Chapitre 8

Dynamique de champs et morphogénèse

Dans ce chapitre on étudie un système dynamique de dimension infinie. L'état d'un tel système est décrit à une date t par une fonction $u(x)$ aussi appelée "champs". La variable d'espace est $x \in \mathbb{R}^d$ et pour simplifier notre étude sera essentiellement en dimension $d = 1$. Cette fonction u peut avoir plusieurs composantes (et éventuellement avoir une interprétation géométrique comme la section d'un espace fibré).

Article de A. Turing 1952 : La morphogénèse signifie "formation des structures et formes". L'article fondateur est celui de A. Turing en 1952. En Section 8.2 on présentera un modèle spatial de type "réaction-diffusion" issu de l'article de Turing. Le but de Turing était de comprendre la croissance des cellules dans les organismes vivants. En 1995, Kondo et al. publient un article montrant la pertinence de ce modèle pour les couleurs sur le poisson "angelfish". Voir figure 8.0.1.

Références :
- Livre de Cross et al.[9]
- Livre de C. Misbah "Dynamiques complexes et morphogénèse"
- Page web de Arnd Scheel.

8.1 Modèle à une dimension et une composante

Pour commencer nous considérons un modèle assez simple en dimension spatiale $d = 1$ qui à une composante, c'est à dire que le champ est $u(x,t) \in \mathbb{R}$. Le but est de montrer la démarche pour l'étude linéaire des instabilités et la formation de motif dans ce cadre simple.

8.1.1 Modèle de Swift-Hohenberg

Ce modèle à une dimension concerne une fonction $u(x,t) \in \mathbb{R}$ sur le domaine $x \in \mathbb{R}$ et le temps $t \in \mathbb{R}$. On connait les valeurs $u(x, t = 0)$ pour tout x et son évolution est régit

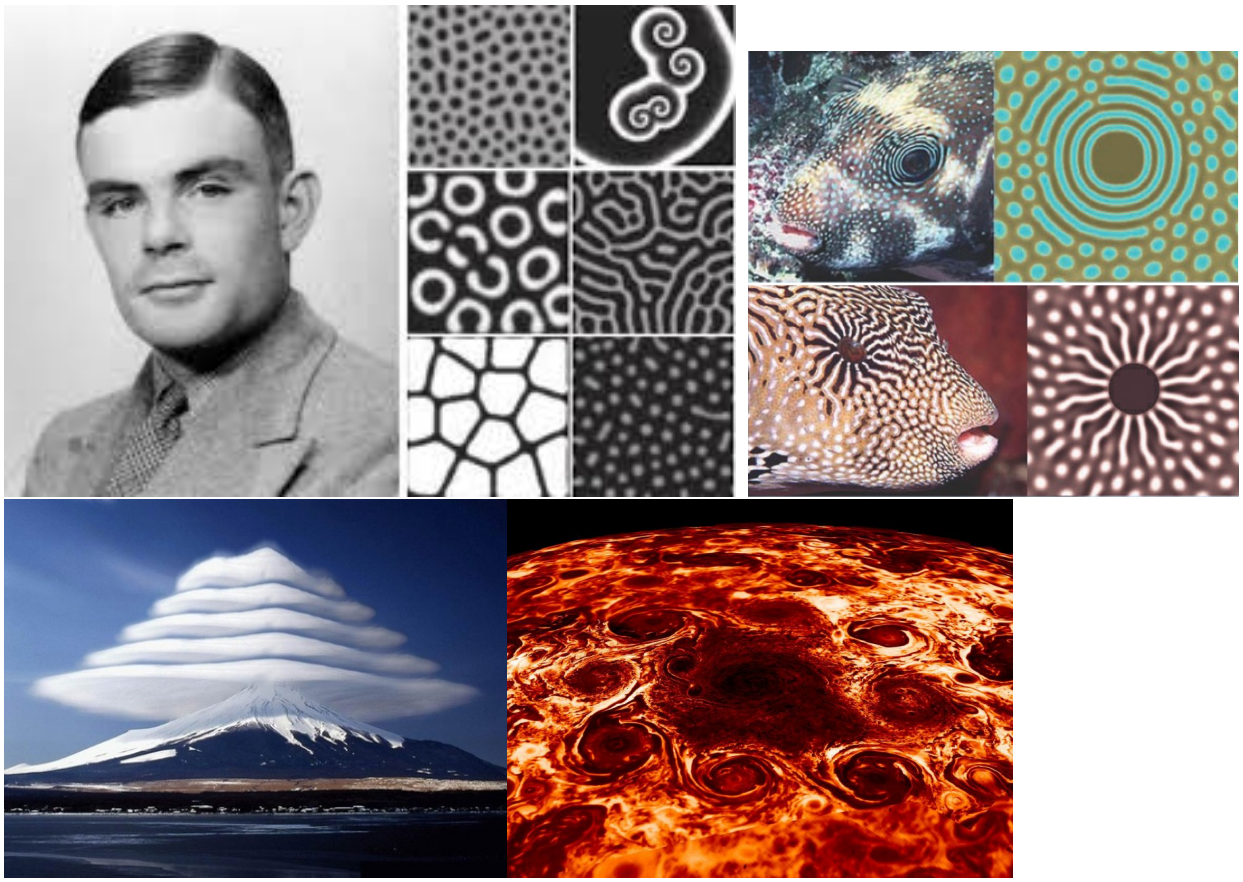


FIGURE 8.0.1 – (a) Turing et formes appelées “motifs”. (b) motifs sur le poisson modélisées par le modèle de réaction - diffusion. (c) motif de nuages (d) structure de cyclones au pôle nord de Jupiter.

par l'équation de Swift-Hohenberg :

$$\boxed{(\partial_t u)(x,t) = ru(x,t) - \left(\partial_x^2 + 1\right)^2 u(x,t) - (u(x,t))^3} \tag{8.1.1}$$

avec le paramètre $r \in \mathbb{R}$. Mathématiquement c'est une équation différentielle aux dérivées partielles non linéaire (EDP non linéaire).

Ce modèle permet entre entre de décrire l'expérience des **Rouleaux de Rayleih-Bénard** ou les **ondes gravitaire de capillarité**. Voir [9] chap.2.

8.1.2 Analyse de la stabilité d'une solution homogène stationnaire

Recherche d'une solution homogène stationnaire

On cherche une solution homogène stationnaire $u(x,t) = p$ avec $p \in \mathbb{R}$ fixé. L'équation (8.1.1) donne

$$\begin{aligned} 0 &= rp - p - p^3 \\ \Leftrightarrow \quad 0 &= p\left((r-1) - p^2\right) \\ \Leftrightarrow \quad p = 0 &\quad \text{ou } p = \pm\sqrt{r-1} \text{ si } r \geq 1. \end{aligned}$$

Dans la suite on s'intéresse à la solution trouvée $p = 0$ (il y en a deux autres), c'est à dire au champ $u(x,t) = 0$ qui est solution de (8.1.1).

Linéarisation du système près de la solution homogène et stationnaire

On va étudier la stabilité de la solution $p = 0$ vis à vis des petites perturbations v. Supposons donc

$$u(x,t) = p + v(x,t) = v(x,t)$$

avec une petite perturbation $|v(x,t)| \ll 1$. On a donc

$$v^3 \ll v^2 \ll v \ll 1$$

c'est à dire que l'on peut négliger les termes de degré supérieurs à 1. L'équation (8.1.1), en négligeant le terme v^3, donne :

$$\boxed{\partial_t v = rv - \left(\partial_x^2 + 1\right)^2 v} \tag{8.1.2}$$

Résolution du système linéarisé

Mathématiquement (8.1.2) est une équation différentielle aux dérivées partielles linéaire à coefficients constants. Il est donc possible de la résoudre par l'analyse de Fourier. Pour cela, on pose :

$$\tilde{v}(\xi,\omega) := \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^2} \int e^{-i\xi x - i\omega t} v(x,t)\, dxdt \in \mathbb{C} \quad \text{: transformée de Fourier}$$

avec la fréquence spatiale $\xi \in \mathbb{R}$ (ou vecteur d'onde réel) et fréquence temporelle $\omega \in \mathbb{C}$ (possiblement complexe). Inversement

$$v(x,t) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^2} \int e^{i\xi x + i\omega t} \tilde{v}(\xi,\omega)\, d\xi d\omega \in \mathbb{C} \quad \text{: transformée de Fourier inverse} \tag{8.1.3}$$

qui exprime $v(x,t)$ comme superposition de modes de Fourier (ou ondes planes) $e^{i\xi x + i\omega t}$ avec des amplitudes $\tilde{v}(\xi,\omega) \in \mathbb{C}$. Le **théorème de Fourier** dit que toute fonction v

peut s'écrire sous cette forme et de façon unique. L'intérêt de cette décomposition est que les opérateurs de dérivées agissent de façon très simple (car les variables x, t sont dans l'exponentielle) :

$$\partial_t v = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^2} \int e^{i\xi x + i\omega t} (i\omega)\, \tilde{v}(\xi, \omega)\, d\xi d\omega, \qquad \partial_x v = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^2} \int e^{i\xi x + i\omega t} (i\xi)\, \tilde{v}(\xi, \omega)\, d\xi d\omega.$$

Ainsi (8.1.2) s'écrit :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^2} \int e^{i\xi x + i\omega t} \left(i\omega \tilde{v}(\xi, \omega)\right) d\xi d\omega &= \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^2} \int e^{i\xi x + i\omega t} r \tilde{v}(\xi, \omega)\, d\xi d\omega \\
&\quad - \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^2} \int e^{i\xi x + i\omega t} \left((i\xi)^2 + 1\right)^2 \tilde{v}(\xi, \omega)\, d\xi d\omega \\
\Leftrightarrow \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^2} \int e^{i\xi x + i\omega t} \left(i\omega - r + \left((i\xi)^2 + 1\right)^2\right) \tilde{v}(\xi, \omega)\, d\xi d\omega &= 0
\end{aligned}$$

et d'après l'unicité de la décomposition de Fourier cela est équivalent à

$$\left(i\omega - r + \left((i\xi)^2 + 1\right)^2\right) \tilde{v}(\xi, \omega) = 0, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Posons $\sigma = i\omega \in \mathbb{C}$. Alors si $\tilde{v}(\xi, \omega) \neq 0$, c'est équivalent à

$$\boxed{\sigma(\xi) := i\omega = r - \left(1 - \xi^2\right)^2.} \tag{8.1.4}$$

Cette relation entre ω et ξ s'appelle une **relation de dispersion**.

Pour exprimer le résultat, rappelons que $v(x, t = 0) =$ est supposé connu. Cela s'exprime par

$$\begin{aligned}
v(x, t = 0) &\underset{(8.1.3)}{=} \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^2} \int e^{i\xi x} \tilde{v}(\xi, \omega)\, d\xi d\omega \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{i\xi x} \tilde{v}_0(\xi)\, d\xi
\end{aligned}$$

avec sa transformée de Fourier $\tilde{v}_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\xi x} v(x, t = 0)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \tilde{v}(\xi, \omega)\, d\omega$ aussi connue. Alors

$$v(x, t) \underset{(8.1.3, 8.1.4)}{=} \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^2} \int e^{i\xi x + i\omega t} \tilde{v}(\xi, \omega)\, \delta\left(i\omega - \sigma(\xi)\right) d\xi d\omega \tag{8.1.5}$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^2} \int e^{i\xi x + \sigma(\xi) t} \tilde{v}(\xi, \omega)\, d\xi \tag{8.1.6}$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)} \int e^{\sigma(\xi) t} e^{i\xi x} \tilde{v}(\xi)\, d\xi \tag{8.1.7}$$

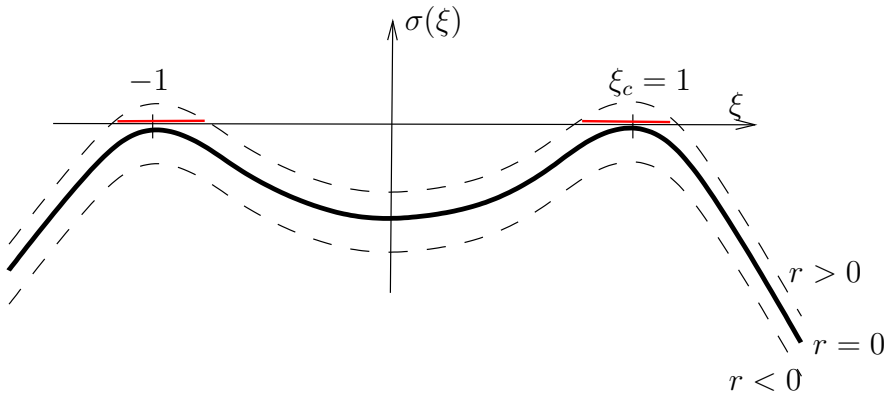
(Rem : la contrainte (8.1.4) qui relie ω à ξ a fait disparaitre l'intégrale sur ω).

Diagramme de stabilité et croissance d'un motif

On discute maintenant le comportement à temps long dans l'expression (8.1.5). D'après (8.1.4), pour chaque terme ξ, on a $\sigma(\xi) \in \mathbb{R}$ (réel) et

$$\begin{aligned} e^{\sigma(\xi)t} &\underset{t\to+\infty}{\to} +\infty \text{ si } \sigma(\xi) > 0 \quad &&: \text{instabilité} \\ &\underset{t\to+\infty}{\to} 0 \text{ si } \sigma(\xi) < 0 \quad &&: \text{stabilité} \end{aligned}$$

Par conséquent le **mode** $\xi \in \mathbb{R}$ **est stable** si et seulement si $\sigma(\xi) < 0$. Utilisant (8.1.4) on trace la courbe $\sigma \in \mathbb{R}$ en fonction $\xi \in \mathbb{R}$, pour différents paramètres $r \in \mathbb{R}$.



Il apparait que :

— Pour $r < 0$ tous les modes $\xi \in \mathbb{R}$ sont stables (car $\sigma(\xi) < 0$).

— Pour $r = 0$, **il apparait deux modes instables** $\xi = \pm 1$. On dit que $r = 0$ est le **seuil d'instabilité.**

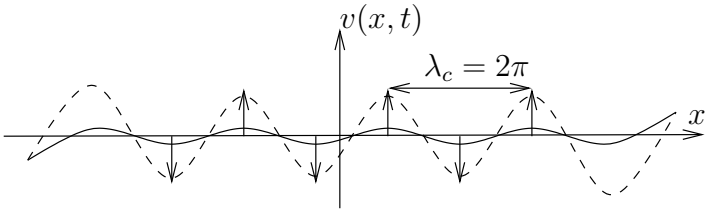
— Pour $0 < r \ll 1$, les modes modes instables ξ sont dans un petit intervalle (rouge) autour de $\xi_c = \pm 1$.

