
Cours de Systèmes dynamiques, chaos et applications.

Frédéric Faure

Université Grenoble Alpes, France
frederic.faure@univ-grenoble-alpes.fr

Master de Physique M1
(version : 5 novembre 2018)

Table des matières

1	Introduction	9
1.1	Introduction	9
1.1.1	Le problème de prédiction	9
1.1.2	Le problème inverse ou problème de découverte des lois. Modélisation.	11
1.1.3	Hasard et déterminisme	14
1.1.4	Plan du cours	14
1.2	Modèle du pendule	17
1.2.1	Equation de mouvement de Newton (1687)	17
1.2.2	Résolution numérique de l'EDO (1.2.3) par la méthode de Euler (1768)	18
1.2.3	Section de Poincaré (1892)	22
1.2.4	Systèmes physiques reliés au modèle du pendule	24
1.3	L'application logistique (1838,1985)	25
1.3.1	Définition	25
1.3.2	Observations	26
1.3.3	Ensemble de Mandelbrot (1980)	29
1.3.4	L'ensemble de Julia (1918)	31
1.4	Billard de Sinaiï (1970)	32
1.4.1	Le billard rectangulaire	32
1.4.2	Billard dispersif de Sinaiï (1970)	34
1.4.3	Systèmes physiques reliés au modèle du billard dispersif	36
1.5	Dynamique spatio-temporelle	37
1.5.1	Modèle de Belousov-Zhabotinsky (1950)	37
1.5.2	Interprétation du modèle en chimie	39
2	Applications et champ de vecteurs	41
2.1	Applications	41
2.1.1	Définitions et exemples	41
2.1.2	Rappels sur la différentielle	43
2.1.3	Applications conservatives ou dissipatives	43
2.1.4	Opérateur de transfert	45
2.1.5	Point fixe et stabilité	48
2.2	Champ de vecteur	51
2.2.1	Définitions : champ de vecteur, équations du mouvement, flot	51

2.2.2	Flot conservatifs et dissipatifs	52
2.2.3	Opérateur de transfert	54
2.2.4	(*)Théorème fondamental qui garantit les solutions aux EDO	57
2.2.5	Point fixe et stabilité	59
3	Dynamique Hamiltonienne, Billards et flot géodésique	63
3.1	Équations de mouvement de la mécanique	63
3.2	Exemples	65
3.3	Flot Hamiltonien et crochets de Poisson	67
3.4	Particule libre dans l'espace Euclidien. Translation sur le tore et billards	69
3.4.1	Particule libre sur le cercle S^1 ou le tore \mathbb{T}^d	70
3.5	Particule libre sur une surface (ou espace courbe). Géodésiques	74
3.5.1	Du flot géodésique au billard	76
3.6	Billards	77
3.7	Apparition du chaos dans un billard circulaire déformé	85
3.7.1	Modèle étudié	86
3.7.2	Billard circulaire ($a = 0$)	87
3.7.3	Billard légèrement déformé ($a = 0.02$)	88
3.7.4	Billard plus déformé ($a = 0.05$)	89
3.7.5	Billard déformé ($a = 0.1 - 0.2$)	90
3.8	Exemples de perturbation de modèles intégrables, apparition du chaos Hamiltonien, avec $d = 2$ degrés de liberté	92
3.8.1	L'application standard ("standard map")	92
3.8.2	Le pendule magnétique	93
3.8.3	Le problème à trois corps réduit	93
4	Dynamique probabiliste de Markov	95
4.1	Définitions et propriétés générales	95
4.1.1	Loi d'évolution sur un graphe	95
4.1.2	Exemples et quelques questions	96
4.1.3	Matrices positives, ergodiques, mélangeantes	100
4.1.4	Matrices stochastiques	105
4.1.5	Matrices réversibles ou principe de la balance détaillée	110
4.2	Processus à temps continu	113
5	Dynamique déterministe expansive et théorie ergodique	117
5.1	Introduction	117
5.2	Modèle de dynamique expansive	117
5.2.1	Étude d'un exemple simple	120
5.3	(*) Stabilité structurelle	121
5.4	(*) Dynamique symbolique	123
5.5	Opérateur de transfert	124
5.6	Mélange, ergodicité, mesure d'équilibre	126

5.6.1	Fonction de corrélation et mélange exponentiel	126
5.6.2	Exemples numériques d'évolution de densité et de mesures d'équilibre	127
5.6.3	(*) Ergodicité	127
6	Dynamique déterministe hyperbolique et théorie ergodique	129
6.1	Introduction	129
6.1.1	Billard dispersif de Sinaï et instabilité hyperbolique	130
6.1.2	Flot géodésique sur une surface à courbure négative	131
6.2	Instabilité hyperbolique d'Anosov	133
6.2.1	Espace des phases et couche d'énergie	133
6.2.2	Définition de Flot Hyperbolique ou sensibilité aux conditions initiales.	133
6.3	Ergodicité et mélange	137
6.3.1	Un flot géodésique hyperbolique est mélangeant (et ergodique) . . .	137
6.3.2	Modèle simple du « cat map » qui est mélangeant (et ergodique) . .	139
6.4	Théorème central limite et diffusion	141
7	L'attracteur étrange de Lorenz	143
7.1	Modèle de Lorenz pour l'hydrodynamique. Cellules de convection de Bénard	143
7.1.1	Convection et hydrodynamique	143
7.1.2	Modèle simplifié de Rayleigh	145
7.1.3	Approximation de Lorenz sur quelques modes de Fourier. Équations de Lorenz.	150
7.1.4	De retour au mouvement du fluide	154
7.2	Le moulin de Lorenz	154
7.2.1	Modélisation physique et équations de Lorenz	155
7.2.2	Preuve de la Proposition 7.2.2	157
7.3	Etude des équations de mouvement de Lorenz	163
7.3.1	Points fixes et leur stabilité	163
7.3.2	Variétés stables et instables du point fixe 0	167
7.3.3	Contraction du flot de Lorenz et existence d'un attracteur	167
7.3.4	Modèle géométrique du flot de Lorenz	170
7.3.5	Modèle linéaire simplifié	172
7.3.6	Cantor et dimension fractale	173
7.4	Mesure d'équilibre de Sinaï-Ruelle-Bowen (SRB, 1976). Ergodicité.	177
7.5	Mélange	179
7.6	Théorème central limite	181
7.6.1	Processus aléatoire de "pile ou face" et théorème central limite . . .	181
7.6.2	Théorème central limite pour le flot de Lorenz	183
8	Dynamique de champs et morphogénèse	187
8.1	Modèle à une dimension et une composante	187
8.1.1	Modèle de Swift-Hohenberg	187
8.1.2	Analyse de la stabilité d'une solution homogène stationnaire	189

