Chapitre 5

Dynamique déterministe expansive et théorie ergodique

5.1 Introduction

Dans ce chapitre on étudie un modèle (ou une classe de modèles) de **dynamique déterministe** qui présente la propriété de « **sensibilité aux conditions initiales** » et manifeste donc des comportements chaotiques. Ce modèle est idéal pour présenter les concepts fondamentaux et pour mettre en oeuvre les techniques générales. On verra comment obtenir un modèle probabiliste de la dynamique, qui nous rapprochera donc des modèles de Markov du chapitre 4.

Des particularités de ce modèle est qu'il est à **temps discret,** que la dynamique est univaluée dans le futur, mais la **dynamique est multivaluée** dans le passé (i.e. un état a plusieurs états antécédents). Cela ressemble donc fortement au modèle de dynamique sur les graphes, et en ce sens ces modèles de dynamique expansive forment des modèles intermédiaires entre les modèles de dynamique probabiliste sur les graphes (chapitre précédent), et les modèles qui sont déterministes et univalués que l'on verra au chapitre suivant.

Conseil de lecture :

— Voir la vidéo (13 minutes) [26, Chap.VII].

5.2 Modèle de dynamique expansive

Dans cette première section on définit le modèle. L'espace est unidimensionnel, formé par les nombres réels modulo 1, $x \in [0, 1[$ avec $x = 1$ identifié à $x = 0$. Cela forme donc un cercle noté S^1. Précisément, cet espace est défini comment étant

$$S^1 := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

La dynamique sur cet espace est définie à partir d'une fonction :

$$f : S^1 \to S^1 \tag{5.2.1}$$

c'est à dire une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que l'on supposera C^∞ et vérifiant $f(x+k) = f(x) \mod 1, \forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}$. Partant de $x_0 \in S^1$, la **trajectoire** est :

$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1), \quad x_n = f(x_{n-1}) = \ldots = f^n(x_0).$$

On supposera que f est **strictement expansive** c'est à dire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) > 1.$$

Remarque 5.2.1. C'est cette condition qui traduit la **sensibilité aux conditions initiales**, car si $x_0, x_0' = x_0 + \delta x$ sont deux points voisins avec un petit écart $\delta x \ll 1$, à l'itération suivante on a $x_1 = f(x_0)$ et

$$x_1' = f(x_0') = f(x_0 + \delta x) \simeq f(x_0) + \delta x . f'(x_0) + O\left(\delta x^2\right)$$

donc

$$|x_1' - x_1| = \underbrace{f'(x_0)}_{>1} . |x_0' - x_0| + O\left(\delta x^2\right)$$

ce qui montre que l'écart entre les points est amplifié à chaque itération.

Exemple 5.2.2. Dans ce chapitre, on considérera souvent l'exemple suivant qui est très simple. Pour $\varepsilon \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = 2x + \frac{\varepsilon}{2\pi} \sin(2\pi x) \mod 1$$

qui vérifie $f(x+k) = f(x) + 2k = f(x) \mod 1$ donc définit bien une application $f : S^1 \to S^1$. On calcule :

$$f'(x) = 2 + \varepsilon \cos(2\pi x)$$

donc si $-1 < \varepsilon < 1$, on a $f'(x) > 1$, l'application est expansive. Voir figure 5.2.1. Il y a deux branches.

Remarque 5.2.3. Dans cet exemple, chaque point $y \in S^1$ a 2 antécédents $x_0 = f^{-1}(y), x_1 = f^{-1}(y)$. Ainsi la fonction $f : x \to y = f(x)$ est univaluée mais l'inverse $f^{-1} : y \to x_j = f_j^{-1}(y)$, $j = 0, 1$ est bi-valuée.

.

Remarque 5.2.4. (*) Plus généralement, une application strictement expansive $f : S^1 \to S^1$, C^∞ s'écrit

$$f(x) = kx + g(x)$$

avec $k \geq 2$ qui est le nombre de branches, et $g(x+1) = g(x)$ est périodique donc se décompose en série de Fourier. L'hypothèse d'expansivité est $f'(x) = k + g'(x) > 1, \forall x$.