Ainsi pour $r = 0$ (ou $0 < r \ll 1$ plutot), les modes $\xi = \pm\xi_c$ avec $\xi_c = 1$, vont croitre et les autres décroitre. Comme l'onde $v(x, t = 0)$ initiale est réelle on a $\tilde{v}(-\xi) = \overline{\tilde{v}(\xi)}$. On notera $\tilde{v}(\xi) = |\tilde{v}(\xi)| e^{i\arg(\tilde{v}(\xi))} \in \mathbb{C}$. On a $\sigma(-\xi_c) = \sigma(\xi_c) > 0$ au seuil. Eq. (8.1.5) donne (en ne gardant que les modes $\pm\xi_c$)

$$\begin{aligned} v(x,t) &\sim \frac{1}{(\sqrt{2\pi})} e^{\sigma(\xi_c)t} e^{i\xi_c x} \tilde{v}(\xi_c) + \frac{1}{(\sqrt{2\pi})} e^{\sigma(-\xi_c)t} e^{-i\xi_c x} \tilde{v}(-\xi_c) \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})} e^{\sigma(\xi_c)t} |\tilde{v}(\xi_c)| \left(e^{i(\xi_c x + \arg(\tilde{v}(\xi_c)))} + e^{-i(\xi_c x + \arg(\tilde{v}(\xi_c)))} \right) \\ &= A(t) \cos(\xi_c x + \arg(\tilde{v}(\xi_c))) \end{aligned} \tag{8.1.8}$$

avec l'amplitude $A(t) = \frac{2}{(\sqrt{2\pi})} |\tilde{v}(\xi_x)| e^{\sigma(\xi_c)t}$ qui diverge car $\sigma(\xi_c) > 0$ pour le vecteur d'onde $\xi_c = 1$.

On a donc montré que, partant de la solution stationnaire et homogène $u = 0$, si $0 < r \ll 1$, cette solution est instable, et en présence de petites fluctuations $v(x, t)$, un **motif périodique apparait et s'amplifie,** de longueur d'onde $\lambda_c = \frac{2\pi}{\xi_c} = 2\pi$.



Brisure spontanée de symmétrie : Dans la solution (8.1.8) qui apparait, la phase $\varphi = \arg(\tilde{v}(\xi_c))$ (qui détermine la position du maximum de l'onde) dépend de la condition initiale. A priori toutes les phases $\varphi \in S^1$ sont possibles. On ne peut pas prédire cette phase si on ne connait pas précisément la condition initiale. Ce phénomène s'appelle **brisure spontanée de symmétrie** en physique [1].

8.1.3 Stabilité du motif. Etude non linéaire.

L'analyse précedente a montré qu'un motif $v(x,t)$ s'amplifie si $0 < r \ll 1$. Cependant on a fait l'hypothèse que $|v| \ll 1$ et on a négligé les termes non linéaires. Si $|v(x,t)|$ augmente, les termes non linéaires vont jouer un rôle et éventuellement stabiliser le motif. Pour faire cette étude prenons la solution trouvée (8.1.8), $u = A\cos(x)$, dans le cadre linéaire, supposons que l'amplitude se stabilise vers une valeur $A \in \mathbb{R}$ que l'on recherche. (Pour simplifier on considère la phase $\varphi = 0$. Elle ne joue pas de rôle). L'équation de départ (8.1.1) donne alors pour $u = A\cos(x)$:

$$\partial_t u = ru - \left(\partial_x^2 + 1\right)^2 u - u^3$$

$$\Leftrightarrow 0 \quad = \quad rA\cos(x) - \left(\partial_x^2 + 1\right)^2 A\cos(x) - (A\cos(x))^3, \quad \forall x$$

On développe $\left(\partial_x^2 + 1\right)^2 = 1 + 2\partial_x^2 + \partial_x^4$ et on utilise $(\cos x)^3 = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos(3x)$ donnant

$$\begin{aligned} 0 &= rA\cos x - A\cos x + 2A\cos x - A\cos x - A^3\left(\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos(3x)\right) \\ &= \left(rA - \frac{3}{4}A^3\right)\cos x - A^3\frac{1}{4}\cos(3x), \quad \forall x \end{aligned} \tag{8.1.9}$$

D'après l'unicité de la décomposition en série de Fourier, le premier terme donne

$$rA - \frac{3}{4}A^3 = A\left(r - \frac{3}{4}A^2\right) = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ ou } A = \sqrt{\frac{4}{3}r},$$

La solution $A = 0$ ne nous interesse pas (car c'est la solution instable), on garde la solution stable

$$\boxed{A = \sqrt{\frac{4}{3}r}}$$

1. Il est similaire à la situation plus simple d'une particule immobile à un maximum de potentiel $V(x)$ en dimension $d = 1$ et qu'une petite fluctuation en position peut faire basculer vers la droite ou la gauche.

On a donc montré que le motif de la figure précedente se stabilise à cette amplitude.

Remarque 8.1.1. Le deuxième terme de (8.1.9) impose $A = 0$. Pour justifier que l'on garde la solution $A = \sqrt{\frac{4}{3}r}$, il faut remarquer dans ce calcul que partant de l'expression $u = A\cos(x)$ de fréquence $\xi = 1$, le terme non linéaire u^3 a fait apparaitre $\cos(3x)$ de fréquence $\xi = 3$. Cela s'appelle **l'harmonique 3**. Il est donc judicieux de partir plutot d'une expression contenant cette harmonique (et par récurrence, on trouvera toutes les autres harmoniques). Un calcul plus complet suppose donc

$$u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n \cos(nx)$$

et l'on cherche par récurrence les amplitudes A_n. On retrouvera $A_1 = \sqrt{\frac{4}{3}r}$, et $|A_n| \ll A_1$ pour $n \neq 1$ qui sont des "corrections".

8.1.4 Simulation numérique

Voir Simulations numériques pour différents paramètres $r = 0.2, 1, 3$.

8.2 Modèle de réaction-diffusion à deux composantes

On présente maintenant un modèle toujours en dimension d'espace $d = 1$ (il se généralise en dimension $d \geq 1$), mais a deux composantes u_1, u_2. Cela complique l'étude par rapport au cas précédent. Cependant il n'y aura pas de termes ∂_x^4 mais seulement des termes ∂_x^2 dit de "diffusion". Pour cette raison on appelle ce modèle "**réaction-diffusion**". Cela modèle a été introduit par A. Turing en 1952. La démarche suivit est la même que pour le modèle précédent.

8.2.1 Modèle

Les inconnues sont

$$u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t)) \in \mathbb{R}^2$$

Remarque 8.2.1. On peut penser à $u_1(x,t), u_2(x,t)$ comme les concentrations de deux produits A, B au point $x \in \mathbb{R}$ et à l'instant $t \in \mathbb{R}$.

On suppose que l'on connait la loi d'évolution qui est une équation différentielle aux dérivées partielles non linéaire (EDP non linéaire) :

$$\boxed{\begin{cases} \partial_t u_1 &= f_1(u_1,u_2) + D_1\partial_x^2 u_1, \\ \partial_t u_2 &= f_2(u_1,u_2) + D_2\partial_x^2 u_1, \end{cases}} \tag{8.2.1}$$

où $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont des "fonctions de réaction" (non linéaires en générale) et $D_1, D_2 \geq 0$ sont des coefficient de diffusion.

Pour simplifier, on notera la matrice de diffusion :

$$\mathbb{D} := \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix},$$

et $f(u) = \begin{pmatrix} f_1(u) \\ f_2(u) \end{pmatrix}$, ainsi l'équation d'évolution (8.2.1) s'écrit :

$$\boxed{\partial_t u = f(u) + \mathbb{D}\partial_x^2 u.} \tag{8.2.2}$$

Remarque 8.2.2. Si on suppose $u(t)$ indépendant de x (c'est à dire homogène) alors on a système dynamique sur $\mathbb{R}^2$ qui est

$$\partial_t u = f(u) \tag{8.2.3}$$

donc vraiment plus simple à étudier. Si u(t, x) dépend de x, la diffusion $\mathbb{D}$ "couplent localement" les différentes dynamiques.

Exemple 8.2.3. Le **modèle de Gray-Scott** :

C'est l'équation (8.2.1) avec les fonctions de degré 2 données par :

$$\begin{cases} f_1(u_1, u_2) & = -(a+b)u_1 + u_1^2 u_2 \\ f_2(u_1, u_2) & = a(1-u_2) - u_1^2 u_2 \end{cases} \tag{8.2.4}$$

avec les paramètres $a, b > 0$ et en dimension $d = 2$. Voir videos ici.

Exemple 8.2.4. Le **modèle du Brusselator** ([9, p.105]). Inventé à Bruxelle pour modéliser la réaction chimique de Belousoz Jabostinski.

$$\begin{cases} f_1(u_1, u_2) & = a - (b+1)u_1 + u_1^2 u_2 \\ f_2(u_1, u_2) & = bu_1 - u_1^2 u_2 \end{cases} \tag{8.2.5}$$

8.2.2 Interprétation des équations du modèle de Gray Scott

On note u_1, u_2 les concentrations de composés notés A, B dans une solution chimique unidimensionelle. L'équation (8.2.1) avec (8.2.4), contient plusieurs termes que l'on interprète individuellement

— ajout de composé B au taux $a(1-u_2)$: c'est modélisé par le terme :

$$\partial_t u_2 = a(1-u_2).$$

— Réaction chimique :

$$2A + B \to 3A$$

c'est à dire que si 2 A et 1 B sont en présence alors B est transformé en A. C'est modélisé par les termes

$$\partial_t u_1 = +u_1^2 u_1, \quad \partial_t u_2 = -u_1^2 u_1.$$

en effet, $u_1^2 u_2$ est proportionnel à la probabilité de rencontre de A, A, B dans un élément d'espace.

— perte du composé A au taux $(a+b)\,u_1$, modélisé par le terme

$$\partial_t u_1 = -\,(a+b)\,u_1.$$

— Diffusion spatiale des composés : modélisé par

$$\partial_t u_1 = D_1 \partial_x u_1, \qquad \partial_t u_2 = D_2 \partial_x u_2$$

c'est l'équation de la diffusion (ou équation de la chaleur) de J. Fourier, qui a tendance à uniformiser les valeurs de u_1, u_2.

8.2.3 Analyse de la stabilité d'une solution homogène stationnaire

d'après Turing 1952 [43], et d'après [9, chap.3].

Recherche d'une solution homogène stationnaire

On suppose

$$u\,(x,t) = (p_1, p_2) = p \in \mathbb{R}^2$$

solution de (8.2.2). C'est à dire que on la suppose de valeur constante, indépendante de x(homogène) et de t (stationnaire).

Eq(8.2.2) donne :

$$\boxed{0 = f\,(p)\,.} \tag{8.2.6}$$

Cette équation signifie que p est point fixe du système dynamique homogène (8.2.3), mais n'est pas simple à résoudre en général.

Exemple 8.2.5. Pour le **modèle du Brusselator** (8.2.5) cela donne

$$p_1 = a, \quad p_2 = \frac{b}{a}. \tag{8.2.7}$$

Démonstration. On a d'après (8.2.5)

$$0 = f\,(p) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0 & = a - (b+1)\,p_1 + p_1^2 p_2 \\ 0 & = b p_1 - p_1^2 p_2 = p_1\,(b - p_1 p_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow p_2 = \frac{b}{p_1}, \qquad 0 = a - (b+1)\,p_1 + b p_1 = a - p_1 \Leftrightarrow p_1 = a, \quad p_2 = \frac{b}{a}.$$

□

Linéarisation du système près de la solution homogène et stationnaire

On pose

$$\boxed{u(x,t) = p + v(x,t)}$$

avec $v = (v_1, v_2)$ que l'on suppose petit : $|v| \ll 1$ et avec p solution de (8.2.6), $f(p) = 0$. On connait p et $v(x, t = 0)$ et on cherche $v(x,t)$ pour tout $x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$.

Alors (8.2.2) s'écrit au premier ordre en v :

$$\boxed{\partial_t v = \mathbb{A}v + \mathbb{D}\partial_x^2 v} \tag{8.2.8}$$

avec

$$\mathbb{A} := Df_p = \begin{pmatrix} \partial_{u_1} f_1 & \partial_{u_2} f_1 \\ \partial_{u_1} f_2 & \partial_{u_2} f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

la différentielle de f en p. Noter que (8.2.8) est une PDE linéaire à coef. constants.

Démonstration. Eq.(8.2.2) est :

$$\partial_t u = f(u) + \mathbb{D}\partial_x^2 u.$$

Notons $u = p + v$, alors d'après le développement de Taylor à l'ordre 1 :

$$f(u) = f(p+v) = f(p) + Df_p.v + O\left(v^2\right) = Df_p.v + O\left(v^2\right).$$

et $\partial_x^2 u = \partial_x^2 v$. On déduit (8.2.8). □

Exemple 8.2.6. Pour le modèle du Brusselator (8.2.5) et avec (8.2.7) cela donne

$$\begin{aligned} \mathbb{A} : &= Df_p = \begin{pmatrix} \partial_{u_1} f_1 & \partial_{u_2} f_1 \\ \partial_{u_1} f_2 & \partial_{u_2} f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -(b+1) + 2p_1p_2 & p_1^2 \\ b - 2p_1p_2 & -p_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-1 & a^2 \\ -b & -a^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{8.2.9}$$

Résolution du système linéarisé

Eq.(8.2.8) est une EDP linéaire à coefs constants en x, t, donc soluble par transformée de Fourier.

On pose :

$$\tilde{v}(\xi,\omega) := \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^2} \int e^{-i\xi x - i\omega t} v(x,t)\, dxdt \in \mathbb{C}^2 \quad : \text{transformée de Fourier}$$

avec la fréquence spatiale $\xi \in \mathbb{R}$ (ou vecteur d'onde) et fréquence temporelle $\omega \in \mathbb{R}$. Inversement

$$v(x,t) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^2} \int e^{i\xi x + i\omega t} \tilde{v}(\xi,\omega)\, d\xi d\omega \in \mathbb{C}^2 \quad : \text{transformée de Fourier inverse} \tag{8.2.10}$$

qui exprime $v(x,t)$ comme superposition de modes de Fourier (ou ondes planes) $e^{i\xi x+i\omega t}$. Alors (8.2.8) s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^2}\int e^{i\xi x+i\omega t}\left(i\omega\tilde{v}(\xi,\omega)\right)d\xi d\omega &= \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^2}\int e^{i\xi x+i\omega t}\mathbb{A}\tilde{v}(\xi,\omega)\,d\xi d\omega \\ &+\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^2}\int e^{i\xi x+i\omega t}\left(-\xi^2\right)\mathbb{D}\tilde{v}(\xi,\omega)\,d\xi d\omega\end{aligned}$$

Comme la décomposition de Fourier est unique on identifie les termes devant $e^{i\xi x+i\omega t}$ et on obtient $i\omega\tilde{v}=\mathbb{A}\tilde{v}-\xi^2\mathbb{D}\tilde{v}$ soit

$$\boxed{\mathbb{A}_\xi\tilde{v}=\sigma\tilde{v}} \tag{8.2.11}$$

avec

$$\sigma := i\omega\in\mathbb{C},$$

$$\mathbb{A}_\xi := \mathbb{A}-\xi^2\mathbb{D} \quad : \text{matrice } 2\times 2 \tag{8.2.12}$$

Etant donné une fréquence spatiale $\xi\in\mathbb{R}$ (i.e. un mode de Fourier), l'équation (8.2.11) est une "équation aux valeurs propres" de la matrice $\mathbb{A}_\xi$ donnant 2 valeurs propres $\sigma_\pm(\xi)=i\omega_\pm$ qui sont les fréquences temporelles de ce mode de Fourier et deux vecteurs propres associés $\tilde{v}_\pm(\xi)\in\mathbb{R}^2$ qui sont les amplitudes des deux composantes.