8.1.3	Stabilité du motif. Etude non linéaire.	192
8.1.4	Simulation numérique	193
8.2	Modèle de réaction-diffusion à deux composantes	193
8.2.1	Modèle	193
8.2.2	Interprétation des équations du modèle de Gray Scott	194
8.2.3	Analyse de la stabilité d'une solution homogène stationnaire	195
8.3	Motifs périodiques et quasi-périodiques en dimension ≥ 2	203
8.3.1	Exemples en dimension 2	204
8.3.2	Motif périodique et quasi-périodique	205
8.4	Motifs par segregation ou avalanches	211
8.5	Ondes solitaires ou Solitons	213
8.5.1	Historique	214
8.5.2	Du modèle des oscillateurs non linéaires à l'équation de KdV	215
8.5.3	Solution de l'équation KdV à profil constant	221
A	Formulaire	225
A.1	Algèbre linéaire	225
A.1.1	Forme normale de Jordan et diagonalisation	225
A.1.2	Rayon spectral d'une matrice	228
A.1.3	Diagonalisation d'une matrice 2×2	229
B	Énoncés et solutions des exercices	231
B.1	Chapitre introduction	231
B.1.1	«Suite $x_{n+1} = ax_n + b$ ».	231
B.2	Chapitre applications et champs de vecteur	232
B.3	Chapitre dynamique Hamiltonienne, flots géodésiques et billard	232
B.3.1	Loi de Newcomb-Bendford, «application de l'unique ergodicité».	232
B.3.2	Billard circulaire	233
B.3.3	Hyperbolicité d'un billard dispersif.	236
B.4	Chapitre Dynamique probabiliste sur les graphes	239
B.4.1	«Matrice d'adjacence d'un graphe et entropie»	239
B.4.2	« Internet Google rank »	242
B.4.3	« Algorithme de MonteCarlo pour le modèle d'Ising »	244
B.5	Chapitre Dynamique déterministe expansive	246
B.6	Chapitre Dynamique déterministe hyperbolique	246
B.7	Chapitre Le modele de Lorenz en hydrodynamique. Le moulin de Lorenz et son attracteur etrange	246
B.8	Chapitre Morphogenese et ondes non linéaires	246
C	Programmes d'illustration en langage python et C++	247
C.1	Programmes en langage python	247
C.1.1	fichier syracuse.py pour la Section 1.1.1.	247
C.2	Programmes en langage C++	248

C.2.1 fichier syracuse.cc pour la Section 1.1.1. 248

Notes :

- Ce document pdf est disponible sur la page web :
https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~faure/enseignement/systemes_dynamiques
avec des liens html cliquables.
- La marque (*) signifie que ce passage peut être sauté en première lecture et sera probablement sauté en cours.
- Notations : le signe $:=$ signifie une définition. Par exemple $A := \sin(x)$ signifie que dans la suite on pose $A = \sin(x)$.

Animations sur la page web : il y a de nombreuses animations qui illustrent chaque parties du cours sur [la page web](#).

Chapitre 1

Introduction

1.1 Introduction

Il y a deux problèmes fondamentaux en sciences :

1.1.1 Le problème de prédiction

La **question fondamentale** en théorie des systèmes dynamiques est :

***Problème de prédiction** : “Connaissant les lois d’évolution, prévoir le comportement effectif à temps longs, prévoir des phénomènes observables”.*

“**loi d’évolution**” signifie une règle qui donne l’état à l’instant $t + \delta t$ connaissant l’état à l’instant t . Cette loi peut être **une loi déterministe** (si l’état futur est déterminé de façon unique à partir de l’état présent) et/ou une **loi probabiliste** (si l’état futur est donné par une distribution de probabilité à partir de l’état présent). La physique a découvert que les lois d’évolution dans la nature sont assez simples.¹

L’homme s’interroge sur cette question depuis la nuit des temps. Les premières réponses sont venues avec le mouvement des astres dans le ciel étoilé car ce mouvement est au premier abord assez simple et donc prévisible. Cela a marqué notre culture. Les 7 objets célestes visibles qui bougent par rapport au ciel étoilé sont : lune (lundi), mars (mardi), mercure (mercredi), jupiter (jeudi), venus (vendredi), saturne (samedi), soleil (dimanche, sunday).

1. Ce sont les lois de la “mécanique”. En gros chaque particule interagit avec ses voisines de façon précise et simple. On dit que les lois sont “locales”. En mécanique classique les lois sont déterministes. En mécanique quantique, les lois quantique sont probabilistes et concernent l’amplitude de probabilité.



FIGURE 1.1.1 – Mouvement apparent des étoiles, par rapport à la Terre. Mouvement de Mars par rapport aux étoiles. Il a fallu du temps pour découvrir que la Terre appartient au système solaire.



FIGURE 1.1.2 – La plupart des phénomènes observés semblent imprévisibles, car trop “complexes”, “chaotiques”. La météo échappe à la prévision au delà de quelques jours. Les éruptions solaires ont un impact sur notre climat et découlent de dynamique complexe interne au soleil. *Quelle est l’origine de la complexité observée ? (chaos = confusion, désordre, imprévisibilité)*

Illustration avec deux suites

On pourrait croire que si la loi d'évolution est simple alors il doit être simple de répondre à la question précédente, c'est à dire de prédire le comportement à temps long. Cela n'est pas toujours vrai. Voici deux exemples de loi simples (mathématiques) déterministes qui illustrent ces propos. Pour la première loi la prédiction est facile. Pour la deuxième, on ne sait toujours pas expliquer le comportement (mais on l'observe). Voir la figure 1.1.3.

1. Exemple 1 : à l'instant $t \in \mathbb{Z}$, l'état du système est un nombre entier $x(t) \in \mathbb{N}$ et la loi est

$$x(t+1) = \begin{cases} \frac{1}{2}x(t) & \text{si } x(t) \text{ est pair} \\ \frac{1}{2}(x(t)+1) & \text{si } x(t) \text{ est impair} \end{cases} \quad (1.1.1)$$

Par exemple, partant de $x(0) = 21$, la suite des valeurs est 21, 11, 6, 3, 2, 1, 1, ... Cette loi est appelée la « **suite géométrique** ». Pour une donnée initiale $x(0)$ quelconque, la réponse à la question de prédiction est assez simple : à une date t quelconque, $x(t) = \lceil \frac{1}{2^t} x(0) \rceil$ ($\lceil \cdot \rceil$ signifie l'entier supérieur le plus proche). Ainsi la suite décroît et pour $t \geq \frac{\ln x(0)}{\ln 2}$ alors $x(t) = 1$.

2. Exemple 2 : à l'instant $t \in \mathbb{N}$, l'état du système est un nombre entier $x(t) \in \mathbb{N}$ et la loi est

$$x(t+1) = \begin{cases} \frac{1}{2}x(t) & \text{si } x(t) \text{ est pair} \\ \frac{1}{2}(3x(t)+1) & \text{si } x(t) \text{ est impair} \end{cases} \quad (1.1.2)$$

Cette loi est appelée la « **suite de Syracuse** ». On observe que si la valeur de départ est $x(0) = 1$ alors les valeurs suivantes sont périodiques 1, 2, 1, 2, 1, ... Si la valeur de départ $x(0) = 7$, les valeurs suivantes sont 7, 11, 17, 26, 13, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 2, 1, 2, 1, ... La fameuse **conjecture de Syracuse** non démontrée à ce jour est que partant de toute valeur $x(0) \geq 1$ la suite arrive forcément au bout d'un moment T à la suite périodique 1, 2, 1, 2, ... Lorsque l'on trace numériquement les trajectoires, on observe des courbes qui semblent « imprévisibles, chaotiques ». Essayer la valeur de départ $x(0) = 27$.

Programme python : voir Section C.1.1.

Programme c++ : voir Section C.2.1.