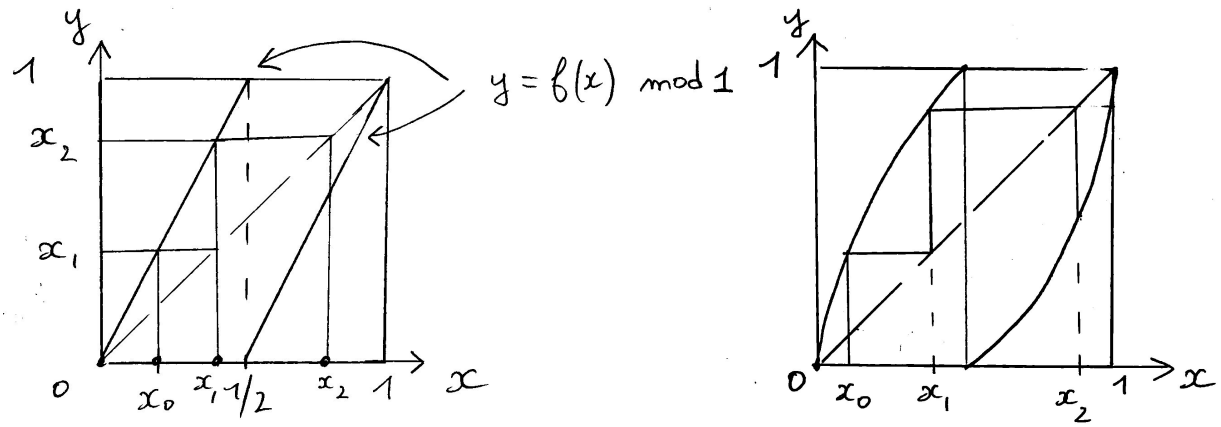

FIGURE 5.2.1 – (a) Trajectoire x_0, $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$,etc pour l'application expansive $y = f(x) = 2x \bmod 1$. (b). Idem pour $f(x) = 2x + \frac{\varepsilon}{2\pi}\sin(2\pi x) \mod 1$ avec $\varepsilon \simeq 0.2$.

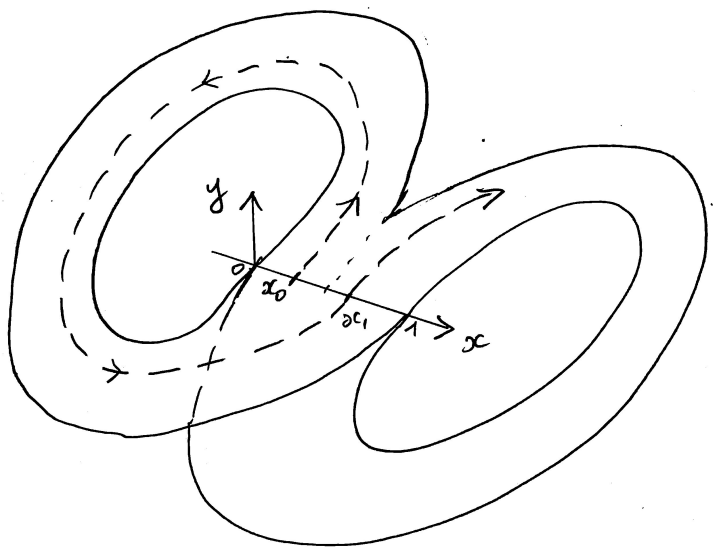

FIGURE 5.2.2

Remarque 5.2.5. Le modèle très simple présenté en (5.2.1) ne semble pas réaliste. Il apparaît cependant très souvent en physique (et autres disciplines) comme étant une section de Poincaré. Par exemple dans des modèle de Laser, modèles de turbulence (modèle de Lorenz), dynamique de Galaxies (modèle de Hénon). Voir figure 5.2.2. Voir vidéo [26, Chap.VII, à t=8mn,38s.].

Remarque 5.2.6. La dynamique dans ces rubans est sur une épaisseur très fine, la composante verticale y est « contractée » au cours du temps.

5.2.1 Étude d'un exemple simple

Considérons le cas très simple de l'application expansive linéaire

$$f : \begin{cases} S^1 & \to S^1 \\ x & \to 2x \bmod 1 \end{cases}$$

Par exemple (en base 10) une trajectoire est $x_0 = 0.24 \to x_1 = f(x_0) = 0.48 \to x_2 = f(x_1) = 0.96 \to x_3 = f(x_0) = 0.92$ etc..