D'après la formule générale sur les valeurs propres d'une matrice 2×2, (A.1.4), on a

$$\sigma_\pm(\xi)=i\omega_\pm=\frac{1}{2}\left(\mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}_\xi\right)\pm\sqrt{\Delta}\right)\in\mathbb{C} \tag{8.2.13}$$

avec

$$\Delta := \left(\mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}_\xi\right)\right)^2-4\det\left(\mathbb{A}_\xi\right). \tag{8.2.14}$$

Et rappelons que

$$\sigma_++\sigma_-=\mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}_\xi\right), \qquad \sigma_+\sigma_-=\det\left(\mathbb{A}_\xi\right). \tag{8.2.15}$$

Remarque 8.2.7. La relation (8.2.13) entre les fréquences ω et ξ est souvent appelée **relation de dispersion** en physique.

En reprenant (8.2.10) on a obtenu que l'onde $v(x,t)$ évolue selon

$$v(x,t)=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^2}\sum_{+,-}\int e^{\sigma_\pm(\xi)t}e^{i\xi x}\tilde{v}_\pm(\xi)\,d\xi \tag{8.2.16}$$

avec $v(x,t=0)$ supposé connu qui détermine les vecteurs propres $\tilde{v}_\pm(\xi)$. (Rem : la contrainte (8.2.11) qui relie ω à ξ a fait disparaitre l'intégrale sur ω au profit d'une somme sur $\pm$).

Diagramme de stabilité

On discute maintenant le comportement à temps long dans l'expression (8.2.16). Pour chaque terme ξ, on a

$$e^{\sigma_\pm(\xi)t} = \underbrace{e^{\mathrm{Re}(\sigma_\pm(\xi))t}}_{module}\underbrace{e^{i\mathrm{Im}(\sigma_\pm(\xi))t}}_{oscillant}$$

donc

$$\left|e^{\sigma_\pm(\xi)t}\right| = e^{\mathrm{Re}(\sigma_\pm(\xi))t} \underset{t\to+\infty}{\to} +\infty \text{ si } \mathrm{Re}\left(\sigma_\pm\left(\xi\right)\right) > 0 \quad : \text{instabilité}$$
$$\underset{t\to+\infty}{\to} 0 \text{ si } \mathrm{Re}\left(\sigma_\pm\left(\xi\right)\right) < 0 \quad : \text{stabilité}$$

Par conséquent le mode $\xi \in \mathbb{R}$ est stable si $\sigma_+\left(\xi\right) < 0$ et $\sigma_-\left(\xi\right) < 0$. Comme $\sigma_\pm\left(\xi\right)$ sont les valeurs propres de la matrice $\mathbb{A}_\xi$, cette propriété peut être donnée par la matrice $\mathbb{A}_\xi$ directement :

Lemme 8.2.8. *Le mode de Fourier $\xi \in \mathbb{R}$ est **stable** (c'est à dire que $\sigma_+\left(\xi\right) < 0$ et $\sigma_-\left(\xi\right) < 0$) si et seulement si la matrice $\mathbb{A}_\xi$ vérifie :*

$$\mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}_\xi\right) < 0 \text{ et } \det\left(\mathbb{A}_\xi\right) > 0. \tag{8.2.17}$$

*Par ailleurs le mode est **oscillant** si et seulement si $\Delta < 0$ (définit en (8.2.14)).*

Remarque 8.2.9. De façon équivalentele mode ξ est **instable** si $\mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}_\xi\right) < 0$ ou $\det\left(\mathbb{A}_\xi\right) > 0$.

Cela se résumé avec le diagramme de stabilité de la figure 8.2.1.

Démonstration. On utilise l'expression (8.2.15) des valeurs propres. Il faut étudier les différents cas et sous cas :

- Si $\Delta > 0$ alors on a deux valeurs propres réelles $\sigma_- < \sigma_+$,
  - Si $\det\left(\mathbb{A}_\xi\right) = \sigma_-\sigma_+ < 0$ alors $\sigma_- < 0 < \sigma_+$ on a donc *instabilité.*
  - Si $\det\left(\mathbb{A}_\xi\right) = \sigma_-\sigma_+ > 0$,
    - Si $\mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}_\xi\right) = \sigma_+ + \sigma_- > 0$ alors $0 < \sigma_- < \sigma_+$ donc *instabilité.*
    - Si $\mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}_\xi\right) = \sigma_+ + \sigma_- < 0$ alors $\sigma_- < \sigma_+ < 0$ donc *stabilité.*
- Si $\Delta < 0$ alors on a deux valeurs propres complexes conjuguées $\sigma_\pm = R \pm iI$ avec $R = \mathrm{Re}\left(\sigma_\pm\right), I = \mathrm{Im}\left(\sigma_+\right) \in \mathbb{R}$. Il y a des oscillations. On a $\det\left(\mathbb{A}_\xi\right) = \sigma_-\sigma_+ = R^2 + I^2 > 0$ et $\mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}_\xi\right) = \sigma_+ + \sigma_- = 2R$ donc
  - Si $\mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}_\xi\right) = \sigma_+ + \sigma_- = 2R < 0$ on a *stabilité.*
  - Si $\mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}_\xi\right) = \sigma_+ + \sigma_- = 2R > 0$ on a *instabilité.*

□

Le résultat suivant de A. Turing (1952) nous informe sur le seuil d'instabilité, c'est à dire lorsque tous les modes ξ sont stables sauf un seul mode ξ_c qui est à la limite de l'instabilité.

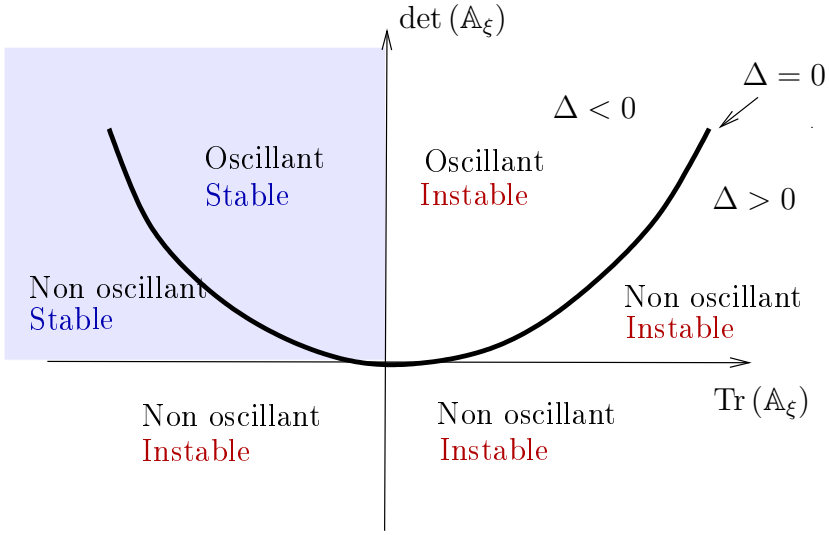


FIGURE 8.2.1 – Diagramme de Stabilité du mode de Fourier $\xi \in \mathbb{R}$. La courbe $\Delta = (\mathrm{Tr}\,(\mathbb{A}_\xi))^2 - 4\det(\mathbb{A}_\xi) = 0$ est une parabole d'équation $\det(\mathbb{A}_\xi) = \frac{1}{4}(\mathrm{Tr}\,(\mathbb{A}_\xi))^2$.

Théorème 8.2.10 (“Théorème de Turing sur le seuil d'instabilité” (1952)). *Supposons que la solution homogène et stationnaire p, eq.(8.2.6), soit stable en l'absence de diffusion (i.e. si $D_1, D_2 = 0$). D'après le Lemma 8.2.8, cela revient à supposer que*

$$\mathrm{Tr}\,(\mathbb{A}) < 0 \text{ et } \det(\mathbb{A}) > 0.$$

avec $\mathbb{A} = \mathbb{A}_{\xi=0} = Df_p = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Posons $D_2 = \mu D_1$ avec $\mu > 0$ qui mesure le rapport des coefs de diffusions. Alors il y a des modes ξ instables si et seulement si

$$\mu a_{11} + a_{22} - 2\sqrt{\mu}\sqrt{\det(\mathbb{A})} > 0 \tag{8.2.18}$$

(qui est une équation du 2nd degré en $\sqrt{\mu}$). Cette condition n'est pas vérifiée pour $D_2 = D_1$. Si $a_{11} > 0$ cette condition est vérifiée pour $\mu > 1$ assez grand (et alors $a_{22} < 0$). Au seuil d'instabilité, on a l'égalité et il y a un seul mode instable dont la fréquence spatiale ξ_c et la longueur d'onde λ_c de l'instabilité sont

$$\xi_c = \pm\left(\frac{\det(\mathbb{A})}{D_1 D_2}\right)^{1/4}, \qquad \lambda_c = \frac{2\pi}{\xi_c}. \tag{8.2.19}$$

Remarque 8.2.11.

— $a_{11} > 0$ signifie que u_1 est un “activateur” de lui même car cela correspond au terme $\partial_t v_1 = a_{11} v_1 + \dots$

— $a_{22} < 0$ signifie que u_2 est un "inhibiteur" de lui même car cela correspond au terme $\partial_t v_2 = a_{22} v_2 + \dots$

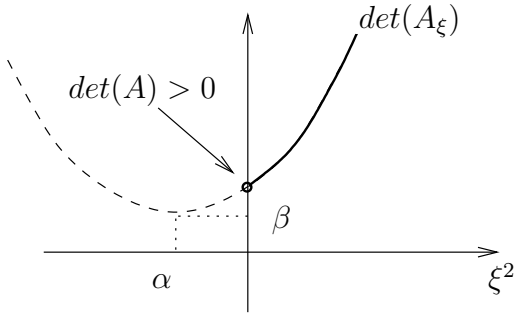
Démonstration. D'après le Lemma 8.2.8, on suppose $\mathrm{Tr}(\mathbb{A}) < 0$ et $\det(\mathbb{A}) > 0$. Pour avoir instabilité du mode ξ, il faut $\mathrm{Tr}(\mathbb{A}_\xi) > 0$ ou $\det(\mathbb{A}_\xi) < 0$. Or $\mathrm{Tr}(\mathbb{A}_\xi) \underset{(8.2.12)}{=} \mathrm{Tr}(\mathbb{A}) - \xi^2 \mathrm{Tr}(\mathbb{D}) < 0$ donc on cherche seulement $\det(\mathbb{A}_\xi) < 0$. On a le polynome du second degré en ξ^2 :

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{A}_\xi) &= \det \begin{pmatrix} a_{11} - \xi^2 D_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \xi^2 D_2 \end{pmatrix} && (8.2.20) \\ &= \left(\xi^2\right)^2 D_1 D_2 - \xi^2 \left(D_1 a_{22} + D_2 a_{11}\right) + \det\mathbb{A} && (8.2.21) \\ &= D_1 D_2 \left(\xi^2 - \alpha\right)^2 + \beta \end{aligned}$$

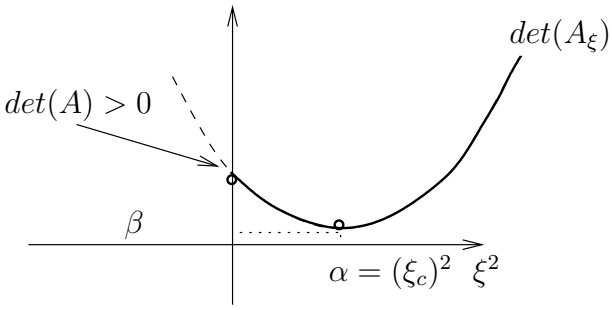
avec

$$\alpha = \frac{1}{2 D_1 D_2} \left(D_1 a_{22} + D_2 a_{11}\right) = \frac{1}{2 \mu D_1} \left(a_{22} + \mu a_{11}\right)$$

et $\beta = \det\mathbb{A} - D_1 D_2 \alpha^2$. On veut $\det(\mathbb{A}_\xi) < 0$ sachant que $\det(\mathbb{A}_{\xi=0}) > 0$.



Cas $\alpha < 0$.



Cas $\alpha > 0$.

Si $\alpha < 0$, on voit sur la figure, que l'on a toujours $\det(\mathbb{A}_\xi) > 0$. Si $\alpha > 0$, il est possible d'avoir $\det(\mathbb{A}_\xi) < 0$ et le critère du seuil d'instabilité $\det(\mathbb{A}_{\xi_c}) = 0$ donne $\beta = 0$ et $\xi_c^2 = \alpha$. Cela donne, en posant $D_2 = \mu D_1$,

$$\begin{aligned} \exists \xi, \det(\mathbb{A}_\xi) < 0 \Leftrightarrow \beta &< 0 \Leftrightarrow \det\mathbb{A} < D_1 D_2 \alpha^2 \Leftrightarrow \sqrt{\det\mathbb{A}} < \sqrt{D_1 D_2}\alpha \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{D_1 D_2 \det(\mathbb{A})} < D_1 a_{22} + D_2 a_{11} \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{\mu \det(\mathbb{A})} < a_{22} + \mu a_{11} \\ &\Leftrightarrow P(\sqrt{\mu}) > 0 \end{aligned}$$

avec

$$P(\sqrt{\mu}) = a_{11} \left(\sqrt{\mu}\right)^2 - 2\sqrt{\det(\mathbb{A})}\sqrt{\mu} + a_{22}$$

qui est un polynome du second degré en $\sqrt{\mu}$. On a obtenu (8.2.18). Pour le cas $\mu = 1$ on a la valeur $P(1) = \mathrm{Tr}(\mathbb{A}) - 2\sqrt{\det\mathbb{A}} < 0$. La condition n'est donc pas satisfaite. Au contraire, Si $a_{11} > 0$ alors $P\left(\sqrt{\mu}\right) > 0$ pour μ assez grand. Il y a donc une valeur intermédiaire (le seuil d'instabilité) pour lequel on a l'égalité $P(\mu) = 0$ qui se résoud donnant :

$$\sqrt{\mu} = \frac{1}{a_{11}} \left(\sqrt{\det \mathbb{A}} + \sqrt{\det \mathbb{A} - a_{11} a_{22}} \right)$$

Au seuil d'instabilité, on a $\beta = 0$ et alors

$$\xi_c^2 = \alpha = \frac{\sqrt{\det \mathbb{A}}}{\sqrt{D_1 D_2}}$$

qui donne (8.2.19). □

Remarque 8.2.12.