1.1.2 Le problème inverse ou problème de découverte des lois. Modélisation.

La question précédente de prédiction suppose que l'on connaît à priori les lois d'évolution. La difficulté en physique est que au départ on observe des phénomènes sans connaître les lois sous jacentes. La découverte de ces lois peut être appelée le "problème inverse" :

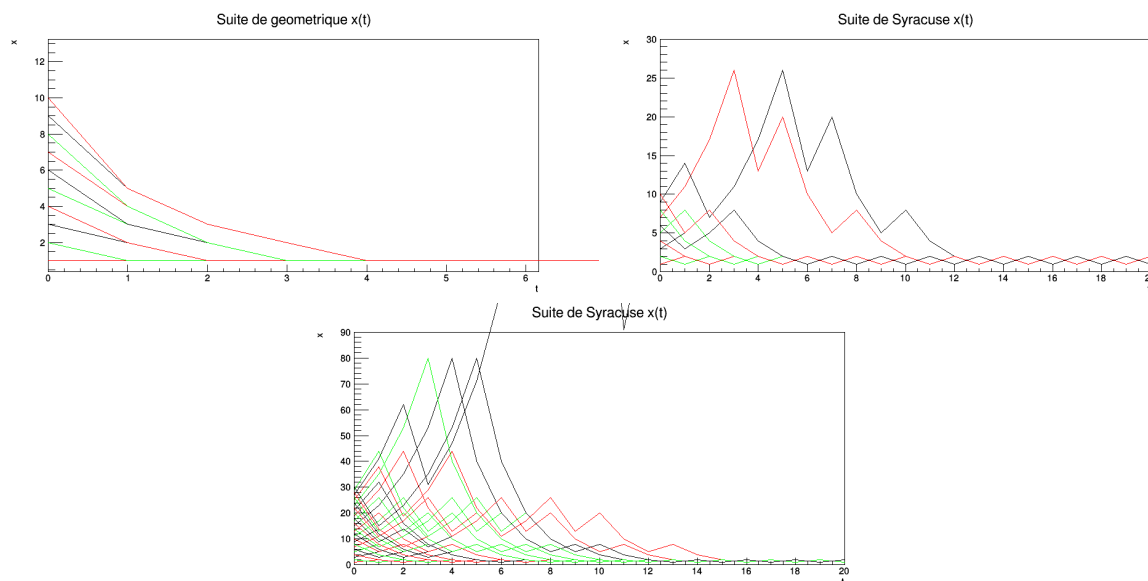


FIGURE 1.1.3 – Comportement de la suite géométrique (1.1.1) et de la suite de Syracuse (1.1.2), en partant de différentes conditions initiales à $t = 0$.

Le problème inverse : “Connaissant des phénomènes et des comportements, deviner les lois d’évolutions infinitésimales (les plus simple possible) qui en sont responsables.”

C’est une question bien plus difficile, c’est une question d’expérimentation de modélisation et de validation. Plusieurs difficultés interviennent :

- Les phénomènes sont observés avec des incertitudes.
- On ne peut observer qu’un nombre fini de fois le phénomène (rien ne garantit en principe que la prochaine fois il se reproduira tel quel).

De cela il découle qu’il n’y a pas forcément un modèle unique qui explique les phénomènes observés.

Dans l’histoire des sciences on peut citer quelques grandes étapes de découverte de lois :

- Mouvement des corps célestes par la théorie des épicycles (Ptolémé, dans l’**almageste**, en l’an 150)
- **Loi universelle de la gravitation** de Newton en 1687.
- **Loi de l’électromagnétisme** de Maxwell en 1865.
- **Relativité générale** (théorie relativiste de la gravitation) de Einstein en 1915. Qui est actuellement une « loi fondamentale » de la physique.
- **Lois de la mécanique quantique** en 1920.
- Lois du **modèle standard** des particules (basée sur la **théorie quantique des champs**), 1930’ - 1970’, qui est actuellement une « loi fondamentale » de la physique.

Remarque 1.1.1. Pour illustrer le fait qu’une loi n’est pas forcément unique pour expliquer un phénomène, donnons l’exemple de l’orbite des planètes qui avec l’incertitude d’observation au moment de l’antiquité s’explique aussi bien avec la théorie des épicycles de

Ptolémé ou la théorie de Newton ou la théorie d'Einstein. Lorsque l'on augmente la précision (précision actuelle des observations), seule la théorie d'Einstein reste candidate. Mais à un niveau de précision donnée, la théorie la plus utile sera la plus simple. Par exemple pour expliquer le mouvement d'un pendule il est préférable d'utiliser la théorie de Newton plutôt que celle d'Einstein (ou la mécanique quantique). Ainsi le travail d'un physicien, face à un certain type de phénomènes observés, est de **modéliser ces phénomènes**, c'est à dire trouver le modèle mathématique le plus simple qui explique ces phénomènes.

Remarque 1.1.2. La **physique statistique** est une théorie très importante et utile en physique : elle explique des « phénomènes émergent » ou des « théories émergentes » à partir de lois fondamentales. Cependant on ne peut pas la classer parmi les lois fondamentales. Il s'agit plutôt d'un problème de prédiction ou un outil. Cependant au XIX^{ème} siècle, la thermodynamique était une « théorie fondamentale » avant qu'elle ne soit expliquée grâce à la physique statistique comme découlant des lois fondamentales de la mécanique.

Remarque 1.1.3. Actuellement, il y a deux théories fondamentales en physique : la **relativité générale** qui explique les phénomènes de gravitation à l'échelle macroscopique et la **théorie quantique des champs** qui explique les autres phénomènes à l'échelle des particules. Telles quelles, ces deux théories ne sont pas compatibles mathématiquement et c'est un enjeu de la recherche actuelle que d'explorer cette question (cf **Théorie des cordes, théorie de l'unification**).

Remarque 1.1.4. Il y a cependant de nombreux phénomènes que l'on observe et que l'on ne sait pas modéliser. Pour la plupart de ces phénomènes on suppose cependant qu'ils sont engendrés par les lois fondamentales que l'on connaît. Par exemple :

- Le chaos en météorologie, la turbulence dans les fluides. Des simulations numériques suggèrent que l'on peut reproduire ces phénomènes à l'aide des lois fondamentales des fluides mais on ne sait pas le démontrer. Une question ouverte fondamentale est de montrer que les équations de Navier Stokes sont correctement posées, et qu'il n'y a pas de phénomène de divergence des solutions. Voir cette **video de Terrence Tao**.
- La matière est décrite d'après la physique des particules comme un assemblage de quarks, gluons et autres particules en interaction. Les équations sont connues (**QCD**), mais ce sont des équations « non linéaires de champs quantiques » et on ne sait pas les résoudre pour montrer effectivement qu'elles expliquent l'existence du neutron et du proton que l'on observe comme étant les constituants de base de la matière qui nous entoure. C'est une question ouverte importante à l'heure actuelle.
- Les phénomènes complexes dans le système vivant : « comportements intelligents » des organismes vivants. Consulter ce **livre** concernant la recherche de ce qu'est la « conscience » et ses mécanismes. Voir cette **video**. Les modèles de réseaux de neurones et **deep learning** semblent prometteurs en intelligence artificielle.

- En cosmologie, problème de la « **matière noire** » et de « **l'énergie sombre** » : par rapports aux lois connues, on observe des anomalies dans l'observation des rotations des galaxies et l'expansion de l'univers. Il semble nécessaire de modifier le contenu de l'univers en matière-énergie ou de changer les lois fondamentales connues.

1.1.3 Hasard et déterminisme

Un objectif de ce cours est de montrer que hasard et lois déterministes sont intimement liées :

- des **lois déterministes** induisant du chaos donnent des **comportements aléatoires** régis par les lois du hasard. (C'est la théorie du "chaos déterministe").
- Les **lois du hasard** donnent des **comportement émergent déterministes** lorsqu'ils sont effectués par un grand nombre d'échantillons : c'est l'objet d'étude de la physique statistique. (Par exemple des grains de sables qui tombent par un tuyau sur le sol : le mouvement de chaque grain est imprévisible mais il est prévisible que le tas de sable formera un cône à 30 degrés).

Par exemple à petite échelle les lois de la mécanique quantique (microscopique) présente beaucoup de hasard et d'aléatoire. Du fait d'un grand nombre de particules qui interagissent, les lois de la mécanique classique (macroscopiques) sont parfois très régulières et prévisibles (la thermodynamique, la mécanique du point). Mais les lois de la mécanique classique sont parfois sensibles aux conditions initiales (i.e. chaotique) et cela engendre à nouveau du hasard (ce peut être le "hasard quantique" qui émerge au niveau macroscopique?). Par exemple le comportement d'une fourmi dans une fourmilière semble imprévisible, hasardeux, chaotique. Ce hasard est à nouveau traité par des lois probabilistes déterministes. Par exemple certains comportements collectifs de la fourmilière peuvent être prévisibles. Ainsi en physique, lois et hasard apparaissent et disparaissent à différentes échelles. Cela est un sujet de recherche très actuel. On conseille vivement la lecture du livre (non technique) [D.Ruelle, Hasard et chaos 1990] [35].