En fait pour ce modèle, l'expression d'une trajectoire est plus simple à écrire (et comprendre) si on utilise la base[1] 2. Il suffit de décaler l'écriture vers la gauche, et ne garder que la partie fractionaire :

$$\begin{aligned} x_0 &= 0.01100111011\ldots \\ x_1 = f(x_0) &= 0.1100111011\ldots \\ x_2 = f(x_1) &= 0.100111011\ldots \\ x_3 = f(x_2) &= 0.00111011\ldots \end{aligned}$$

On observe que (voir figure 5.2.3)

— pour un nombre général écrit en base deux : $x = 0.\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots$, le premier chiffre $\varepsilon_0 = 0, 1$ indique si x est dans l'intervalle $I_0 = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ ou $I_1 = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

— La sensibilité aux conditions initiales est évidente, car une petite modification de la condition initiale x_0 par $x_0' = x_0 + \delta x$ avec $\delta x = 2^{-(n+1)}$ consiste à changer le chiffre ε_n (à la position n après la virgule). Donc après n itérations, on a $x_n = f^n(x_0) = 0.\varepsilon_n\ldots$ et $x_n' = f^n(x_0') = 0.\varepsilon_n'\ldots$ avec $\varepsilon_n' \neq \varepsilon_n$. Donc x_n et x_n' sont dans des intervalles I_j différents. Autrement dit une petite modification de la condition initiale de δx a donné un état x_n' différent de x_n à « l'échelle macroscopique » après seulement n itérations. Ex : $n = 10$, correspond à $\delta x = 2^{-11} = 5.10^{-4}$. A chaque itération, l'écart δx est multiplié par 2.

1. . Rappel, en base 2, les chiffres disponibles sont $0, 1$, et on a les règles d'addition $0 + 1 = 10$, $10 + 1 = 11$, $11 + 1 = 100$ (:qui est quatre), etc. La multiplication par deux est simplement le décalage à gauche et rajout d'un zéro : $1 \to 10 \to 100 \to \ldots$ etc. On peut aussi considérer les nombres à virgule : comme $0.011001\ldots$

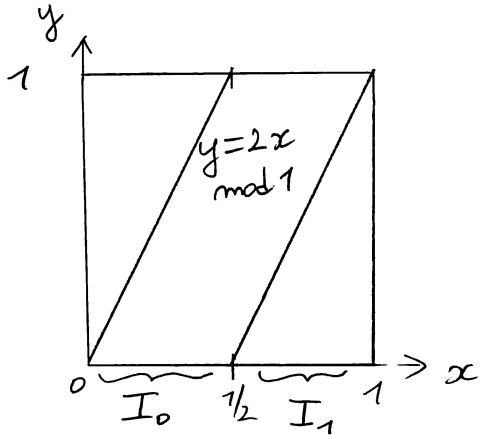

FIGURE 5.2.3

— Une orbite périodique de période n est telle que $x_n = f^n(x_0) = x_0$. Cela implique que l'écriture de x_0 en base 2 est périodique de période n (donc x_0 est un nombre rationnel et réciproquement).

On généralisera ces observations pour une dynamique f quelconque (non linéaire) à la section 5.4 sur la « dynamique symbolique ».

5.3 (*) Stabilité structurelle

Dans cette section on présente une propriété très importante des systèmes dynamiques expansifs (qui se généralise aux dynamiques hyperboliques). Cette propriété montre que le modèle est « robuste par rapport aux perturbations ». C'est donc une propriété importante dans un contexte de modélisation en physique, il garantit la pertinence du modèle même si on néglige des petits effets. Cela n'a rien d'évident à priori, car on pourrait craindre naturellement que la propriété de « sensibilité aux conditions initiales » (l'expansivité) fait que justement des petites perturbations puissent modifier considérablement les propriétés du modèle. Il n'en est rien. Cela peut sembler paradoxale. En fait il est vrai que :

— Partant d'une condition initiale donnée x_0, une petite perturbation du modèle $g = f + \delta f$, fait que la trajectoire perturbée $\tilde{x}_n = g^n(x_0)$ pour n assez grand peut être très différente de la trajectoire non perturbée $x_n = f^n(x_0)$.

