.1.1.

```
def syracuse(x) :  
  
    seq = [x]  
    if x < 1:  
        return []  
    while x > 1:  
        if x % 2 == 0:  
            x = x / 2  
        else:  
            x = (3 * x + 1)/2  
        seq.append(x)  
    return seq
```

```
syracuse(7)
```

**Execution du fichier python :**

```
python syracuse.py  
[7, 11, 17, 26, 13, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1]
```

## C.2 Programmes en langage C++

### C.2.1 fichier syracuse.cc pour la Section 1.1.1.

```
#include <iostream>
using namespace std;

int main()
{
    int x=7;
    cout<<x;

    while (x!=1)
    {
        if(x%2==0)
            x=x/2;
        else
            x=(3*x+1)/2;
        cout<<" , "<<x;
    }
    cout<<endl;
}
```

#### Compilation et execution du fichier c++

```
g++ syracuse.cc -o syracuse
./syracuse
7,11,17,26,13,20,10,5,8,4,2,1
```