En mathématiques, en théorie des nombres, les phénomènes aléatoires semblent émerger des structures précises de l'arithmétique. Par exemple on observe des statistiques de lois aléatoires parmi les nombres premiers. Lire Terence Tao qui parle de « **hasard et structure** » **en théorie des nombres**. Voir **Simons Lecture Series** : Structure and randomness "the dichotomy between structure and randomness" Terence Tao-What's new - 2007_ Open questions, expository articles, and lecture series from a mathematical blog.

1.1.4 Plan du cours

Dans ce chapitre d'introduction 1 :

Dans cette introduction on illustre cette première "question fondamentale de prédiction" ci-dessus avec quatre séries d'exemples issus de la physique.

1. Le **pendule amorti et ses variantes**. (Modèle de base en physique). On introduit la section de Poincaré qui est une **application de dimension 1 monotone** donc régulière.
2. L'**application logistique** (qui est une application de dimension 1 mais non monotone donc présentant du chaos), et l'**ensemble fractal de Mandelbrot** qui est son diagramme de phase.
3. Le **billard rectangulaire** qui a une dynamique très simple et le **billard de Sinai** qui a une dynamique très chaotique. On observe que le hasard émerge de lois déterministes.
4. La **réaction chimique de Belousov-Zhabotinsky** qui montre une “dynamique spatio-temporelle” avec “morphogénèse” (la dynamique converge vers un cycle limite, mais il semble y avoir du “chaos spatial”).

Dans cette introduction, chacun de ces modèle sera bien défini mathématiquement et on présentera le(s) système(s) physique(s) qu’il modélise. A l’aide de simulation numérique (les programmes sont fournis afin que les étudiants puissent les modifier et les exploiter), on observera les phénomènes et on les commentera en mettant en valeur les questions importantes.

Cependant la plupart des phénomènes observés ne seront pas expliqués dans cette introduction. On donnera parfois une explication “intuitive”. C’est le but de la “théorie des systèmes dynamiques” que de trouver une explication rigoureuse à ces phénomènes et certaines explications seront données dans la suite de ce cours.

Chapitre ?? : applications et champs de vecteur

Dans ce chapitre on considère une dynamique déterministe sur un espace de phase différentiable (une variété différentiable). On parle de « dynamique différentiable ». La dynamique est à temps discret (application) ou continu (champ de vecteur et flot).

On discute aussi de phénomènes liés à une famille de modèles dépendant de paramètres externes, appelée « théorie des bifurcation » ou « théorie des catastrophes ».

Chapitre 3 : dynamique Hamiltonienne

Dans ce chapitre on considère un cas particulier de « dynamique différentiable » lorsque l’espace des phases est celui de la mécanique Hamiltonienne (variété symplectique) et que la dynamique préserve cette structure (transformations Hamiltoniennes ou canoniques ou Symplectiques). Ce cas particulier est très important en physique car les lois physiques fondamentales sont Hamiltoniennes (la raison est que la dynamique Hamiltonienne émerge de la dynamique ondulatoire dans le régime des petites longueurs d’ondes, et d’après la mécanique quantique, les phénomènes physiques sont ondulatoires).

Chapitre 4 : Dynamique de champs et morphogénèse

Dans ce chapitre on considère la dynamique de fonctions ou « champs ». L'espace des phases est de dimension infinie. On considère des équations locales, comme des EDP (équations aux dérivées partielles) non linéaires. Ces théories sont importantes pour la morphogénèse (« théorie de la naissance des formes et des structures »), la mécanique des fluides, la turbulence, etc.

Chapitre 5 : Dynamique probabiliste de Markov

Dans ce chapitre on considère des modèles très simples de dynamique probabiliste (non déterministe) où l'espace des états est une ensemble fini. Cela s'appelle une « dynamique de Markov ».

Chapitre 6 : Dynamique expansive déterministe et théorie ergodique

Dans ce chapitre on considère un modèle simple de dynamique déterministe avec sensibilité aux conditions initiales. On explique pourquoi les trajectoires paraissent « chaotiques » et pourquoi il faut utiliser une approche probabiliste pour expliquer les phénomènes observés.

Chapitre 7 : Dynamique hyperbolique déterministe et théorie ergodique

On généralise le chapitre précédent aux dynamiques uniformément hyperboliques. Cela permet de considérer des modèles physiques plus concrets, mais plus compliqués.

Chapitre 8 : Le moulin de Lorenz et son attracteur étrange

Le modèle de Lorenz a une importance historique mais aussi c'est un modèle de dynamique chaotique très important et plus compliqué, moins bien compris que les dynamiques uniformément hyperboliques.

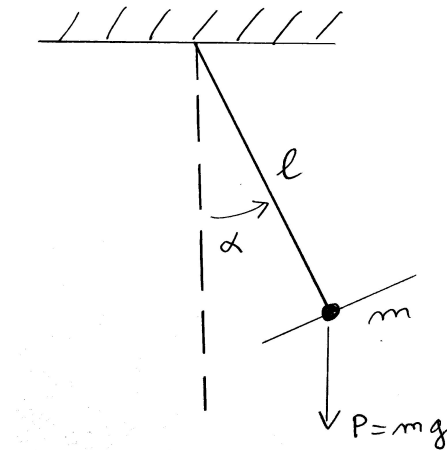


FIGURE 1.2.1 – Pendule

1.2 Modèle du pendule

On considère une masse ponctuelle m attachée à une tige rigide de longueur fixe l dans un plan vertical (x, z) . La masse est soumise à son poids $P = mg$ et à une force de frottement $\vec{F} = -\gamma\vec{v}$ opposée à la vitesse \vec{v} , avec $\gamma \geq 0$ qui est le coefficient de frottement. Voir figure 1.2.1.

1.2.1 Equation de mouvement de Newton (1687)

On note $\alpha(t)$ l'angle entre la tige et la verticale à l'instant t . La position curviligne du pendule est $l\alpha(t)$. La loi de Newton ($\sum \text{forces} = m \cdot \text{acceleration}$) écrite en coordonnée curviligne donne l'équation :

$$-mg \sin \alpha - \gamma l \frac{d\alpha}{dt} = ml \frac{d^2\alpha}{dt^2} \quad (1.2.1)$$

Remarque 1.2.1. (1.2.1) est une **équation non linéaire** (à cause du terme $\sin \alpha$) et du **deuxième ordre en temps**.

On verra qu'il est préférable d'avoir des équations du premier ordre en temps. Pour cela, posons

$$\beta(t) := \frac{d\alpha}{dt}$$

ainsi

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

et l'équation de Newton (1.2.1) s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{d\alpha}{dt} = \beta \\ \frac{d\beta}{dt} = -\frac{g}{l} \sin \alpha - \frac{\gamma}{m} \beta \end{cases} \quad (1.2.2)$$

On a obtenu :

Posons

$$x(t) := (\alpha(t), \beta(t)) \in \mathbb{R}^2$$

qui est un point dans le plan (α, β) appelé **espace de phase**. L'équation de Newton du pendule s'écrit simplement

$$\frac{dx}{dt} = \mathcal{V}(x) \quad (1.2.3)$$

avec une fonction $\mathcal{V} = (\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ ayant deux composantes :

$$\mathcal{V}_1(\alpha, \beta) = \beta, \quad \mathcal{V}_2(\alpha, \beta) = -\frac{g}{l} \sin \alpha - \frac{\gamma}{m} \beta$$

Eq. (1.2.3) est appelée “**équation différentielle ordinaire**” (**E.D.O.**) sur \mathbb{R}^2 .