Mais on va montrer que

— Vu dans son ensemble, l'ensemble des trajectoires perturbées $\{g^n(x_0')\}_{x_0,n}$ est très proche des trajectoires non perturbées $\{f^n(x_0)\}_{x_0,n}$, au sens précis suivant : pour toute trajectoire perturbée $\{g^n(x_0')\}_n$ (partant de x_0' donné) il existe une trajectoire non perturbée $\{f^n(x_0)\}_n$ partant d'un certain x_0 proche de x_0' telle que chaque point $f^n(x_0)$ est proche de $g^n(x_0')$. Le théorème suivant donnera l'existence de cette correspondance bijective $h : S^1 \to S^1$ proche de l'identité, telle que $x_0' = h(x_0)$, $g^n(x_0') = h(f^n(x_0))$ pour tout n. La preuve du théorème donnera même la

construction de h.

Ainsi cette propriété de « stabilité structurelle » est déjà une première indication que pour les dynamiques chaotiques, il ne faut pas s'intéresser aux trajectoires individuelles, mais aux trajectoires dans leur collectivité.

Dans le théorème suivant on utilise la norme C^1 qui est par définition : $\|f-g\|_{C^1} := \sup_x |f(x)-g(x)| + \sup_x |f'(x)-g'(x)|$. On rappelle aussi qu'un homéomorphisme h est par définition une application continue bijective et d'inverse continue.

Théorème 5.3.1. *« **Stabilité structurelle** ». Si $f : S^1 \to S^1$ est expansive (et au moins C^1), alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour toute autre application $g : S^1 \to S^1$ (au moins C^1) « ε -proche de f » en norme C^1, c'est à dire :*

$$\|f-g\|_{C^1} \leq \varepsilon$$

alors g est aussi expansive et de plus les dynamiques de f et g sont « identiques » au sens où il existe un homéomorphisme $h : S^1 \to S^1$ tel que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ S^1 & \xrightarrow{g} & S^1 \end{array}$$

c.a.d. $g = h \circ f \circ h^{-1}$. De plus $\|h\|_{C^0} \leq C\varepsilon$ ce qui signifie que h est proche de l'identité en norme C^0.

Remarque 5.3.2. La relation $g = h \circ f \circ h^{-1}$ signifie que l'application h envoie les trajectoires de f sur celles de g. En effet on a que pour tout $x \in S^1$, $n \in \mathbb{N}$,

$$g^n(x) = h \circ f^n \circ h^{-1}(x)$$

Remarque 5.3.3. Même si f, g sont C^∞, l'application h est en général seulement Hölder continue (son graphe est une « fractale »). Il est facile de comprendre que h ne peut être dérivable car observons que si x est un point fixe de f, alors $x = f(x)$ et $y = h(x)$ est un point fixe de g car $g(y) = h \circ f \circ h^{-1}(y) = h(f(x)) = h(x) = y$. Si h est dérivable alors $g'(y) = f'(x)$. Or il est clair en perturbant f que l'on est libre de choisir $g'(y)$ qui peut être différent de $f'(x)$ (i.e le facteur de stabilité du point fixe).

Remarque 5.3.4. Le théorème 5.3.1 dit que d'un point de vue « topologique » c'est à dire à équivalence près par des homéomorphismes (applications continues), toutes les dynamiques expansives proches sont équivalentes. Il n'y a pas besoin de paramètres pour les distinguer. On dit que l'espace des modules est le singleton $\{0\}$. En fait cette équivalence topologique

est assez « grossière ». Il y a des quantités (propriétés) dynamiques importantes de f, g qui sont différentes comme la stabilité des orbites que ne distingue pas cette équivalence.On verra par exemple que les spectres de Ruelle qui gouvernent les fonctions de corrélation dynamique sont différents en général.

Remarque 5.3.5. @@ Parler d'autres résultats voisins comme « closing lemma » « Shadowing theorem » etc.. (qui ont une preuve commune).