— Le mode instable v de fréquence ξ_c va croitre et son comportement va sortir de l'hypothèse $|v| \ll 1$. Pour poursuivre l'étude il faut tenir compte des non linéarité qui limitent éventuellement sa croissance. Cela nécessite d'autres techniques, voir Section @@. L'instabilité de Turing est similaire à la bifurcation fourche supercritique.

— A priori l'instabilité de Turing peut paraitre surprenante car sans diffusion on a supposé que le mode est stable. Or la diffusion est aussi un mécanisme stabilisateur en général. D'un point de vue mathématique, le mécanisme d'instabilité de Turing est simplement que l'on a la matrice

$$\mathbb{A}_\xi = \mathbb{A} + \xi^2 (-\mathbb{D})$$

composée des matrices $\mathbb{A}$, $(-\mathbb{D})$ qui ont chacune des valeurs propres réelles négatives, et donc donnant de la stabilité lorsqu'elles interviennent seules, mais **ces matrices ne commuttent pas** et il est possible que la matrice composée $\mathbb{A}_\xi$ ait des valeurs propres positives impliquant de l'instabilité (et c'est en effet ce que l'on a montré dans le Thm 8.2.10).

Exemple 8.2.13. Le Brusselator

On suppose le mode $\xi = 0$ stable. D'après (8.2.17) et (8.2.9) qui est $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} b-1 & a^2 \\ -b & -a^2 \end{pmatrix}$, cela donne

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\,(\mathbb{A}) &= b - 1 - a^2 < 0 \text{ et } \det(\mathbb{A}) = a^2 > 0 \\ \Leftrightarrow \quad & b < a^2 + 1 \end{aligned}$$

Question : à D_1, a, b fixés, posant $D_2 = \mu D_1$ avec $\mu \geq 1$, pour quelles valeurs de $\mu \geq 1$ a t-on apparition d'une instabilité ? et quelle est la fréquence spatiale ξ_c de cette isntabilité ?

Réponse : d'après le critère de Turing (8.2.18) il faut :

$$\mu a_{11} + a_{22} - 2\sqrt{\mu}\sqrt{\det(\mathbb{A})} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{\mu}\right)^2 (1-b) + 2\,|a|\,\sqrt{\mu} + a^2 = 0$$

qui est une équation du second degré en $\sqrt{\mu} > 0$ avec $\Delta = 4a^2 - 4\,(1-b)\,a^2 = 4a^2 b$. Il faut donc $b > 0$ et alors

$$\sqrt{\mu} = \frac{-2\,|a| \pm 2\,|a|\,\sqrt{b}}{2\,(1-b)} = \frac{|a|\left(-1 \pm \sqrt{b}\right)}{\left(1-\sqrt{b}\right)\left(1+\sqrt{b}\right)} = -\frac{|a|}{\left(1+\sqrt{b}\right)} \text{ ou } \frac{|a|}{\left(\sqrt{b}-1\right)}$$

Il n'y a que la solution :

$$\sqrt{\mu} = \frac{|a|}{\left(\sqrt{b}-1\right)} \text{ si } b > 1.$$

En conclusion, pour apparition de l'instabilité, il faut $1 < b < 1 + a^2$ et alors le seuil d'instabilité est en $D_2 = \mu D_1$ avec

$$\mu = \frac{a^2}{\left(\sqrt{b}-1\right)^2}.$$

D'après (8.2.19), la fréquence de l'onde qui surgit est

$$\xi_c = \pm\left(\frac{\det(\mathbb{A})}{D_1 D_2}\right)^{1/4} = \pm\left(\frac{a^2}{\mu D_1^2}\right)^{1/4} = \pm\frac{1}{\sqrt{D_1\left(\sqrt{b}-1\right)}}.$$

Exercice 8.2.14. "Modèle de réaction diffusion en écologie des populations"

(inspiré d'un exposé de Arnd Scheel). Dans cet exercice, en quelques étapes, on construit un modèle en écologie des populations basé sur le phénomène de "réaction diffusion" étudié au départ par A. Turing. Dans une première étape on considère un modèle local linéaire pour lequel $v = 0$ est un point fixe **stable**. Dans une deuxième étape, un modèle spatial avec diffusion qui rend ce point fixe 0 **instable**. Ce phénomène à priori surprenant (car la diffusion est habituellement considéré comme de la dissipation) est appelé "**instabilité de Turing**".

Modèle local de réaction. Commençons par un modèle de "réaction" local (non spatial). Dans une région donnée, on note $u_1(t)$ la quantité de souris et $u_2(t)$ la quantité de chouettes à la date t. On notera $u(t) = (u_1(t), u_2(t)) \in \mathbb{R}^2$. On considère une population $u(t) = p + v(t)$ avec $p \in \mathbb{R}^2$ une valeur fixe et $v(t) = (v_1(t), v_2(t)) \in \mathbb{R}^2$ représentant des fluctuations autour de la valeur fixe. On suppose que ces fluctuations sont gouvernées à l'ordre linéaire par les règle suivantes : en moyenne, chaque semaine, pour $v_1 = 5$ souris (et $v_2 = 0$ chouette) il y a naissance de 5 autres souris et de 1 chouette. Pour $v_2 = 1$ chouette (et $v_1 = 0$ souris) il y a disparition de 10 souris et de μ chouettes avec $\mu > 0$.

1. Écrire cela sous la forme :

$$\frac{dv}{dt} = \mathbb{A}v, \qquad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

avec les éléments de matrice que l'on précisera.

2. Pour quelles valeurs de μ est-ce que $v(t)$ est stable/instable pour $t \to +\infty$?
3. On cherche un modèle réaliste de dynamique sous la forme $\frac{du}{dt} = f(u)$. Dans le plan $u = (u_1, u_2)$ dessiner l'allure du champ de vecteur $f(u) \in \mathbb{R}^2$ auquel vous pensez puis proposer une expression mathématique sous forme polynomiale.

Diffusion en espace. On considère maintenant l'aspect spatial. Tout d'abord sans les "réactions". Il y a plusieurs sites sur un réseau unidimensionnel de positions x_j, distants de $\delta = 100m.$, indicés par $j = 1, 2 \ldots$, et on suppose que il y a "diffusion" de la population $k = 1, 2$ (souris ou chouette) par la loi :

$$\frac{dv_k(x_j)}{dt} = d_k(v_k(x_{j+1}) - v_k(x_j)) + d_k(v_k(x_{j-1}) - v_k(x_j)),$$

avec $d_1 = 1$ et $d_2 = 50$.

1. Expliquer ce modèle de diffusion et ces valeurs.
2. Que donne ce modèle dans la limite du continuum ? Résoudre les équations obtenues et discuter.

Réaction et diffusion. On combine les phénomènes précédant de "réaction locale" et "diffusion"par un modèle sous la forme :

$$\frac{du}{dt} = f(u) + \mathbb{D}\partial_x^2 u.$$

1. En utilisant le théorème de Turing, discuter l'apparition de "structures" dans les densités de population selon les valeurs de μ et d_1, d_2.
2. Calculer la "longueur d'onde" λ_c de ces structures au seuil d'instabilité.

8.3 Motifs périodiques et quasi-périodiques en dimension ≥ 2

Dans les Sections précédentes on a fait une étude en dimension $d = 1$. On a observé l'apparition de motifs périodiques de la forme

$$u(x) = A\cos(kx) = \frac{A}{2}\left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right)$$

avec $k \in \mathbb{R}$ qui est le vecteur d'onde instable, obtenu dans l'étude linéaire.

Il est possible de faire des études analogue en dimension $d \geq 1$ plus grande (on ne le fera pas ici). En tenant compte des non linéarité, il apparait au seuil d'instabilité un **ensemble discret de vecteurs d'ondes** $\vec{k}_j \in \mathbb{R}^d$, prédisant un motif de la forme

$$u(\vec{x}) = \sum_j A_j \exp\left(i\vec{k}_j.\vec{x}\right)$$

Dans cette Section on discute de la forme de ces motifs appelés **quasi-périodiques** (semblables aux quasi-cristaux). Souvent (ou parfois) ils sont en fait **périodiques**.

8.3.1 Exemples en dimension 2

Des motifs périodiques résultant de dynamique non linéaire apparaissent souvent dans la nature. Voir figure.

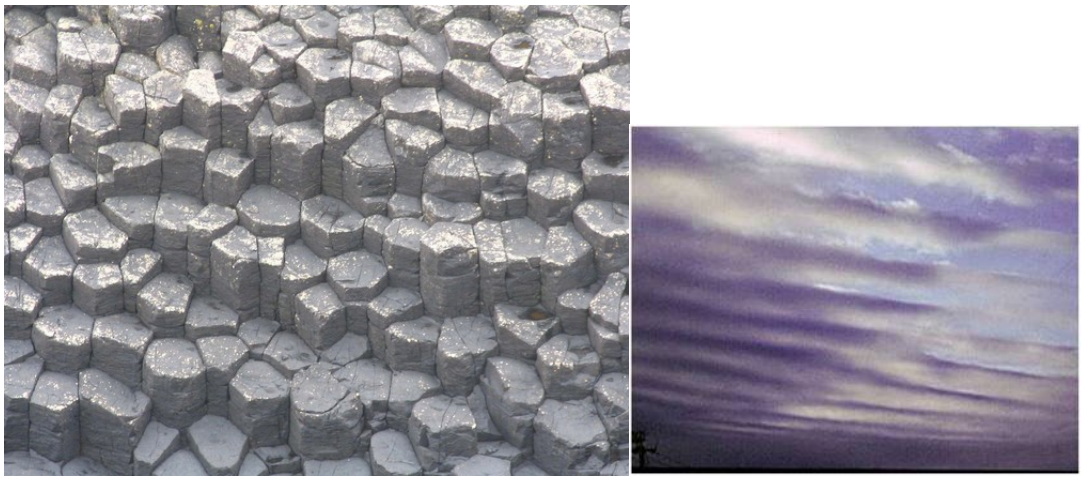
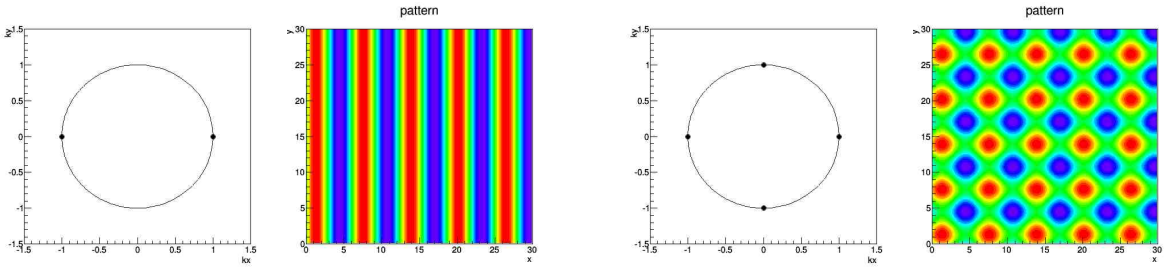


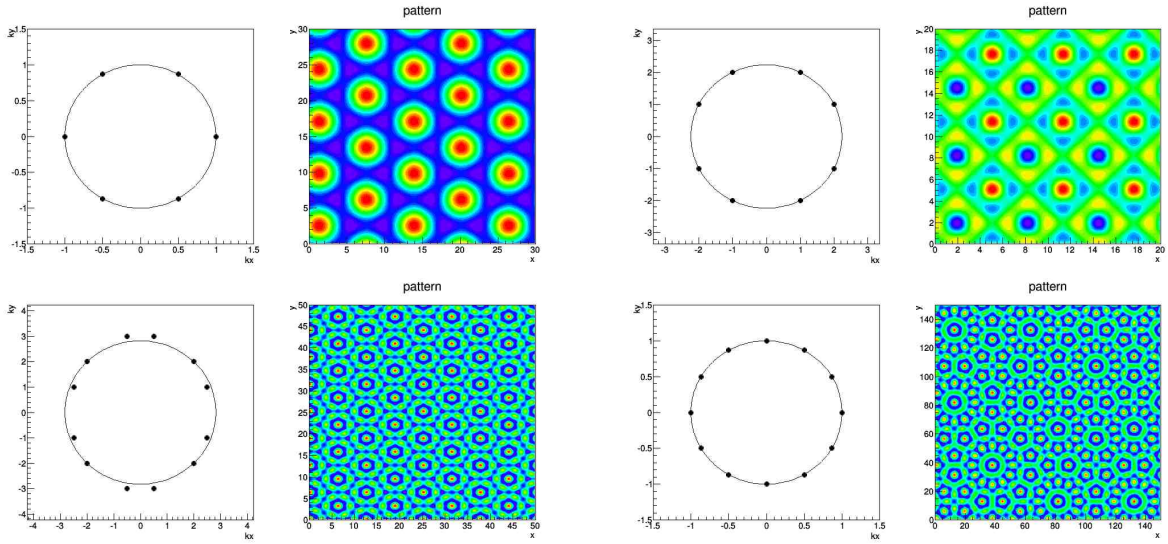
FIGURE 8.3.1 – Motifs périodiques ou quasi-périodiques dans la nature. (a) roche volcanique en structure hexagonal. (b) nuages en structure périodique unidimensionelle (bandes)

Dans les 6 exemples suivants, on a considéré des vecteurs $\vec{k}_j \in \mathbb{R}^2$ avec $j = 1 \ldots N$. ce sont les points noirs de la figure de gauche. Sur la figure de droite, on a dessiné (échelle bleu =max, rouge = min)

$$u(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{N} \exp\left(i\vec{k}_j.\vec{x}\right)$$

Le code C++ pour créer ces figures est donné en Section **??**.





On observe que dans les 5 premièrs exemples, la fonction $u(\vec{x})$ est périodique. Dans le dernier exemple elle ne semble pas périodique (elle ne l'est pas), bien que des ressemblances semblent se produire. On explique ces figures dans la suite.

8.3.2 Motif périodique et quasi-périodique

On donne des définitions et ensuite des propriétés. On notera $\vec{x} \in \mathbb{R}_x^d$ l'espace "ordinaire" et $\vec{k} \in \mathbb{R}_k^d = \left(\mathbb{R}_x^d\right)^*$ l'espace dual (ou espace de Fourier).