On va voir qu'une telle EDO est une formulation standard pour une loi déterministe à temps continu. On considère ici \mathcal{V} comme une fonction $x \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{V}(x) \in \mathbb{R}^2$. **Le flot au temps t** est l'application ϕ^t qui fait évoluer un point par la dynamique sur le temps t :

$$\phi^t : x \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \phi^t(x) \in \mathbb{R}^2$$

telle que $x(t) = \phi^t(x)$ est solution de l'EDO (1.2.3), c'est à dire $\frac{d\phi^t}{dt}(x) = \mathcal{V}(\phi^t(x))$ pour tout t et tout x .

Rappelons la question nous intéresse : “étant donné les conditions initiales du pendule $x(0) = (\alpha(0), \beta(0))$ (: position et vitesses angulaires initiales) et la connaissance de la loi déterministe, prédire $x(t) = \phi^t(x(0))$ à un instant quelconque $t \in \mathbb{R}$?”. En d'autres termes, connaissant la fonction \mathcal{V} , on veut trouver le flot ϕ^t pour tout t .

1.2.2 Résolution numérique de l'EDO (1.2.3) par la méthode de Euler (1768)

L'équation (1.2.3) s'écrit

$$\begin{cases} \frac{d\alpha}{dt} = \mathcal{V}_1(\alpha, \beta) \\ \frac{d\beta}{dt} = \mathcal{V}_2(\alpha, \beta) \end{cases}$$

Prenons un intervalle de temps très petit δt :

$$0 < \delta t \ll 1$$

On définit une suite d'instants $t_n = n.\delta t$ avec $n = 0, 1, 2, \dots$. Notons $\alpha_n := \alpha(t_n)$ et $\beta_n := \beta(t_n)$. D'après la formule de Taylor² à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1} &= \alpha_n + \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)(t_n) \cdot \delta t + O(|\ddot{\alpha}|_\infty) \cdot \delta t^2 \\ &= \alpha_n + \mathcal{V}_1(\alpha_n, \beta_n) \cdot \delta t + O(|\ddot{\alpha}|_\infty) \cdot \delta t^2\end{aligned}$$

Etant donné l'état initial $(\alpha_0, \beta_0) \in \mathbb{R}^2$ et en oubliant le reste dans la formule de Taylor on a une formule itérative appelée **méthode de Euler**. On a montré le résultat suivant, en supposant \mathcal{V} différentiable (de classe C^1) :

Proposition 1.2.2. "Méthode de Euler". On pose $(\tilde{\alpha}_0, \tilde{\beta}_0) := (\alpha_0, \beta_0)$ et par récurrence on définit

$$\begin{cases} \tilde{\alpha}_{n+1} &= \tilde{\alpha}_n + \mathcal{V}_1(\tilde{\alpha}_n, \tilde{\beta}_n) \cdot \delta t \\ \tilde{\beta}_{n+1} &= \tilde{\beta}_n + \mathcal{V}_2(\tilde{\alpha}_n, \tilde{\beta}_n) \cdot \delta t \end{cases}$$

Alors la différence entre les valeurs $(\tilde{\alpha}_n, \tilde{\beta}_n)$ et la vraie solution (α_n, β_n) au temps t_n est majorée par

$$|\tilde{\alpha}_n - \alpha_n| \leq O(|\ddot{\alpha}|_\infty) \cdot \delta t^2 \cdot n = (O(|\ddot{\alpha}|_\infty) \cdot t_n) \cdot \delta t$$

Ainsi pour une date ultérieure t fixée cette erreur est de l'ordre de δt qui peut être choisit arbitrairement petit. Le calcul de $\tilde{\alpha}_n, \tilde{\beta}_n$ nécessite $n = t/\delta t$ itérations.

Voir figure 1.2.2.

Conclusion : la méthode de Euler fournit une méthode pour résoudre numériquement une EDO dans \mathbb{R}^d qui est sous la forme $\dot{x} = \mathcal{V}(x)$, mais elle montre aussi que celle ci a une solution unique. En terme physique, on dit que l'EDO modélise une **loi d'évolution déterministe** car l'état présent $x(0)$ et la loi $\dot{x} = \mathcal{V}(x)$ déterminent de façon unique les états passés et futurs $x(t)$. C'est un exemple important de "**système dynamique**".

Remarque 1.2.3. en prenant plus de termes dans la formule de Taylor on peut avoir une erreur de la forme $(\delta t)^k$, avec k arbitraire, donc une erreur plus petite. C'est ce que fait la méthode de "**Runge Kutta d'ordre 4**" qui a une erreur pour $|\tilde{\alpha}_n - \alpha_n|$ de l'ordre de δt^4 , au lieu de δt pour la méthode de Euler. Pour avoir un programme performant, on utilisera donc la méthode de "**Runge-Kutta**" ou une méthode d'Euler améliorée.

Remarque 1.2.4. Il est intéressant de pouvoir résoudre de façon approchée une ODE dans \mathbb{R}^d de façon numérique. Cela permet de faire des expériences numériques. En pratique il faut cependant que la dimension d ne soit pas trop grande. Il serait intéressant de pouvoir la

2. La formule de Taylor à l'ordre 1 est $\alpha(t_n + \delta t) = \alpha(t_n) + \delta t \cdot \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)(t_n) + \delta t^2 O(|\ddot{\alpha}|_\infty)$ où $O(|\ddot{\alpha}|_\infty)$ signifie un reste qui en valeur absolue est plus petit que $C \cdot |\ddot{\alpha}|_\infty$ où $C > 0$ est une constante et $|\ddot{\alpha}|_\infty := \max(\ddot{\alpha}(t), t \in \mathbb{R})$ est le max des dérivées secondes. Comme $\ddot{\alpha} = \mathcal{V}_1(x)$, on déduit la majoration $|\ddot{\alpha}|_\infty \leq |D\mathcal{V} \cdot \dot{\alpha}|_\infty \leq |D\mathcal{V} \cdot \mathcal{V}|_\infty$.

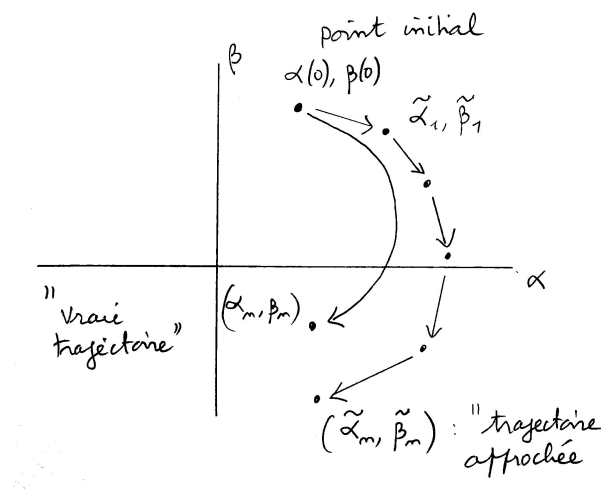


FIGURE 1.2.2 – Méthode de Euler donnant la trajectoire approchée $(\tilde{\alpha}_n, \tilde{\beta}_n)$ qui devient proche de la solution exacte (α_n, β_n) lorsque $\delta t \rightarrow 0$.

“résoudre analytiquement” c’est à dire de trouver l’expression exacte de $x(t)$. Cependant on verra dans ce cours qu’une “solution analytique” n’existe pas “génériquement” dans l’espace \mathbb{R}^d si $d \geq 3$. Cela n’est possible que dans \mathbb{R}^2 (et dans \mathbb{R}).

Voir figure 1.2.3 (et vidéo) qui montre une trajectoire dans l’espace de phase.

Exercice 1.2.5. Ecrire un programme qui trace $\tilde{\alpha}(t)$ pour t fixé, en fonction de $\delta t \rightarrow 0$ afin d’observer que l’erreur $|\tilde{\alpha}(t) - \alpha(t)|$ décroît bien comme δt .