Démonstration. @@ faire @@. cf Katok-Hasselblatt, cf Arnold, méthodes géométriques ... □

5.4 (*) Dynamique symbolique

Considérons une application expansive $f : S^1 \to S^1$ à deux branches et $f(0) = 0$ (pour simplifier). Posons $a = f^{-1}(0)$ autre que 0.

On considère la **partition de Markov** de l'espace $S^1 = I_0 \cup I_1$ formée par les deux intervalles :

$$I_0 := [0, a[, \quad I_1 := [a, 1[$$

Pour un point $x_0 \in S^1$ de trajectoire $x_n = f^n(x_0)$ on associe la suite de symboles $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$ avec $\varepsilon_j \in \{0, 1\}$ définis par

$$\varepsilon_n = 0 \text{ si } x_n \in I_0$$
$$\varepsilon_n = 1 \text{ si } x_n \in I_1$$

On dit que $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$ est la **dynamique symbolique** de x_0.

Proposition 5.4.1. *On a que la suite $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$ caractérise le point x_0.*

Démonstration. Il suffit de trouver une procédure pour calculer x_0 à partir de $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$ donné. Appelons f_0^{-1}, f_1^{-1} les deux branches inverses de f. D'après l'hypothèse d'expansivité de f, $\left(f_j^{-1}\right)' < \theta < 1$ sont des applications contractantes.

Considérons la suite d'intervalles suivants qui sont imbriqués et qui contiennent tous x_0 : $I = [0, 1[$,puis $I_{\varepsilon_0} = f_{\varepsilon_0}^{-1}(I) \subset I$,puis $I_{\varepsilon_0,\varepsilon_1} = f_{\varepsilon_0}^{-1}(I_{\varepsilon_1}) \subset I_{\varepsilon_0}$,puis $I_{\varepsilon_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2} = f_{\varepsilon_0}^{-1} f_{\varepsilon_1}^{-1}(I_{\varepsilon_2}) \subset I_{\varepsilon_0,\varepsilon_1}$, etc. Comme les applications f_j^{-1} sont contractantes, leur taille est majorée par

$$|I_{\varepsilon_0,\varepsilon_1,\ldots\varepsilon_n}| \leq \theta^{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Donc la limite $\bigcap_{n\geq 0} I_{\varepsilon_0,\varepsilon_1,\ldots\varepsilon_n}$ est un unique point qui contient x_0 donc c'est x_0. □

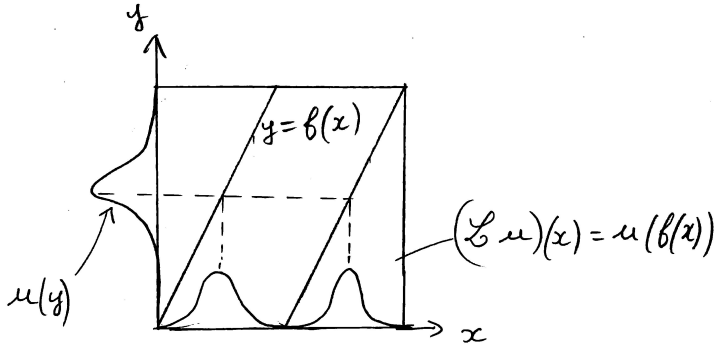

FIGURE 5.5.1 – Schéma de l'action de l'opérateur de transfert $\mathcal{L}$ sur une fonction $u(y)$. On observe que les oscillations sont « doublées ».

5.5 Opérateur de transfert

La question abordée dans cette section est : « comment adopter une description probabiliste pour la dynamique de f qui est par définition déterministe ? »

On va s'intéresser à l'évolution de distributions de probabilité plutôt qu'à l'évolution des points. Pour cela, dans la Section 2.1.4, on a introduit l'opérateur de transfert $\mathcal{L}$ qui fait évoluer les fonctions. Rappelons sa définition.

Définition 5.5.1. Si $f : S^1 \to S^1$ est une application C^∞, on considère l'opérateur

$$\mathcal{L} \begin{cases} C^\infty(S^1) & \to C^\infty(S^1) \\ u & \to u \circ f \end{cases}$$

appelé **opérateur de composition**, ou **opérateur de transfert**.

Voir figure 5.5.1.