Définition 8.3.1. Soit $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots \vec{u}_d$ une base de $\mathbb{R}_x^d$. Cette base engendre un **réseau**

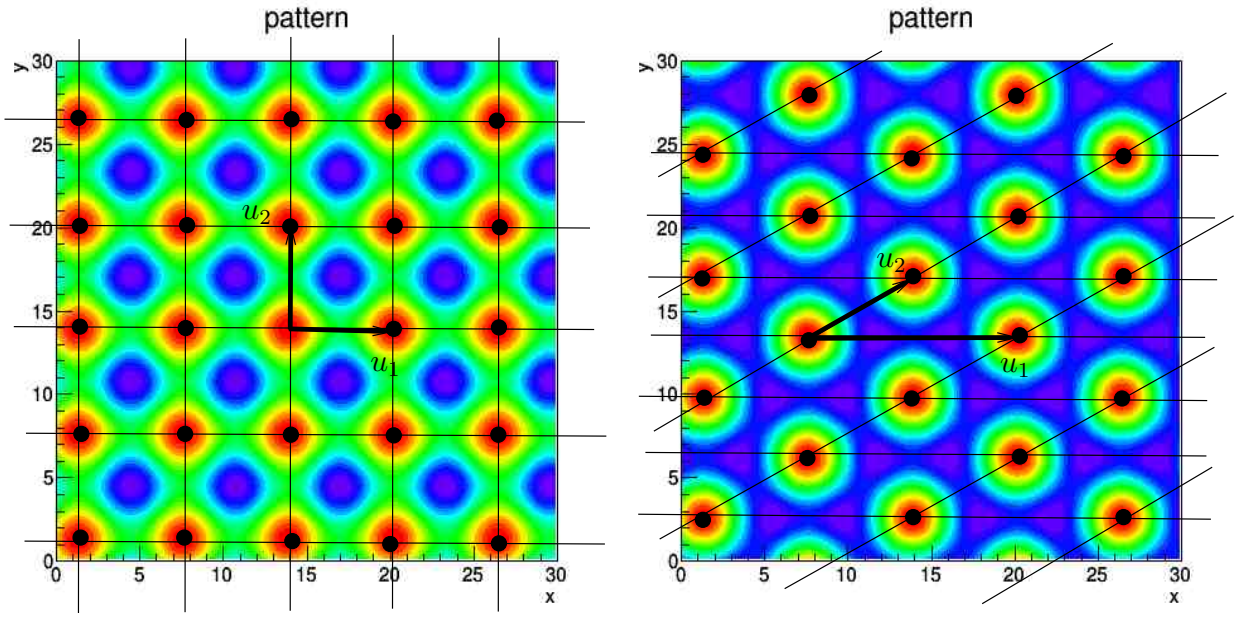
$$\Lambda := \left\{ \sum_{j=1}^{d} n_j \vec{u}_j \in \mathbb{R}^d, \quad (n_1, \ldots n_d) \in \mathbb{Z}^d \right\} \subset \mathbb{R}_x^d.$$

Une fonction $u(\vec{x})$ avec $\vec{x} \in \mathbb{R}_x^d$ est **périodique** si

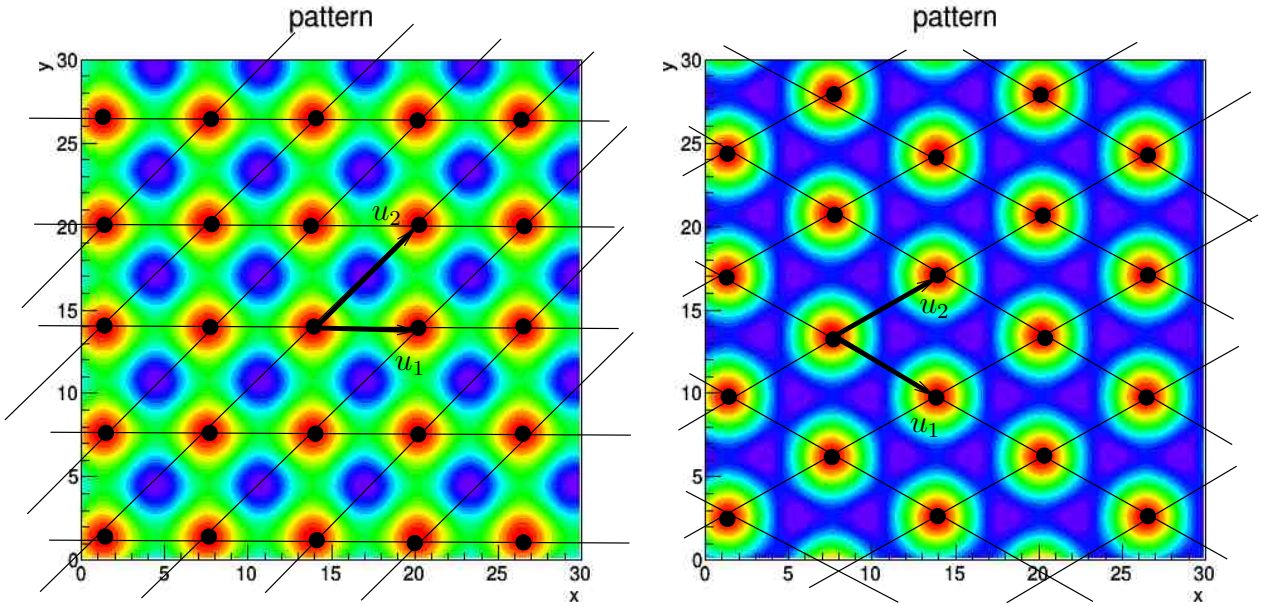
$$u(\vec{x} + \gamma) = u(\vec{x}), \qquad \forall \vec{x}, \quad \forall \gamma \in \Lambda.$$

Cela signifie que la fonction u est invariante par translation d'un vecteur γ du **réseau périodique**.

Par exemple dans les figures suivantes, en dimension $d = 2$, on a dessiné les vecteurs de base $\vec{u}_1, \vec{u}_2$, et le réseau périodique Λ (ce sont les points noirs aux intersection des lignes et non pas les lignes elle même) :



Noter que la base du réseau n'est pas unique, par exemple voici une autre base pour les même réseaux :



On va donner une caractérisation d'une fonction périodique à partir de sa transformée de Fourier défini par :

$$\tilde{u}\left(\vec{k}\right) := \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^d} \int e^{-i\vec{k}.\vec{x}} u\left(\vec{x}\right) d\vec{x}, \qquad \vec{k} \in \mathbb{R}_k^d.$$

La transformée de Fourier inverse est :

$$u\left(\vec{x}\right) := \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^d} \int e^{i\vec{k}.\vec{x}} \tilde{u}\left(\vec{k}\right) d\vec{k}, \qquad \vec{x} \in \mathbb{R}_x^d.$$

On note $(\vec{u}_1^*, \dots \vec{u}_d^*)$ la base de $\mathbb{R}_k^d$ qui est la **base duale** de $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_d)$ c'est à dire défini par les relations :

$$\vec{u}_j^*.\vec{u}_k = \delta_{j,k}, \qquad \forall j, k = 1 \dots d. \tag{8.3.1}$$

Cette base duale engendre le **réseau dual** dans l'espace de Fourier :

$$\Lambda^* := \left\{ \sum_{j=1}^d m_j \vec{u}_j^* \in \mathbb{R}_k^d, \quad (m_1, \dots m_d) \in \mathbb{Z}^d \right\} \subset \mathbb{R}_k^d.$$

Noter que $(\Lambda^*)^* = \Lambda$ d'après (8.3.1).

Proposition 8.3.2. *Une fonction $u(\vec{x})$ est périodique pour le réseau Λ si et seulement si la transformée de Fourier de u est de la forme*

$$\tilde{u}\left(\vec{k}\right) = \sum_{\gamma^* \in 2\pi\Lambda^*} \tilde{u}(\gamma^*)\, \delta\left(\vec{k} - \gamma^*\right), \qquad \tilde{u}(\gamma^*) \in \mathbb{C},$$

c'est à dire que $\tilde{u}$ est une distribution portée par le ***réseau dual*** *(fois 2π).*

Démonstration. On écrit (on utilisera l'unicité de la décomposition de Fourier en 3eme ligne)

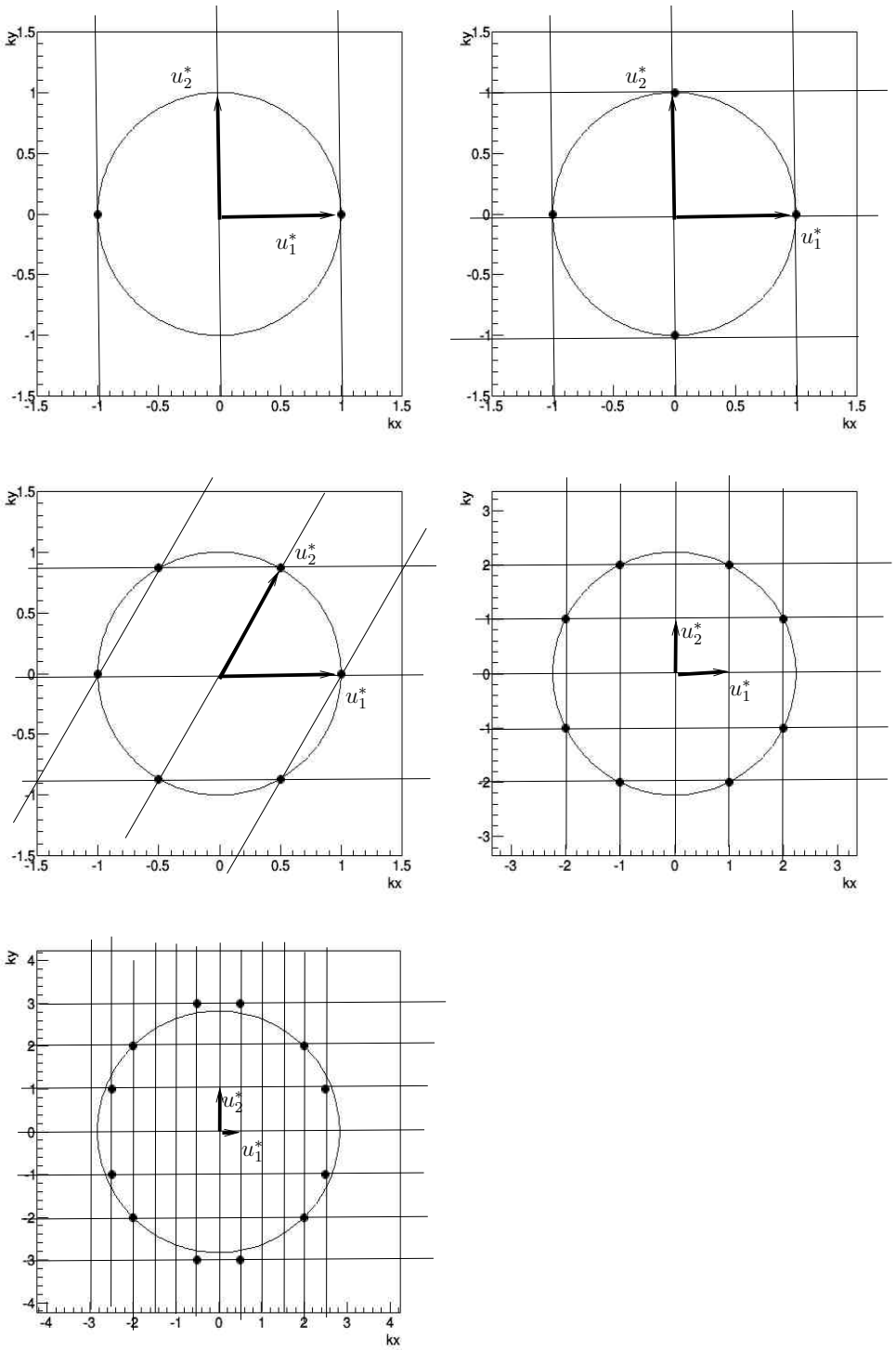
$$\begin{aligned}
& u(\vec{x} + \gamma) = && u(\vec{x}), \qquad \forall \vec{x}, \quad \forall \gamma \in \Lambda. \quad : u \text{ périodique}, \\
\Leftrightarrow \quad & \int e^{i\vec{k}.(\vec{x}+\gamma)} \tilde{u}\left(\vec{k}\right) d\vec{k} && = \int e^{i\vec{k}.(\vec{x}+\gamma)} \tilde{u}\left(\vec{k}\right) d\vec{k} \qquad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^d, \quad \forall \gamma \in \Lambda. \\
\Leftrightarrow \quad & e^{i\vec{k}.\gamma} \tilde{u}\left(\vec{k}\right) && = \tilde{u}\left(\vec{k}\right), \quad \forall \vec{k} \in \mathbb{R}^d, \quad \forall \gamma \in \Lambda \\
\Leftrightarrow \quad & \tilde{u}\left(\vec{k}\right) = 0 \text{ ou } e^{i\vec{k}.\gamma} && = 1, \qquad \forall \gamma \in \Lambda
\end{aligned}$$

La relation $e^{i\vec{k}.\gamma} = 1, \forall \gamma \in \Lambda$ est équivalente à $\vec{k} \in 2\pi\Lambda^*$. En effet, si $\vec{k} \in 2\pi\Lambda^*$ alors $\vec{k} = 2\pi \sum_{j=1}^d m_j \vec{u}_j^*$ et si $\gamma = \sum_{k=1}^d n_k \vec{u}_k$ alors

$$\vec{k}.\gamma = 2\pi \sum_{j,k} m_j n_k \vec{u}_j^*.\vec{u}_k = 2\pi \sum_j m_j n_j \in 2\pi\mathbb{Z}, \qquad \text{donc } e^{i\vec{k}.\gamma} = 1$$

et inversement si $e^{i\vec{k}.\gamma} = 1, \forall \gamma \in \Lambda$ alors en particulier pour $\gamma = \vec{u}_j$, on a $\vec{k}.\vec{u}_j = 2\pi K_j$ avec $K_j \in \mathbb{Z}$, donc $\vec{k} = 2\pi \sum_j K_j \vec{u}_j^* \in 2\pi\Lambda^*$. □

Dans les exemples de la Section 8.3.1 on peut donc montrer que les figures $u(\vec{x})$ sont périodiques si les points $\vec{k}$ (noirs) appartiennent à un réseau Λ^*. C'est le cas pour les 5 premières figures, dont voici le dessin du réseau Λ^* (intersection des lignes) :



On va montrer maintenant que la dernière figure de la Section 8.3.1 n'est pas périodique. Cette figure est reproduite en (8.3.2). Elle a cependant une structure bien visible appelée quasi-périodicité d'après la définition suivante.

Définition 8.3.3. Une **fonction quasi périodique** $u(\vec{x})$ est une fonction dont la transformée de Fourier est de la forme

$$\tilde{u}\left(\vec{k}\right) = \sum_{\gamma^* \in S} \tilde{u}(\gamma^*)\, \delta\left(\vec{k} - \gamma^*\right), \qquad \tilde{u}(\gamma^*) \in \mathbb{C},$$

où $S \subset \mathbb{R}^d_k$ est un ensemble discret de vecteurs d'ondes (c'est à dire que chaque point est isolé).