Exercice 1.2.6. Montrer que une ODE $\dot{x} = \mathcal{V}(x)$ dans \mathbb{R} (c’est à dire en dimension $d = 1$) avec $\mathcal{V} \in C^\infty(\mathbb{R})$, se ramène toujours localement (après un certain changement de variable $x \rightarrow y$) aux formes simples³ suivantes que l’on résoudra analytiquement :

$$\dot{y} = 1 \quad \text{si } \mathcal{V}(x) \neq 0$$

$$\dot{y} = \lambda y \quad \text{si } \mathcal{V}(x) = \lambda x + O(x^2) \text{ a un zéro non dégénéré.}$$

$$\dot{y} = y^k \quad \text{si } \mathcal{V}(x) = c.x^k + O(x^{k+1}) \text{ a un zéro à l'ordre } k \geq 2$$

Exercice 1.2.7. Ecrire les “équations de Hamilton” de la “mécanique analytique” et retrouver les équations du pendule (1.2.2) directement.

3. La forme la plus simple que l’on peut obtenir pour une équation donnée, en effectuant des changements de variables, s’appelle une **forme normale**.

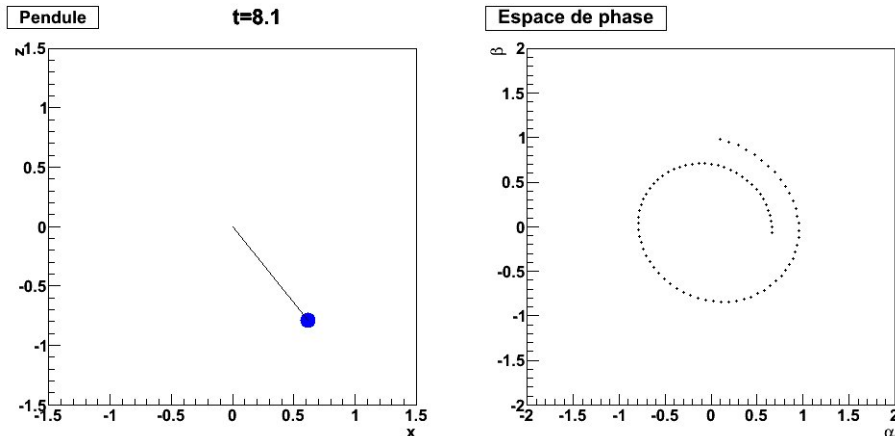


FIGURE 1.2.3 – Solution numérique par la méthode de Euler donnant la trajectoire approchée du pendule. Les paramètres sont $g = 1, l = 1, \gamma = 0.2, m = 1$.

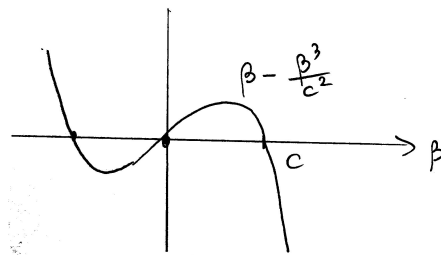
Exercice 1.2.8. Ecrire les équations de mouvement (1.2.2) avec des variables sans dimension et établir le nombre de paramètres différents nécessaires pour le modèle (et les exprimer en fonction des paramètres physiques). Trouver la forme normale de l'équation, c'est à dire simplifier au maximum l'équation en effectuant des changements de variable.

Variante : le pendule forcé

Il est facile d'imaginer des lois différentes de (1.2.1) et de les tester numériquement. Par exemple pour éviter que le pendule devienne immobile, on remplace la force de frottement par une force qui fournit de l'énergie à petites vitesses, mais prend de l'énergie à grandes vitesses pour éviter que le pendule ne s'emballe. Par exemple on choisit de remplacer le terme de frottement $-\frac{\gamma}{m}\beta$ dans (1.2.2) par $\frac{\gamma}{m}\left(\beta - \frac{\beta^3}{c^2}\right)$ qui est positif si $0 < \beta < c$ et négatif si $\beta > c$ en fixant la valeur de c . Ainsi la fonction $\mathcal{V}(x)$ devient

$$\mathcal{V}_1(\alpha, \beta) = \beta, \quad \mathcal{V}_2(\alpha, \beta) = -\frac{g}{l} \sin \alpha + \frac{\gamma}{m} \left(\beta - \frac{\beta^3}{c^2} \right) \quad (1.2.4)$$

Graphes de la fonction $\beta \rightarrow \left(\beta - \frac{\beta^3}{c^2} \right)$:



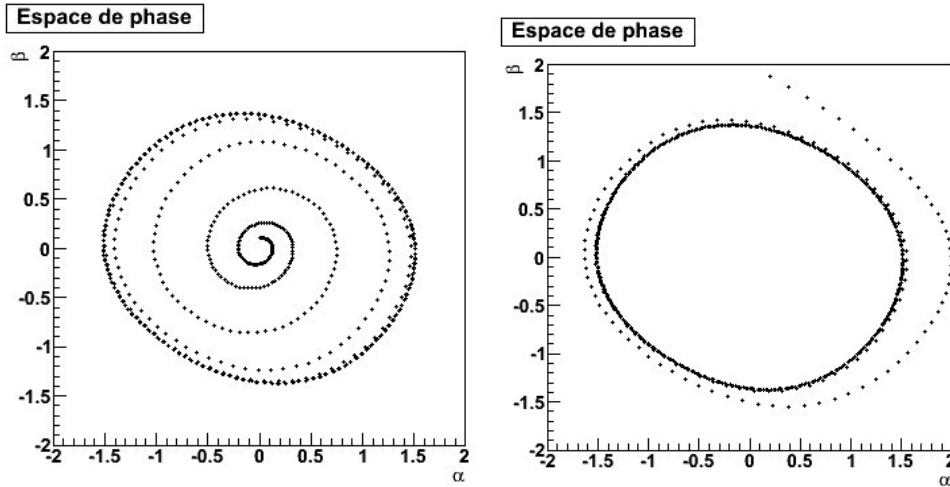


FIGURE 1.2.4 – (Fig. 1) : Trajectoire partant de la condition initiale $\alpha_0 = 0, \beta_0 = 0.1$. L’amplitude augmente et la trajectoire converge vers un cycle limite. (Fig. 2) : la trajectoire part de la condition initiale $\alpha_0 = 0, \beta_0 = 2$ et converge vers le même cycle limite. Les paramètres sont $g = 1, l = 1, \gamma = 0.2, m = 1, c = 1$.

Voir figure 1.2.4. Voir video [Animation_pendule_entretenu.gif](#).

On observe maintenant que le pendule converge vers un mouvement périodique. On dit qu’il y a un “**cycle limite attractif**” ou une “**orbite périodique attractive**”. (on verra plus loin une définition générale d’**attracteur** pour un système dynamique).

Remarque 1.2.9. On verra en Section 2.2.1 l’interprétation géométrique d’une ODE : c’est un champ de vecteur. Voir Section 2.2.4 qui présente le théorème fondamentale de Cauchy-Lipchitz et ses discussions. Ce théorème garantit une solution unique aux ODE assez régulières (et sur un certain intervalle de temps).

Exercice 1.2.10. Calculer la divergence $\operatorname{div}(\mathcal{V}) = \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial \beta}$ du champ de vecteur \mathcal{V} et étudier son signe. Interprétation ?