Considérons l'opérateur $\mathcal{L}^*$ adjoint à $\mathcal{L}$ dans l'espace $L^2(S^1, dx)$ (où dx est la mesure de Lebesgues ordinaire sur $\mathbb{R}$), c'est à dire que $\mathcal{L}^*$ est définit par

$$\langle u|\mathcal{L}^* v\rangle = \langle \mathcal{L}u|v\rangle, \quad \forall u, v \in C^\infty\left(S^1\right),$$

avec le « produit scalaire L^2 » :

$$\langle u|v\rangle := \int \overline{u(x)} v(x)\, dx$$

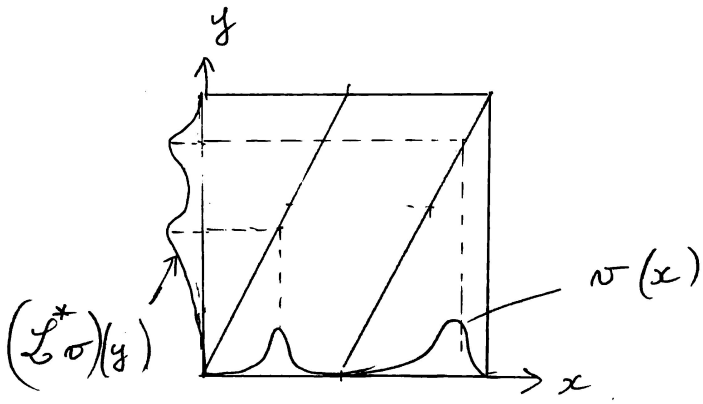

FIGURE 5.5.2 – Schéma de l'action de l'opérateur de transfert $\mathcal{L}^*$ sur une fonction $v(x)$. On observe que les variations sont « étalées ».

Proposition 5.5.2. *$\mathcal{L}^* : C^\infty(S^1) \to C^\infty(S^1)$ est donné par*

$$(\mathcal{L}^* v)(y) = \sum_{\varepsilon=0,1} \frac{1}{f'(x_\varepsilon)} v(x_\varepsilon), \quad \text{avec } x_\varepsilon = f_\varepsilon^{-1}(y) \tag{5.5.1}$$

Démonstration. On écrit

$$\begin{aligned}\langle u|\mathcal{L}^* v\rangle = \langle \mathcal{L}u|v\rangle &= \int \overline{(\mathcal{L}u)(x)} v(x)\, dx \\ &= \int \overline{u(f(x))} v(x)\, dx\end{aligned}$$

Posons le changement de variable $y = f(x)$, soit $x_\varepsilon = f_\varepsilon^{-1}(y)$, donnant $dx_\varepsilon = (f_\varepsilon^{-1})'(y)\, dy = \frac{1}{f'(x_\varepsilon)} dy$. On continue

$$\begin{aligned}\langle u|\mathcal{L}^* v\rangle &= \sum_\varepsilon \int_{S^1} \overline{u(y)} v(x_\varepsilon)\, dx_\varepsilon \\ &= \int_{S^1} \overline{u(y)} \left(\sum_\varepsilon v(x_\varepsilon) \frac{1}{f'(x_\varepsilon)} \right) dy\end{aligned}$$

Par identification avec $\langle u|\mathcal{L}^* v\rangle = \int_{S^1} \overline{u(y)} (\mathcal{L}^* v)(y)\, dy$, on déduit (5.5.1). □

Voir figure 5.5.2.

L'intérêt de l'opérateur $\mathcal{L}^*$ vient de la propriété **??** qui montre que $\mathcal{L}^*$ généralise la description de la dynamique de points en dynamique de distribution de probabilité.

5.6 Mélange, ergodicité, mesure d'équilibre

La propriété pour une dynamique d'être « chaotique » n'est pas bien définie. La propriété mathématique précise qui signifie « très chaotique » est d'être une dynamique « mélangeante » et à fortiori « ergodique ». Nous définissons ici ces propriétés donnons leur signification et montrons que les dynamiques expansives sur le cercle ont ces propriétés.

Avant cela nous introduisons la notion de fonction de corrélation.