Démonstration. de la non périodicité de la figure (8.3.2). Les vecteurs d'ondes sont :

$$\vec{k}_j = e^{ij2\pi/12}, \quad j \in \{0, 1, \ldots 11\}$$

En particulier les vecteurs $\vec{k}_0 = 1, \vec{k}_1 = e^{i\pi/6}$ forment une base de $\mathbb{R}^2$. On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe un réseau Λ^* contenant tous ces vecteurs $\vec{k}_j$. En particulier, alors les points $\gamma^* \in \Lambda^*$ s'exprimerait dans la base $\vec{k}_0, \vec{k}_1$ avec des coefficients rationnels [2], en particulier pour le vecteur $\vec{k}_2 = e^{i\pi/3}$ on aurait :

$$e^{i\pi/3} = a + be^{i\pi/6}, \qquad a, b \in \mathbb{Q}.$$

donc

$$\begin{aligned} \cos(\pi/3) &= a + b\cos(\pi/6), \qquad a, b \in \mathbb{Q} \\ \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2} &= a + b\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad a, b \in \mathbb{Q} \\ \Leftrightarrow \quad \sqrt{3} &= \frac{2}{b}\left(\frac{1}{2} - a\right) \in \mathbb{Q} \end{aligned}$$

2. En effet, notons $\vec{u}_1^*, \vec{u}_2^*$ une base qui engendre ce réseau Λ^*. Alors $\vec{k}_j = a_j\vec{u}_1^* + b_j\vec{u}_2^*$ avec des coefficients entiers $a_j, b_j \in \mathbb{Z}$. En particulier on a

$$\begin{pmatrix} \vec{k}_0 \\ \vec{k}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_1^* \\ \vec{u}_2^* \end{pmatrix}$$

et $M = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix}$ est une matrice inversible car $\vec{k}_0, \vec{k}_1$ forment une base de $\mathbb{R}^2$. On a donc

$$\begin{pmatrix} \vec{u}_1^* \\ \vec{u}_2^* \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} \vec{k}_0 \\ \vec{k}_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{a_0b_1 - a_1b_0} \begin{pmatrix} b_1 & -b_0 \\ -a_1 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{k}_0 \\ \vec{k}_1 \end{pmatrix}$$

et M^{-1} est une matrice à coefficients rationnels. Donc $\vec{k}_j$ s'exprime par dans la base $\vec{k}_0, \vec{k}_1$ avec des coefficients rationnels qui sont explicitement

$$\vec{k}_j = a_j\vec{u}_1^* + b_j\vec{u}_2^* = \frac{1}{a_0b_1 - a_1b_0}\left(a_j\left(b_1\vec{k}_0 - b_0\vec{k}_1\right) + b_j\left(-a_1\vec{k}_0 + a_0\vec{k}_1\right)\right).$$

or $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ est un nombre irrationnel. On rappelle la preuve qui est valable pour tout nombre $\sqrt{n}$ si n est un entier qui n'est pas un carré. Si $\sqrt{3} = a/b$ avec $a, b \in \mathbb{N}$ fraction irreductible, alors $3b^2 = a^2$, donc a contient 3 dans sa décomposition en nombres premiers, donc $a = 3a'$ avec a' entier. Donc $3b^2 = 9a'^2$, $b^2 = 3a'^2$, donc b contient aussi 3, contrairement à l'hypothèse que a/b est irréductible. Conclusion $\sqrt{3} \neq a/b$. $\square$

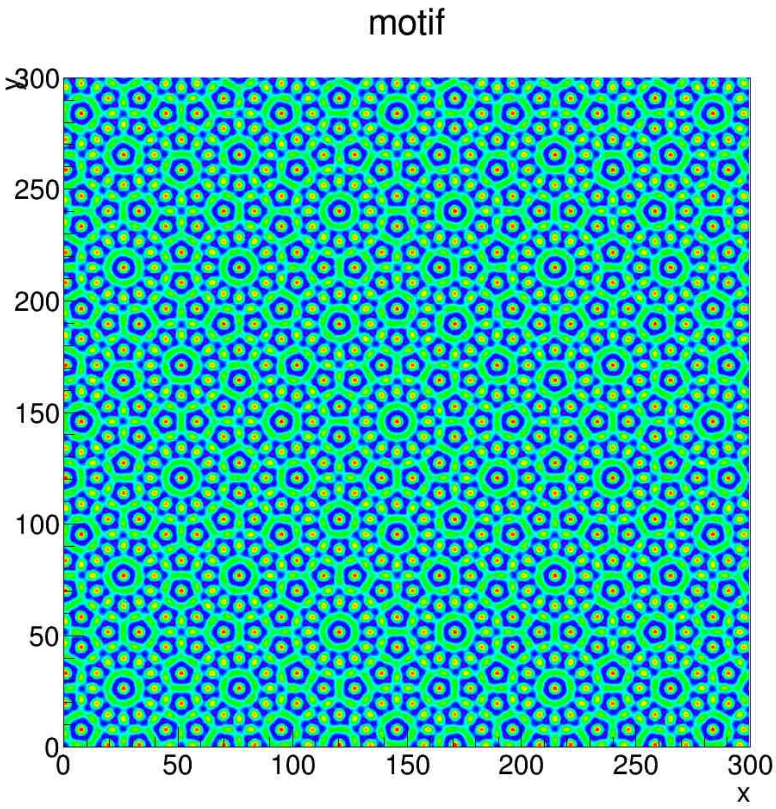


FIGURE 8.3.2 – Motif quasi-périodique : $u(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{12} e^{i\vec{k}_j.\vec{x}}$ avec $\vec{k}_j = \exp(ij\pi/12)$.

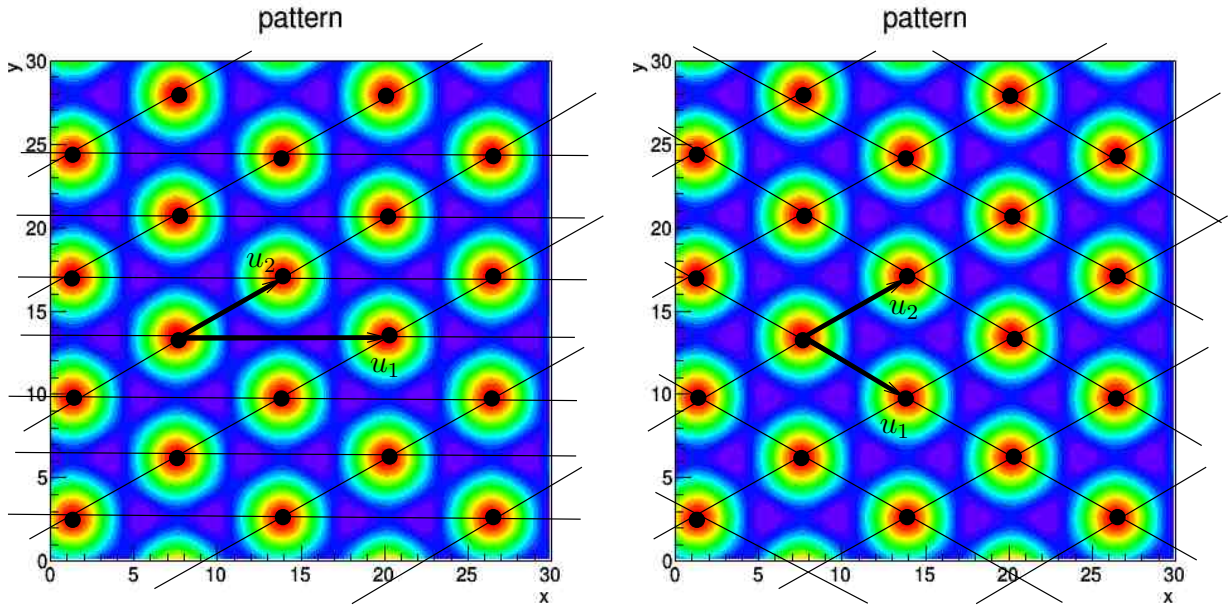
Exercice 8.3.4. Considérons la fonction

$$u_N(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{N} e^{i\vec{k}_j.\vec{x}}$$

avec $\vec{k}_j = \exp(ij\pi/N)$. Est-ce que cette fonction est quasi-périodique ? périodique ?

Changement de base dans un réseau périodique

On revient sur la remarque que dans un réseau il peut y avoir plusieurs base possible. Par exemple en dimension 2, on a deux vecteurs de base $\vec{u}_1, \vec{u}_2$:



Question : comment ces différentes bases sont reliées entre elles et comment obtenir toutes les bases possibles ?

Dans cet exemple, on a par exemple la nouvelle base $\vec{u}_1' = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$ et $\vec{u}_2' = \vec{u}_2$. En termes matriciels :

$$\begin{pmatrix} \vec{u}_1' \\ \vec{u}_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \end{pmatrix}$$

avec la **matrice de passage** $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Voici le résultat général :

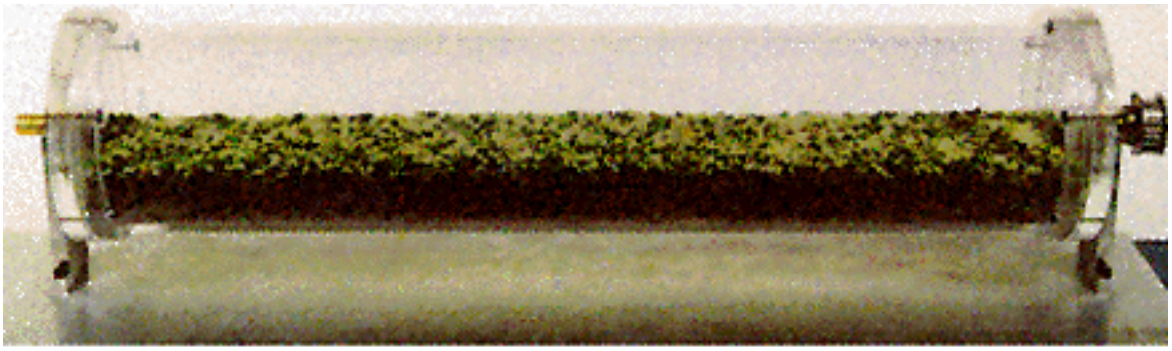
Proposition 8.3.5. *Si $U = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_d)$ est une base de $\mathbb{R}^d$ qui engendre un réseau $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ alors une autre base $U' = (\vec{u}_1', \vec{u}_2', \dots \vec{u}_d')$ qui engendre ce réseau est obtenue par une matrice de passage M à coefficients entiers et telle que $\det(M) = \pm 1$. On dit que $M \in \mathrm{SL}(d, \mathbb{Z})$.*

Démonstration. On a $U' = MU$. Comme les vecteurs U' appartiennent au réseau Λ il faut que la matrice M soit à coefficients entiers et que $\delta := \det M \neq 0$ car U' est une nouvelle base, donc $\delta \in \mathbb{Z}$. Inversement on a $U = M^{-1}U'$ et de même M^{-1} doit être à coefficients entiers. Donc $\det(M^{-1}) = \det(M)^{-1} = \delta^{-1} \in \mathbb{Z}$. Cela implique $\delta = \pm 1$. Inversement si M est à coefficients entiers et $\det(M) = \pm 1$ alors il en est de même pour M^{-1} d'après la formule de Laplace $M^{-1} = \frac{1}{\det M} (\mathrm{com} M)^T$. □

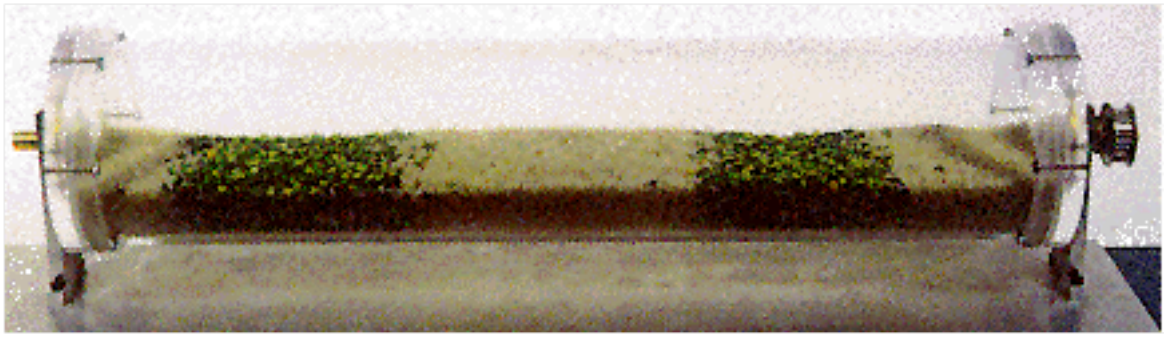
8.4 Motifs par segregation ou avalanches

Ref : Group

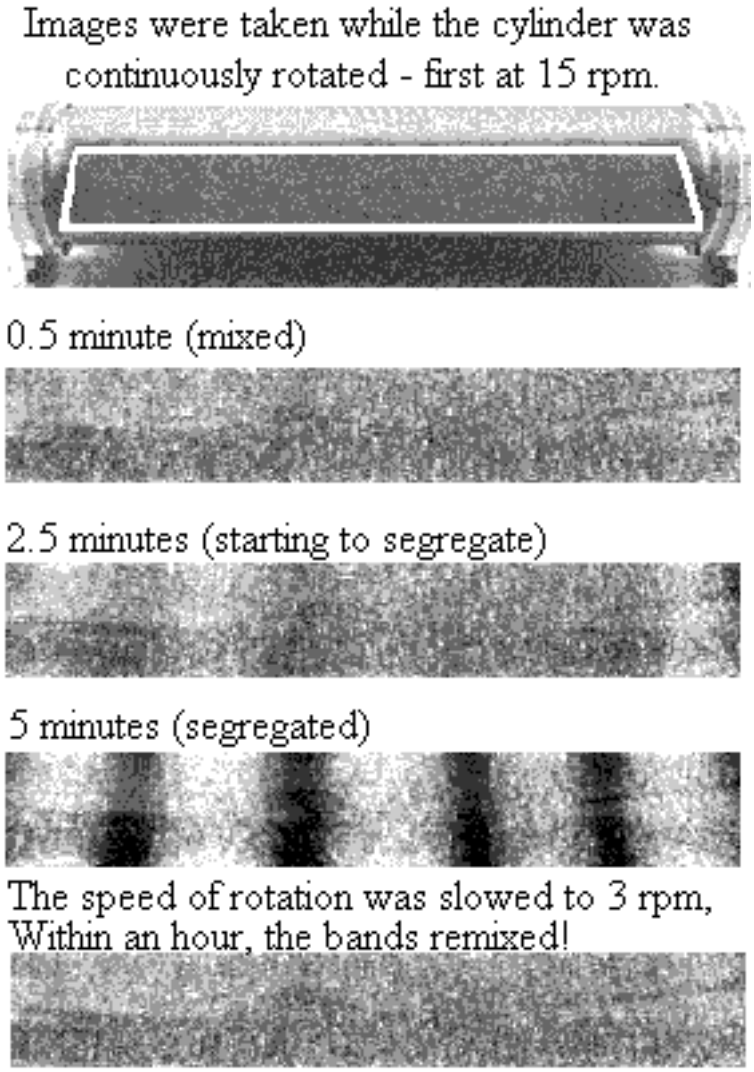
Images et commentaires pris sur la page web ci-dessus, montrant des phénomène de morphogénèse avec des grains de différentes tailles. Voir la page web Group pour plus de commentaires.