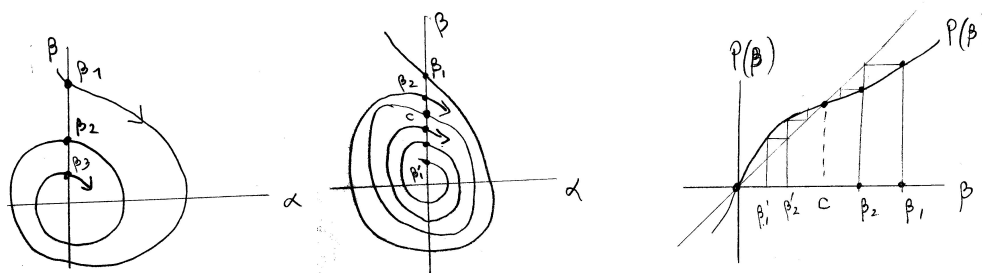
Remarque 1.2.11. Par exemple, la **voix**, (vibration des **cordes vocales**) est un exemple d’oscillateur entretenu par le débit d’air.

1.2.3 Section de Poincaré (1892)

Dans le modèle précédent, Eq.(1.2.2), ou (1.2.4), on observe que toute trajectoire dans l’espace de phase intersecte la demi droite $\{\alpha = 0, \beta \geq 0\}$ en une suite de points :

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3 \dots$$

D’après l’unicité et l’existence du flot, étant donnée une valeur β_n , on considère le point $(\alpha = 0, \beta_n)$ et la trajectoire passant par ce point. La prochaine intersection de cette trajectoire avec la demi droite est un certain point $(0, \beta_{n+1})$ qui définit la valeur $\beta_{n+1} \geq 0$.

FIGURE 1.2.5 – Section de Poincaré du flot (1.2.4) et application de Poincaré $\beta \rightarrow P(\beta)$.

Définition 1.2.12. La demi droite $\{\alpha = 0, \beta \geq 0\}$ s'appelle la **section de Poincaré du flot**, et l'application :

$$P : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ \beta_n & \rightarrow \beta_{n+1} = P(\beta_n) \end{cases}$$

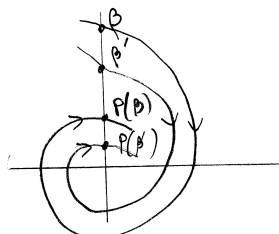
s'appelle l'**application de Poincaré** associée à la dynamique du pendule et relative au choix de la section de Poincaré.

Remarque 1.2.13. Dans le cas présent, il est clair que la fonction $P(\beta)$ existe et est C^∞ bien que son expression ne soit pas simple à obtenir. On devine qualitativement son allure, voir figure 1.2.5. On peut aussi tracer numériquement cette fonction en utilisant le programme d'intégration d'Euler (ou Runge kutta) sur une période.

Remarque 1.2.14. Intérêt de l'application de Poincaré : son étude est plus simple que celle du flot. Par exemple le point fixe $c = P(c)$ est un point attractif. Cette propriété est équivalente à l'existence d'un cycle limite attractif pour le flot.

Remarque 1.2.15. L'application de Poincaré est ici une application sur \mathbb{R}^+ (espace de dimension 1). Si l'équation EDO est sur \mathbb{R}^d , on aurait une application de Poincaré sur \mathbb{R}^{d-1} .

Remarque 1.2.16. Dans l'exemple présent la fonction $P : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est forcément croissante, car si $\beta' < \beta$ alors $P(\beta') < P(\beta)$, voir figure ci-dessous.



L'étude générale d'une dynamique unidimensionnelle de la forme :

$$\beta_n \rightarrow \beta_{n+1} = P(\beta_n)$$

avec P fonction *croissante* est assez simple. (Voir Section). Il n'y a que des points attractifs et/ou répulsifs. Par contre, on verra avec l'application "logistique" en Section 1.3 qu'un système dynamique défini avec une fonction P non croissante peut être "chaotique".

Exercice 1.2.17. Si $P(\beta) = \lambda\beta$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, calculer $\beta_n = \underbrace{P \circ P \dots \circ P}_n(\beta_0)$ en fonction de β_0 et n .

Solution : $\beta_n = \lambda^n \beta_0$.

Exercice 1.2.18. Un modèle simple de dynamique des population est appelé "**équation de Lotka-Volterra**" (1925). On considère une population de "proies" (ex : des lapins) et on note $x(t)$ leur nombre à la date t . Ils cohabitent avec une population de "prédateurs" (ex des renards) et on note $y(t)$ leur nombre. L'équation d'évolution est :

$$\begin{cases} \dot{x} &= \alpha x - \beta xy \\ \dot{y} &= \delta xy - \gamma y \end{cases}, \quad \alpha > 1, \beta > 0, \delta > 0, \gamma > 0.$$

1. Interpréter en termes écologiques les paramètres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Résoudre l'équation dans le cas particulier $\beta = 0, \delta = 0$.
2. Trouver le point fixe de cette dynamique, i.e. tel que $\dot{x} = 0, \dot{y} = 0$.
3. Avec un programme, tracer les trajectoires (flot).
4. Suggérer une section de Poincaré pour ce problème et tracer l'allure de l'application de Poincaré. Trouver le(s) cycles limites et commenter l'évolution de ces populations.

1.2.4 Systèmes physiques reliés au modèle du pendule

Le modèle du pendule considéré dans cette Section est un modèle issu de la mécanique. Le flot est ici sur un espace de dimension 2 (l'espace de phase α, β) et pour cela la dynamique est forcément régulière (non chaotique), d'après le théorème de Poincaré Bendixon, voir Section .

Comme autres mouvements mécaniques **réguliers** de dimension (effective) 2 dans la nature on peut citer

- La rotation des planètes autour du soleil (en première approximation c'est un mouvement régulier résolu par Kepler, Newton). L'observation du mouvement des planètes a joué un rôle très important dans l'histoire des sciences.
- Une balle qui rebondit verticalement sur un plan.

Comme mouvement mécanique en dimension plus grande (**chaotiques**, dimension ≥ 3) on peut citer :

- Le double pendule.
- Le flot de Lorenz. Voir chapitre 7.
- etc

1.3 L'application logistique (1838,1985)

Ce modèle est utile pour modéliser simplement une **dynamique de population** en biologie. (Pierre-François Verhulst 1838). Ce modèle a ensuite été étudié pour ses aspects chaotiques. En particulier son diagramme de phase appelé “**ensemble de Mandelbrot**”, 1985, présenté au grand public comme « l'objet mathématique le plus complexe jamais découvert », a permis de découvrir les “**fractales**”.

1.3.1 Définition

Définition 1.3.1. Soit $\mu > 0$ un paramètre fixé. L'**application logistique** est

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \rightarrow \mu x(1-x) \end{cases}$$

Le système dynamique associé est : partant d'une condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}$, on pose

$$x_1 = \phi(x_0), x_2 = \phi(x_1), \dots, x_{n+1} = \phi(x_n), \dots$$

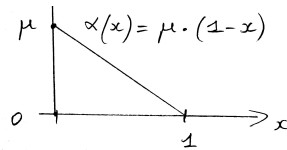
Remarque 1.3.2. On dit que c'est un **système dynamique de dimension 1** car l'état est une variable $x \in \mathbb{R}$, et “**à temps discret**” car les points évoluent par étapes (et non continuellement comme avec une ODE). La **loi du mouvement** est simplement $x_{n+1} = \phi(x_n)$. C'est une **loi déterministe** car la valeur de x_n à l'instant n et la fonction ϕ déterminent la valeur x_{n+1} à l'instant suivant $n+1$.

La question est toujours la même : “prévoir la trajectoire $(x_n)_n$ pour $n \rightarrow \infty$?”