5.6.1 Fonction de corrélation et mélange exponentiel

Définition 5.6.1. La **fonction de corrélation dynamique** de deux fonctions $u, v \in C^\infty(S^1)$ au temps $n \in \mathbb{N}$ est

$$\begin{aligned} C_{v,u}(n) := \langle v|\mathcal{L}^n u\rangle_{L^2} &= \int \overline{v(x)} u(f^n(x))\, dx \\ &= \langle (\mathcal{L}^*)^n v|u\rangle_{L^2} = \overline{\langle u|(\mathcal{L}^*)^n v\rangle_{L^2}} \end{aligned}$$

c'est à dire que $C_{v,u}(n)$ mesure la fonction u évoluée au temps n par $\mathcal{L}^n$ et testée sur v, ou de façon équivalente, la fonction v évoluée au temps n par $\mathcal{L}^n$ et testée sur v.

Théorème 5.6.2. *Une application C^∞ expansive $f : S^1 \to S^1$ définit une dynamique* ***mélangeante à taux exponentiel*** *c'est à dire qu'il existe $\alpha > 0$, $C > 0$ et une mesure $d\mu_{SRB}$ sur S^1 tels que pour toutes fonctions $u, v \in C^\infty(S^1)$, tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\left| C_{v,u}(n) - \left(\int \overline{v} dx\right)\left(\int u d\mu_{SRB}\right)\right| \leq Ce^{-\alpha n}$$

On appelle $d\mu_{SRB}$ la ***mesure d'équilibre.***

Voir preuve plus loin.

Remarque 5.6.3. $d\mu_{SRB}$ s'appelle aussi **mesure SRB** (Sinaï, Ruelle, Bowen) ou **mesure physique**, ou **mesure naturelle**.

Remarque 5.6.4. **Signification :** en posant $u = \mathbf{1}$ (fonction $u(x) = 1, \forall x$) on a $C_{v,u}(n) = \left(\int \overline{v} dx\right)$ et on obtient donc $\int d\mu_{SRB} = 1$ c'est à dire que $d\mu_{SRB}$ est une mesure de probabilité. D'après la définition $\overline{C_{v,u}(n)} = \langle u|(\mathcal{L}^*)^n v\rangle_{L^2}$, et en choisissant une mesure de probabilité initiale v (i.e. $\int v dx = 1$), la propriété de mélange exponentiel s'écrit

$$\overline{C_{v,u}(n)} = \langle u|(\mathcal{L}^*)^n v\rangle_{L^2} \underset{n\to\infty}{\to} \left(\int \overline{u} d\mu_{SRB}\right)$$

et signifie que

$$(\mathcal{L}^*)^n v \underset{n\to\infty}{\to} d\mu_{SRB} \quad : \text{ au sens des distributions}$$

c'est à dire que toute mesure de probabilité v à densité C^∞ converge exponentiellement vite vers la mesure d'équilibre μ_{SRB}. Noter que si $v = \delta_x$ (qui n'est pas C^∞) on a $(\mathcal{L}^*)^n \delta_x = \delta_{f^n(x)}$ c'est à dire que l'on observe un point qui évolue sur une trajectoire, et il n'y a pas de convergence de la mesure de probabilité.

On verra que μ_{SRB} est en fait une mesure à densité C^∞, mais cela est spécifique au cas des dynamiques expansives.

Démonstration. du théorème 5.6.2. On pourra consulter [18]. . Voici une preuve dans le cas particulier et simple d'une application linéaire expansive $f(x) = 2x \bmod 1$. La preuve générale s'inspire de cet exemple mais utilise plus d'analyse.

On décompose les fonctions $u, v \in C^\infty(S^1)$ en modes de Fourier

$$\varphi_k(x) = e^{i2\pi kx}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

qui forment une base orthonormée de $L^2(S^1)$: $\langle \varphi_k | \varphi_l \rangle = \delta_{k,l}$. Remarquer le fait important

$$\mathcal{L}\varphi_k = \varphi_k \circ f = \varphi_{2k}$$

qui montre que les modes de Fourier sont envoyés à l'infini sauf le mode $k = 0$. On peut calculer la fonction de corrélation entre deux modes de Fourier

$$\langle \varphi_k | \mathcal{L}^n \varphi_l \rangle = \langle \varphi_k | \varphi_{2^n l} \rangle = \delta_{k,2^n l}$$