Initial Mixture of Uncooked Rice and Split Peas



After Rotation About Horizontal Axis at 15 rpm for 2 hours



8.5 Ondes solitaires ou Solitons

Dans cette Section nous considérons un phénomène particulier de la physique décrit par des équations d'évolution aux dérivées partielles non linéaires. Il s'agit "d'**ondes solitaires**", aussi appelées **soliton**, comme les "tsunamis" à la surface des océans, ou les mascarets à la surface de certaines riviéres (engendrés par des mouvements de marée) :

Les solitons sont observés dans de nombreux domaines de la physique. Référence : [33] ou [1].

— L'exemple le plus familier est le "poul artériel". En effet le coeur délivre une impulsion de pression à chaque seconde, et une onde localisée de déformation (soliton) se propage le long des artères jusqu'aux extrémités des membres.
— Un exemple spectaculaire mais rare est un nuage qui se déplace, appelé "morning glory cloud" :

— On détaille dans la suite l'étude de solitons dans une chaine d'oscillateurs couplés de façon non linéaire. La méthode présentée peut être transposée à d'autres modèles.
— Il existe des ondes solitaires sous marines appelée "ondes de gravité internes".

8.5.1 Historique

réf : Introduction de [33, p.3].

— En 1834, Russell observe une onde solitaire à la surface d'un canal d'eau, en angleterre. Cette onde a été créée par la proue d'un bateau et se propage sur des kilomètres sans se déformer ni s'atténuer, et semble être supersonique c'est à dire aller plus vite que la vitesse des petites ondes. En 1872, Boussinesq puis Kordeweg et De Vries en 1895 modélisent ce phénomène par une équation donnée "**équation KdV**" (Kordeweg-DeVries), et qu'il est convenu d'écrire :

$$\partial_t u + \partial_x^3 u + 6u.\partial_x u = 0. \tag{8.5.1}$$

En résolvant cette équation non linéaire (très particulière) on obtient des solutions "d'ondes solitaires" qui sont stables vis à vis des perturbations de la condition initiale et qui expliquent ainsi le phénomène observé.

— En 1914, Debye suggère que la conductivité thermique dans les matériaux (i.e. la loi d'Ohm et plus généralement l'équidistribution de l'énergie qui est à la base de la physique statistique), pourrait être modélisée et expliquée par un **ensemble d'oscillateurs couplés de façon non linéaire** (ou oscillateurs non harmoniques). En effet une chaine d'oscillateur linéaires possèdent des modes propres de Fourier explicites indépendant qui se propagent de façon balistique, et on ne peut expliquer ainsi la "diffusion de la chaleur" ou "loi de Fourier"[3]. Debye pensait (naïvement) que la présence de non linéarité suffit à mélanger totalement la dynamique (voir plu loin le chapitre sur le chaos et le mélange à propos de cela).

— En 1955, Fermi, Pasta, Ulam simulent la dynamique d'une chaine d'oscillateur couplés de façon non harmonique comme suggéré par Debye, et contrairement à l'attente de Debye, ils n'observent pas de diffusion, ni d'équidistribution de l'énergie mais des mouvements structurés, des interactions entre quelques modes de Fourier seulement. Lire cet article de revue pour les aspects historiques.

— En 1963, Kruskal et Zabusky considèrent une "limite continue" du modèle précédent, c'est à dire lorsque il y a une infinité d'oscillateurs par unité de longueur, et dans une certaine limite d'approximation, obtiennent l'équation de KdV, montrant l'existence de solitons dans cette chaine d'oscillateurs non linéaires. Ils expliquent ainsi les résultats numériques obtenus par Fermi, Pasta et Ulam.

— Il est apparu ensuite que l'équation de KdV est très particulière au sens ou elle possède un nombre infini de quantités conservées et suffisament pour la rendre "intégrable" (i.e. soluble). Depuis on connait de nombreux modèles intégrables en théorie des champs. Cependant ce sont les modèles intégrables en théorie des champs sont des modèles particuliers car une perturbation du modèle ne préserve pas cette propriété.

8.5.2 Du modèle des oscillateurs non linéaires à l'équation de KdV

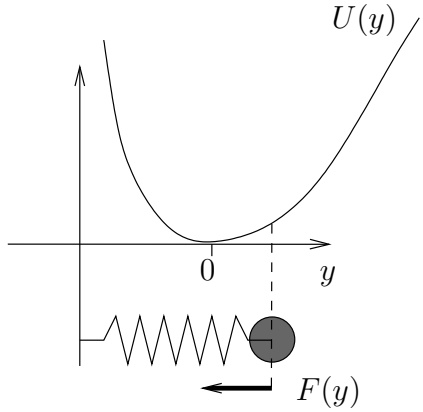
Référence : [33, chap.8]

Modèle discret de départ

Modèle étudié par Fermi, Pasta Ulam en 1955.

On considère un ensemble "d'oscillateurs", indicés par $j \in \mathbb{Z}$ et disposés sur l'axe réel. On suppose que les oscillateurs sont chacun de masse m et couplés à leur proche voisin par un ressort. La réaction de ce ressort est caractérisé par une énergie potentielle $U(y)$ ayant un minimum non dégénéré en $y = 0$. Voir figure.

3. L'explication microscopique de la loi de Fourier est toujours une question ouverte en science.



Ainsi

$$U(y) = \frac{1}{2}U''(0)\,y^2 + \frac{1}{6}U'''(0)\,y^3 + \dots$$

La force est donc

$$\begin{aligned} F(y) &= -\frac{dU}{dy} = -U''(0)\,y - \frac{1}{2}U'''(0)\,y^2 + \dots \\ &= -Ky - K'y^2 + \dots \end{aligned}$$

avec $K = U''(0) > 0$ la "constante de raideur linéaire" et $K' = U'''(0) \in \mathbb{R}$ la première correction non linéaire que l'on supposera $K' \neq 0$. On note $y_j(t) \in \mathbb{R}$ la position de l'oscillateur j à la date t. Ainsi l'oscillateur $j-1$ exerce sur j la force :

$$F_{j-1/j} := -K(y_j - y_{j-1}) - K'(y_j - y_{j-1})^2$$

D'après le principe action-réaction, on a $F_{j/j-1} = -F_{j-1/j}$. D'après la loi de Newton, l'équation de mouvement du système est pour tout oscillateur $j \in \mathbb{Z}$:

$$m\frac{d^2 y_j(t)}{dt^2} = F_{j+1/j} + F_{j-1/j} \tag{8.5.2}$$

Equation sans dimensions

On peut simplifier cette équation en faisant les changement d'échelle : $\tilde{t} := \sqrt{\frac{K}{m}}t$ et $\tilde{y}_j := \frac{K'}{K}y_j$ donnant l'équation sans paramètres libres :

$$\frac{d^2\tilde{y}_j(\tilde{t})}{d\tilde{t}^2} = \tilde{F}_{j+1/j} + \tilde{F}_{j-1/j}$$

avec la force :

$$\tilde{F}_{j+1/j} := (\tilde{y}_{j+1} - \tilde{y}_j) + (\tilde{y}_{j+1} - \tilde{y}_j)^2$$

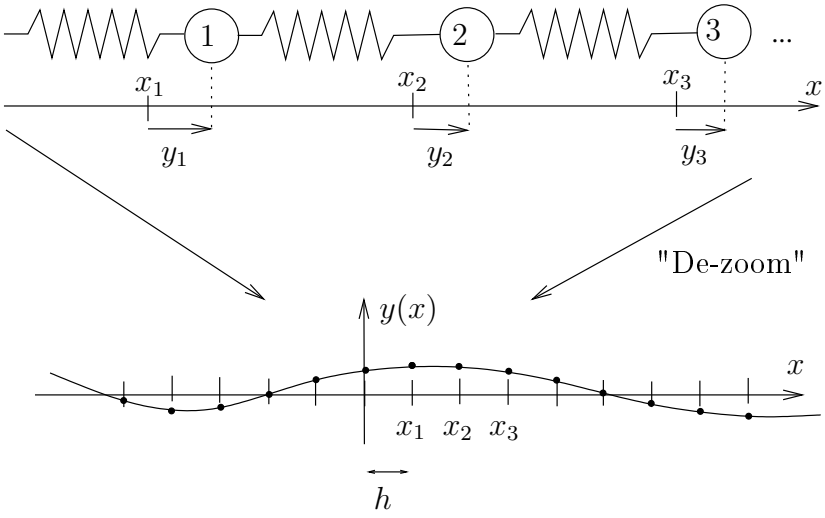


FIGURE 8.5.1 – Pendules.

Cela revient à supposer $m = 1, K = 1, K' = 1$ dans le problème de départ [4]. On obtient les **équations de mouvement de Fermi-Pasta-Ulam** (FPU) :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_j(t)}{dt^2} &= F_{j+1/j} - F_{j/j-1} \\ &= (y_{j+1} - y_j) + (y_{j+1} - y_j)^2 - \left((y_j - y_{j-1}) + (y_j - y_{j-1})^2\right) \end{aligned} \tag{8.5.3}$$

Cette équation peut facilement être simulé sur ordinateur. Pour simplifier, on peut disposer $j = 1, 2, \ldots N$ oscillateurs sur un cercle avec condition périodique c'est à dire $j = N + 1 \equiv j = 1$.

Limite du continu

(Considéré par *Kruskal*et Zabusky en 1963). On va étudier l'équation non linéaire (8.5.3) dans un certain régime qui va donner lieu à l'équation KdV.

4. Remarquer qu'il faut avoir supposé $K' \neq 0$ sinon $\tilde{y}_j := \frac{K'}{K} y_j$ n'est pas un changement de variable convenable.

Proposition 8.5.1. *Supposons une configuration des pendules donnée par* $y_j(t) = h.\tilde{y}(x_j - ht, t)$ *avec une certaine fonction* $\tilde{y}(x,t)$*, avec* $x_j = jh$ *et* $h \ll 1$*, (cad "de variation spatiale lente et de petite amplitude* $\sim h$ *et que les déformations se déplacent vers la droite à la vitesse* $\sim h$*"). Voir figure (8.5.1). Supposons que* $y_j(t)$ *soit gouvernée par l'équation de FPU (8.5.3). Alors* $\tilde{y}(x,t)$ *est bien décrite (modulo des erreurs* $O(h)$*) par l'**équation de KdV***

$$\partial_{\tilde{t}} u + \partial_x^3 u + 6u.\partial_x u = 0 \tag{8.5.4}$$

avec les changements d'échelle

$$\tilde{t} := \frac{1}{24} h^3 t, \quad u := 4\partial_x \tilde{y}.$$

et sur une échelle de temps de l'ordre de $\left|\tilde{t}\right| \lesssim C$*, soit* $|t| \leq Ch^{-3}$*, avec une constante* C *arbitraire.*

Remarque 8.5.2. Le résultat précédent signifie que dans un "certain régime" qui est celui de variations spatiales lentes, de petites amplitudes $\sim h$, et déplacement vers la droite à la vitesse de l'ordre de h alors l'équation de mouvement (8.5.2) est bien décrite par une équation EDP non linéaire (ou "équation de champs") qui est en l'occurence l'équation KdV. Cela s'appelle "**le passage à un modèle continu**". Remarquer que on a fait aussi un changement d'échelle de temps qui signifie que les solutions obtenues, dans le référentiel en mouvement (de vitesse h) ont une **variation temporelle lente** de l'ordre de $t \sim h^{-3}$ (car elles varient typiquement à l'échelle de $\tilde{t}$). Se rappeler que l'équation sans dimension (8.5.3) est elle même issue d'une équation aux dimensions physique (8.5.2).

Démonstration. Posons $y_j(t) = y(x_j, t)$ avec une fonction $y(x,t)$ et $x_j = jh$. On souhaite exprimer l'équation de mouvement (8.5.2) à partir de cette fonction $y(x,t)$. On notera

$$\partial_x^k y_j := \frac{\partial^k y}{\partial x^k}(x_j, t).$$

Utilisant le développement de Taylor (à un ordre suffisant) en $h \ll 1$, on écrit

$$y_{j+1} = y(x_{j+1}) = y(x_j + h) = y_j + h\partial_x y_j + \frac{1}{2}h^2\partial_x^2 y_j + \frac{1}{6}h^3\partial_x^3 y_j + \frac{1}{24}h^4\partial_x^4 y_j + O\left(h^5\left|\partial_x^5 y\right|\right)$$

De même

$$y_{j-1} = y(x_j - h) = y_j - h\partial_x y_j + \frac{1}{2}h^2\partial_x^2 y_j - \frac{1}{6}h^3\partial_x^3 y_j + \frac{1}{24}h^4\partial_x^4 y_j + O\left(h^5\left|\partial_x^5 y\right|\right)$$

Donc (8.5.3) donne

$$\begin{aligned}
\partial_t^2 y_j &= h\partial_x y_j + \frac{1}{2}h^2\partial_x^2 y_j + \frac{1}{6}h^3\partial_x^3 y_j + \frac{1}{24}h^4\partial_x^4 y_j + O\left(h^5\left|\partial_x^5 y\right|\right) \\
&\quad + \left(h\partial_x y_j + \frac{1}{2}h^2\partial_x^2 y_j + \frac{1}{6}h^3\partial_x^3 y_j + O\left(h^4\left|\partial_x^4 y\right|\right)\right)^2 \\
&\quad + \left(-h\partial_x y_j + \frac{1}{2}h^2\partial_x^2 y_j - \frac{1}{6}h^3\partial_x^3 y_j + \frac{1}{24}h^4\partial_x^4 y_j\right) \\
&\quad - \left(-h\partial_x y_j + \frac{1}{2}h^2\partial_x^2 y_j - \frac{1}{6}h^3\partial_x^3 y_j\right)^2 \\
&= h^2\partial_x^2 y_j + \frac{1}{12}h^4\partial_x^4 y_j + O\left(h^5\left|\partial_x^5 y\right|\right) \\
&\quad + h^2\left(\partial_x y_j + \frac{1}{2}h\partial_x^2 y_j + \frac{1}{6}h^2\partial_x^3 y_j + O\left(h^3\left|\partial_x^4 y\right|\right)\right)^2 \\
&\quad - h^2\left(\partial_x y_j - \frac{1}{2}h\partial_x^2 y_j + \frac{1}{6}h^2\partial_x^3 y_j\right)^2
\end{aligned}$$

et donc

$$\partial_t^2 y_j = h^2\partial_x^2 y_j + \frac{1}{12}h^4\partial_x^4 y_j + 2h^3\left(\partial_x y_j\right)\left(\partial_x^2 y_j\right) + O\left(h^5\left|\partial_x^5 y\right|\right) + O\left(h^5\left|\partial_x y\right|\left|\partial_x^4 y\right|\right) \quad (8.5.5)$$

On remarque les deux premiers termes $\partial_t^2 y = h^2\partial_x^2 y$ correspondant à "l'équation des ondes" qui a pour solution exacte à 1 dimension :

$$y(x,t) = A(x - ht) + B(x + ht)$$

avec $A(x)$, $B(x)$ deux fonctions quelconques appelées "profil". Le profil $y(x,t) = A(x - ht)$ se déplace comme $x = ht$ à la vitesse h et le profil $y(x,t) = B(x + ht)$ se déplace comme $x = -ht$ à la vitesse $-h$. On va s'intéresser dans la suite à des solutions "proches" d'un profil qui se déplace à la vitesse $+h$. Cela suggère tout d'abord de se placer dans ce référentiel en mouvement de vitesse $+h$, et pour cela de poser

$$\tilde{y}(x,t) := y(x + ht, t) \Leftrightarrow y(x,t) := \tilde{y}(x - ht, t) \quad (8.5.6)$$

ainsi $\partial_t y = -h\partial_x\tilde{y} + \partial_t\tilde{y}$, et

$$\begin{aligned}
\partial_t^2 y &= -h\partial_x\left(-h\partial_x\tilde{y} + \partial_t\tilde{y}\right) + \partial_t\left(-h\partial_x\tilde{y} + \partial_t\tilde{y}\right) \\
&= h^2\partial_x^2\tilde{y} - 2h\partial_x\partial_t\tilde{y} + \partial_t^2\tilde{y}
\end{aligned}$$

et $\partial_x y = \partial_x\tilde{y}$. On écrit maintenant $y(x) = y(x_j) = y_j$. On obtient

$$-2h\partial_x\partial_t\tilde{y} + \partial_t^2\tilde{y} = \frac{1}{12}h^4\partial_x^4\tilde{y} + 2h^3\left(\partial_x\tilde{y}\right)\left(\partial_x^2\tilde{y}\right) + O\left(h^5\left|\partial_x^5\tilde{y}\right|\right) + O\left(h^5\left|\partial_x\tilde{y}\right|\left|\partial_x^4\tilde{y}\right|\right) \quad (8.5.7)$$

Remarquer que avec ce changement, le profil $y(x,t) = A(x-ht)$ donne $\tilde{y}(x,t) = A(x)$ qui ne dépend pas de t (comme attendu) et $y(x,t) = B(x+ht)$ donne $\tilde{y}(x,t) = B(x+2ht)$ qui donne $\partial_t \tilde{y} = 2h\tilde{y}$. Comme on veut exclure cette solution, on va supposer que $|\partial_t \tilde{y}| \ll h|\tilde{y}|$. Pour exprimer cela, il est équivalent de faire le changement de variable

$$\tilde{t} := h^{\alpha} t,$$

avec $\alpha > 1$ qui sera choisit plus loin. Ainsi $|\partial_t \tilde{y}| \ll h|\tilde{y}| \Leftrightarrow h^{\alpha-1}|\partial_{\tilde{t}}\tilde{y}| \ll |\tilde{y}|$ qui est vérifiée car $h^{\alpha-1} \ll 1$ pour $h \ll 1$. Faisons aussi un changement de variable en amplitude :

$$\check{y} := \frac{\tilde{y}}{h^{\beta}},$$

avec $\beta \in \mathbb{R}$ qui sera choisi plus loin. L'équation (8.5.7) devient alors

$$-2h^{1+\alpha+\beta}\partial_x\partial_{\tilde{t}}\check{y} + h^{2\alpha+\beta}\partial_{\tilde{t}}^2\check{y} = \frac{1}{12}h^{4+\beta}\partial_x^4\check{y} + 2h^{3+2\beta}(\partial_x\check{y})\left(\partial_x^2\check{y}\right) + O\left(h^{5+\beta}\left|\partial_x^5\check{y}\right|\right) + O\left(h^{5+2\beta}|\partial_x\check{y}|\left|\partial_x^4\check{y}\right|\right)$$

On observe que le choix $\alpha = 3$ et $\beta = 1$ donne

$$\begin{aligned} -2h^5\partial_x\partial_{\tilde{t}}\check{y} + h^7\partial_t^2\check{y} &= \frac{1}{12}h^5\partial_x^4\check{y} + 2h^5(\partial_x\check{y})\left(\partial_x^2\check{y}\right) + O\left(h^6\right) \\ \Leftrightarrow \quad -2\partial_x\partial_{\tilde{t}}\check{y} + h^2\partial_t^2\check{y} &= \frac{1}{12}\partial_x^4\check{y} + 2(\partial_x\check{y})\left(\partial_x^2\check{y}\right) + O(h) \end{aligned}$$

Comme attendu, pour $h \ll 1$, on peut négliger le terme $h^2\partial_{\tilde{t}}^2\check{y}$ et le reste $O(h)$ et on obtient

$$-2\partial_x\partial_{\tilde{t}}\check{y} = \frac{1}{12}\partial_x^4\check{y} + 2(\partial_x\check{y})\left(\partial_x^2\check{y}\right)$$

où le petit paramètre h n'apparait plus. Cela signifie que à cette échelle d'étude (en espace, temps et amplitude) les trois terme de l'équations sont en "compétition". On peut encore simplifier l'expression. On pose

$$u(x,t) := \partial_x\check{y}$$

donnant

$$\partial_{\tilde{t}}u + \frac{1}{24}\partial_x^3 u + u.\partial_x u = 0.$$

Cette équation est en fait équivalente à l'équation KdV (8.5.1) "$\partial_t u + \partial_x^3 u + 6u.\partial_x u = 0$". Les coefficients dans l'équation KdV sont en fait "arbitraires" et conventionnels. Pour s'y ramener, il suffit de poser (finalement !)

$$\hat{t} := a\tilde{t}, \quad \hat{u} := bu$$

avec $a, b > 0$, donnant

$$\begin{aligned} & ab^{-1}\partial_{\hat{t}}\hat{u} + \frac{1}{24}b^{-1}\partial_x^3\hat{u} + b^{-2}\hat{u}.\partial_x\hat{u} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 24a\partial_{\hat{t}}\hat{u} + \partial_x^3\hat{u} + 24b^{-1}\hat{u}.\partial_x\hat{u} = 0 \end{aligned}$$

On fait le choix $a = \frac{1}{24}$ et $b = 4$ pour obtenir l'équation de KdV :

$$\partial_{\hat{t}}\hat{u} + \partial_x^3\hat{u} + 6\hat{u}.\partial_x\hat{u} = 0 \tag{8.5.8}$$

□

Régime linéaire d'équation d'ondes

Cette section est une remarque. On aurait pu choisir de décrire un régime différent et obtenir donc une équation EDP différente. Par exemple, reprenons l'équation (8.5.5) :

$$\partial_t^2 y_j = h^2 \partial_x^2 y_j + \frac{1}{12} h^4 \partial_x^4 y_j + 2h^3 \left(\partial_x y_j\right)\left(\partial_x^2 y_j\right) + O\left(h^5 \left|\partial_x^5 y\right|\right) + O\left(h^5 \left|\partial_x y\right| \left|\partial_x^4 y\right|\right) \quad (8.5.9)$$

et faisons le changement d'échelle en amplitude et en temps

$$\check{y} := \frac{y}{h^\beta}, \quad \check{t} := h^\alpha t,$$

avec $\beta \in \mathbb{R}$ donnant

$$h^{2\alpha+\beta} \partial_{\check{t}}^2 \check{y} = h^{2+\beta} \partial_x^2 \check{y} + \frac{1}{12} h^{4+\beta} \partial_x^4 \check{y} + 2h^{3+2\beta} \left(\partial_x \check{y}\right)\left(\partial_x^2 \check{y}\right) + O\left(h^{5+\beta} \left|\partial_x^5 \check{y}\right|\right) + O\left(h^{5+2\beta} \left|\partial_x \check{y}\right| \left|\partial_x^4 \check{y}\right|\right) \quad (8.5.10)$$

Le choix $\alpha = 1$ donne

$$\partial_{\check{t}}^2 \check{y} = \partial_x^2 \check{y} + \frac{1}{12} h^2 \partial_x^4 \check{y} + 2h^{1+\beta} \left(\partial_x \check{y}\right)\left(\partial_x^2 \check{y}\right) + O\left(h^3 \left|\partial_x^5 \check{y}\right|\right) + O\left(h^{3+\beta} \left|\partial_x \check{y}\right| \left|\partial_x^4 \check{y}\right|\right) \quad (8.5.11)$$

ainsi pour $\beta > 0$ les seuls termes dominants sont

$$\partial_{\check{t}}^2 \check{y} = \partial_x^2 \check{y}$$

qui est l'équation d'onde linéaire à une dimension sont la solution générale est

$$\check{y}\left(x, \check{t}\right) = A\left(x - \check{t}\right) + B\left(x + \check{t}\right)$$

avec des fonctions arbitraires $A(x)$ et $B(x)$. Ce sont des ondes d'amplitude $\check{y} \sim 1$ se déplaçant à la vitesse 1. L'interprétation ici est que pour le problème de départ en variables j, t, y on a des ondes d'amplitude $y \sim h^\beta \ll h^{-1}$ de taille spatiale $j \sim h^{-1} \gg 1$ se déplaçant à la vitesse $c = h^{\alpha-1} = 1$ et l'étude se fait sur une échelle de temps $t \sim h^{-\alpha} = h^{-1} \gg 1$. Cela signifie que les effets non linéaires ne sont pas perceptibles dans ce régime linéaire malgré que l'amplitude puisse être de l'ordre de $y \sim$ cste. Le régime de l'équation KdV a pour différence de supposer des amplitudes plus faibles, mais de décrire l'onde sur des temps beaucoup plus longs $\sim h^{-3}$, mettant en évidence les effets non linéaires comme les solitons (voir ci-dessous).

8.5.3 Solution de l'équation KdV à profil constant

On étudie maintenant l'équation (8.5.8). On cherche une solution de la forme

$$\hat{u}\left(x, \hat{t}\right) = X\left(x - c\hat{t}\right)$$

avec $c > 0$ arbitraire et $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonction arbitraire appelée "**profil**". Posons $\tau = x - ct$. On a $\partial_{\hat{t}}\hat{u} = -c\left(\frac{dX}{d\tau}\right)(\tau)$ et $\partial_x \hat{u} = \frac{dX}{d\tau}(\tau)$. Alors (8.5.8) s'écrit

$$\begin{aligned} & \partial_{\hat{t}}\hat{u} + \partial_x^3\hat{u} + 6\hat{u}.\partial_x\hat{u} && = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & -c\left(\tfrac{dX}{d\tau}\right) + \tfrac{d^3X}{d\tau^3} + 6X.\tfrac{dX}{d\tau} && = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & -cX + \tfrac{d^2X}{d\tau^2} + 3X^2 && = A, \quad : \text{on a intégré en } \tau. \end{aligned} \tag{8.5.12}$$

Avec une constante $A \in \mathbb{R}$. On vérifie [5] qu'une solution pour $A = 0$ est (on expliquera l'idée de cette solution plus loin)

$$X(\tau) = \frac{c}{2}\left(\cosh\left(\sqrt{\frac{c}{4}}\tau\right)\right)^{-2}. \tag{8.5.13}$$

avec $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

FIGURE 8.5.2 – Pour un paramètre $c > 0$ arbitraire, en coordonnées $x, \hat{t}$, on a un soliton, de largeur $\Delta x \sim \frac{1}{\sqrt{c}}$, amplitude $\hat{u} \sim c$ et vitesse c.

Remarque 8.5.3. L'équation (8.5.12) ressemble à l'équation de Newton de la mécanique sous la forme $\frac{d^2X}{d\tau^2} = F(X) = -\frac{dU}{dX}$ avec une force $F(X) = A + cX - 3X^2$ qui dérive du potentiel $U(X) = -AX - \frac{c}{2}X^2 + X^3$. Avec cette analogie, on peut écrire

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dX}{d\tau}\right)^2 + U(X) = E$$

avec une constante $E \in \mathbb{R}$. (en effet si on dérive cette équation on obtient l'équation précédente). Cette dernière équation ressemble à la conservation de l'énergie en mécanique, avec le premier terme qui est une "énergie cinétique" et E l'énergie totale conservée. Attention cependant que ici $\tau = x - ct$ est plutot une variable d'espace dans le repère mobile.

Signification de cette solution par rapport au problème de départ (8.5.3)

Commentaire sur les différents termes de l'équation de KdV

Les 2 premiers termes seuls $\partial_{\hat{t}}u + \partial_x^3 u = 0$ sont linéaires mais "dispersif" au sens où dans l'espace de Fourier ils donnent la relation $i\omega + (ik)^3 = 0 \Leftrightarrow \omega = k^3$ appelée relation

5. En effet, $\cosh'(x) = \sinh(x)$ et $\sinh'(x) = \cosh(x)$, $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$, donc $\frac{d^2}{dx^2}\left(\cosh^{-2}(x)\right) = \frac{4}{\cosh^2(x)} - \frac{6}{\cosh^4(x)}$ et posant $x = \sqrt{\frac{c}{4}}\tau$, on a $\cosh^{-2}(x) = \frac{2X}{c}$ et

$$\begin{aligned} \frac{d^2X}{d\tau^2} &= \frac{c}{2}\left(\frac{c}{4}\right)\frac{d^2}{dx^2}\left(\cosh^{-2}(x)\right) = \frac{c^2}{8}\left(\frac{4}{\cosh^2(x)} - \frac{6}{\cosh^4(x)}\right) = \frac{c^2}{8}\left(\frac{4.2X}{c} - \frac{6.4X^2}{c^2}\right) \\ &= cX - 3X^2 \end{aligned}$$

FIGURE 8.5.3 – Pour le problème de départ de FPU (8.5.3), Figure 8.5.1, et d'après Proposition 8.5.1, le soliton (8.5.13) correspond à une configuration "soliton" des oscillateurs, en coordonnées j, t, de largeur $\Delta j \sim \frac{1}{h\sqrt{c}}$, d'amplitude $y \sim hc$ et de vitesse $\frac{dj}{dt} = 1 + h^2 c$. Comme la vitesse des ondes (en régime linéaire) est $\frac{dj}{dt} = 1$, le soliton est une "onde supersonique".

de "dispersion" car la vitesse de groupe des ondes est

$$v_g(k) = \frac{d\omega}{dk} = 3k^2.$$

Cela implique que si on a une onde localisée à $t = 0$ ("paquet d'onde") alors elle a une largeur dans l'espace k (d'après le principe d'incertitude) et les différentes composantes ont des vitesses $v_g(k)$ différentes, donc le paquet d'onde s'élergie au cours du temps (i.e. se "disperse").

Le dernier terme $6u.\partial_x u$ est non linéaire. Dans l'équation $\partial_{\tilde{t}} u + 6u.\partial_x u = 0$, appelée "**équation de Burgers**" il a un effet contraire de concentrer le paquet d'onde en espace. En effet l'équation linéaire $\partial_{\tilde{t}} u + c\partial_x u = 0$ décrit une onde $u(x,t) = X(x - ct)$ se déplaçant à la vitesse c. On peut penser que l'équatione de Burgers décrit un déplacement à la vitesse $c = 6u(x)$ qui dépend de l'amplitude de l'onde. Ainsi le haut de l'onde va "déferler" comme les vagues sur la plage. Cela est empêché par le terme dispersif $\partial_x^3 u$.