Donc pour k, l fixés et $l \neq 0$, en choisissant n assez grand, on a $\langle \varphi_k | \mathcal{L}^n \varphi_l \rangle = 0$. Le seul terme non nul pour tout $n \in \mathbb{N}$ est $\langle \varphi_{k=0} | \mathcal{L}^n \varphi_{l=0} \rangle = 1$. Par ailleurs on a $\int \varphi_k dx = \delta_{k,0}$. Donc, en posant $d\mu_{SRB} = dx$ (dans ce cas linéaire), on a bien la propriété de mélange exponentiel pour les fonction qui sont modes de Fourier. On déduit la même propriété pour toute fonction $u, v \in C^\infty(S^1)$, en décomposant u, v en modes de Fourier et utilisant le fait que les composantes de Fourier décroissent très vite. □

5.6.2 Exemples numériques d'évolution de densité et de mesures d'équilibre

5.6.3 (*) Ergodicité

Théorème 5.6.5. *Une application C^∞ expansive $f : S^1 \to S^1$ définit une dynamique* ***ergodique*** *c'est à dire qu'il existe une mesure $d\mu_{SRB}$ sur S^1 telle que pour toutes fonctions $u, v \in C^\infty(S^1)$ on a*

$$\left| \frac{1}{n} \left(\sum_{m=0}^{n-1} C_{v,u}(m) \right) - \left(\int \overline{v} dx \right) \left(\int u d\mu_{SRB} \right) \right| \underset{n\to\infty}{\to} 0 \tag{5.6.1}$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate (et plus faible) du mélange : on utilise le théorème de Césaro qui montre que si une suite a une limite $u_n \underset{n\to\infty}{\to} l$ alors sa somme a la même limite : $\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} u_m \underset{n\to\infty}{\to} l$. □

Remarque 5.6.6. La signification de la propriété d'ergodicité est que au sens des distributions, pour toute mesure initiale C^∞ de probabilité v, on a

$$\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} (\mathcal{L}^*)^m v \underset{n\to\infty}{\to} \mu_{SRB} \quad : \text{ au sens des distributions}$$

On dit aussi que « la moyenne temporelle tends vers la mesure d'équilibre (ou une moyenne spatiale) ».

Interprétation de la mesure d'équilibre μ_{SRB} comme mesure naturelle : (réf : livre de Ruelle [34]).

Proposition 5.6.7. *Pour un point $x_0 \in S^1$, posons*

$$\mu_{x_0,n} := \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} \delta_{f^m(x_0)}$$

qui est une mesure de probabilité portée par les n premiers points de la trajectoire issue de x_0. Alors en tant que distribution $\mu_{x_0,n}(x) \in \mathcal{D}'\left(S^1_x \times S^1_{x_0}\right)$ on a

$$\lim_{n\to\infty} \mu_{x_0,n} = \mu_{SRB}(x) \otimes 1(x_0).$$

De façon équivalente, pour presque tout point x_0

$$\lim_{n\to\infty} \mu_{x_0,n} = \mu_{SRB}.$$

Démonstration. On considère $\mu_{x_0,n}(x) \in \mathcal{D}'\left(S^1_x \times S^1_{x_0}\right)$ comme une distribution en x et x_0. Pour toute fonction $u \in C^\infty(S^1_x)$, $v \in C^\infty\left(S^1_{x_0}\right)$ (fonctions test), on a

$$\begin{aligned}\langle u \otimes v, \mu_{x_0,n}\rangle &= \langle v, \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} u(f^m(x_0))\rangle \\ &= \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}\int \overline{v(x_0)} u(f^m(x_0))\, dx_0 = \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}\langle v, \mathcal{L}^m u\rangle = \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} C_{v,u}(m)\end{aligned}$$

D'après (5.6.1), on a $\lim_{n\to\infty}\langle u\otimes v, \mu_{x_0,n}\rangle = \left(\int \overline{v} dx_0\right)\left(\int u d\mu_{SRB}\right) = \langle u\otimes v, \mu_{SRB}\otimes 1\rangle$. Cela signifie que au sens des distributions, $\lim_{n\to\infty}\mu_{x_0,n} = \mu_{SRB}(x)\otimes 1(x_0)$. □