Intérêts de ce modèle :

- Les modèles dynamiques de la forme $x_{n+1} = \phi(x_n)$ en dimension 1 sont les plus simples que l'on puisse imaginer. Leur étude est donc importante. Le cas $\phi(x) = ax + b$ (1er degré) est simple à résoudre, c'est à dire il est facile d'exprimer x_n à partir de x_0 et n (voir exercice 1.3.3). Le cas suivant $\phi(x) = ax^2 + bx + c$ du second degré est le cas suivant à considérer et apparait dans de nombreux domaines. Par contre ce modèle dynamique du second degré n'est pas facile du tout à étudier.
- En biologie des populations, si $x_n \geq 0$ désigne le nombre d'individus (en unité de million d'individus) le jour n , on suppose que le jour suivant il y a $x_{n+1} = \alpha x_n$ individus avec $\alpha \geq 0$. Donc $x_n = \alpha^n x_0$. Si $0 \leq \alpha < 1$ alors la population décroît. Si $\alpha > 1$ alors la population croît. Pour être plus “réaliste”, on suppose que le facteur

de reproduction α dépend du nombre d'individus et décroît avec x . Par exemple $\alpha(x) = \mu(1-x)$. Schema :



Cela représente le fait que la présence d'un trop grand nombre x d'individus implique un manque de ressources et donc une baisse du facteur de reproduction $\alpha(x)$. La loi obtenue est l'application logistique :

$$x_{n+1} = \alpha(x_n) \cdot x_n = \mu x_n (1 - x_n) = \phi(x_n)$$

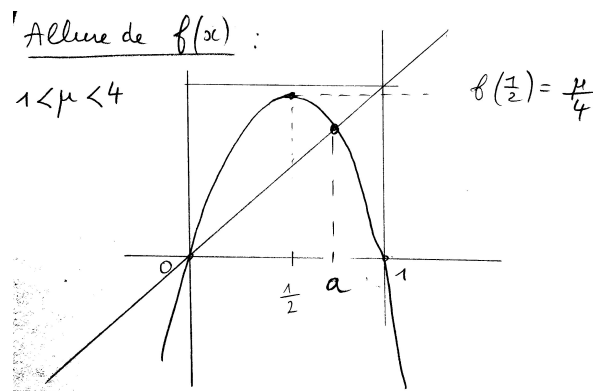
Exercice 1.3.3. "Suite $x_{n+1} = ax_n + b$ ".

Pour $a, b \in \mathbb{R}$ fixés. On considère la fonction $\phi(x) = ax + b$ et le système dynamique $x_{n+1} = \phi(x_n)$.

1. Etant donné une valeur initiale $x_0 \in \mathbb{R}$ et n , tracer l'allure de la trajectoire $(x_n)_n$.
2. Exprimer x_n en fonction de x_0 et n .
3. Discuter la limite de x_n pour $n \rightarrow \infty$ en fonction de a, b .

1.3.2 Observations

Allure de la fonction $\phi(x) = \mu x(1-x)$

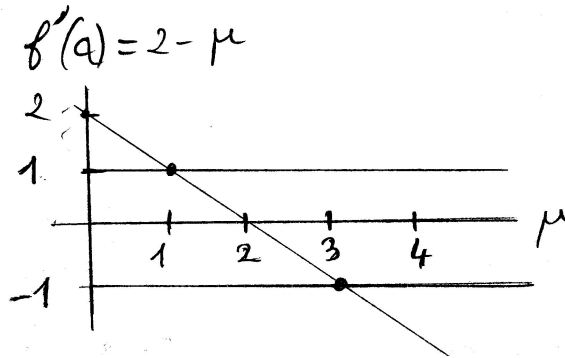


Le point fixe a défini par $a = \phi(a)$ est donné par

$$a = \phi(a) \Leftrightarrow a = \mu a(1-a) \Leftrightarrow 1-a = \frac{1}{\mu} \text{ ou } a = 0$$

$$a = 1 - \frac{1}{\mu} \text{ ou } a = 0$$

On a $\phi'(x) = \mu(1-2x)$ donc $\phi'(a) = \mu(1-2a) = \mu\left(1-2+\frac{2}{\mu}\right) = 2-\mu$.

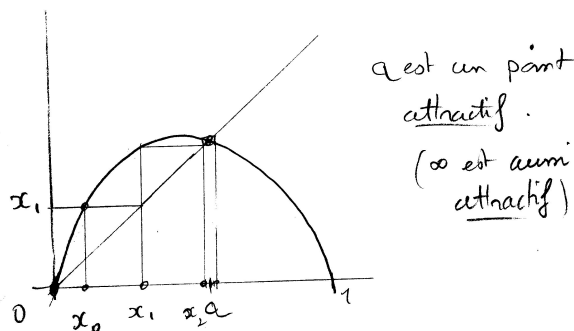


Ainsi si le paramètre est $1 < \mu < 3$ alors $|\phi'(a)| < 1$ donc le point fixe $x = a$ est **attractif** pour la dynamique de ϕ et $\phi'(0) = \mu > 1$ donc le point fixe $x = 0$ est **répulsif** pour la dynamique de ϕ .

(On donne la définition précise d'“ensemble attracteur” et “ensemble répulseur” ci-dessous).

Trajectoires et ensemble attracteur de ϕ

On observe que pour le paramètre $1 < \mu < 3$, les trajectoires partant de tout point $0 < x_0 < 1$ convergent vers le point $x = a$. On dit que c'est un point attracteur. Schéma de la trajectoire pour $\mu = 2$:



Pour $\mu = 3.5$, c'est plus compliqué, les trajectoires convergent vers un cycle périodique de 2 points. On dit que ces deux points forment un ensemble attracteur. Voir figure 1.3.1. Plus généralement,

Définition 1.3.4. L'ensemble attracteur \mathcal{A} pour l'application ϕ est l'adhérence^a des trajectoires $(x_n)_n$, partant de toute condition initiale x_0 . L'ensemble répulsif de ϕ est l'ensemble attracteur pour l'application inverse ϕ^{-1} .

a. En mathématique, l'adhérence d'une suite x_n sont les points x près duquel s'accumulent une infinité de termes de la suite.

— Voir images et animations qui montrent les trajectoires $(x_n)_n$ et l'ensemble attracteur de ϕ en fonction du paramètre $\mu \in [0, 4]$. Cet ensemble attractif est parfois appelé “diagramme de phase”. Les vidéos `Animation_mu_0_4.gif` et `Animation_mu_3_4.gif`

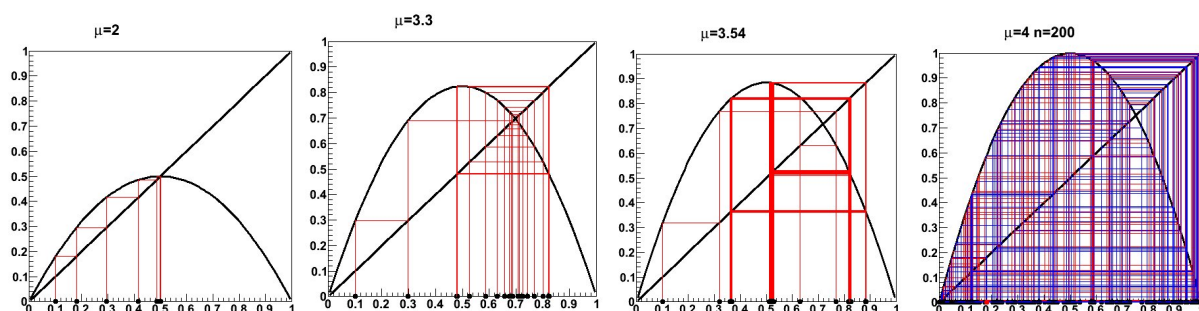


FIGURE 1.3.1 – Dessin d’une trajectoire partant de $x_0 = 0.1$, pour différentes valeurs de μ . On observe que pour $\mu = 2$, la trajectoire converge vers le point $x = a = 1 - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{2}$, pour $\mu = 3.3$, la trajectoire converge vers une séquence de 2 points et pour $\mu = 3.54$, vers une séquence de 4 points. Cet attracteur ne dépend pas du point initial. Pour $\mu = 4$, la trajectoire a un comportement “chaotique” sur tout l’intervalle $[0, 1]$.

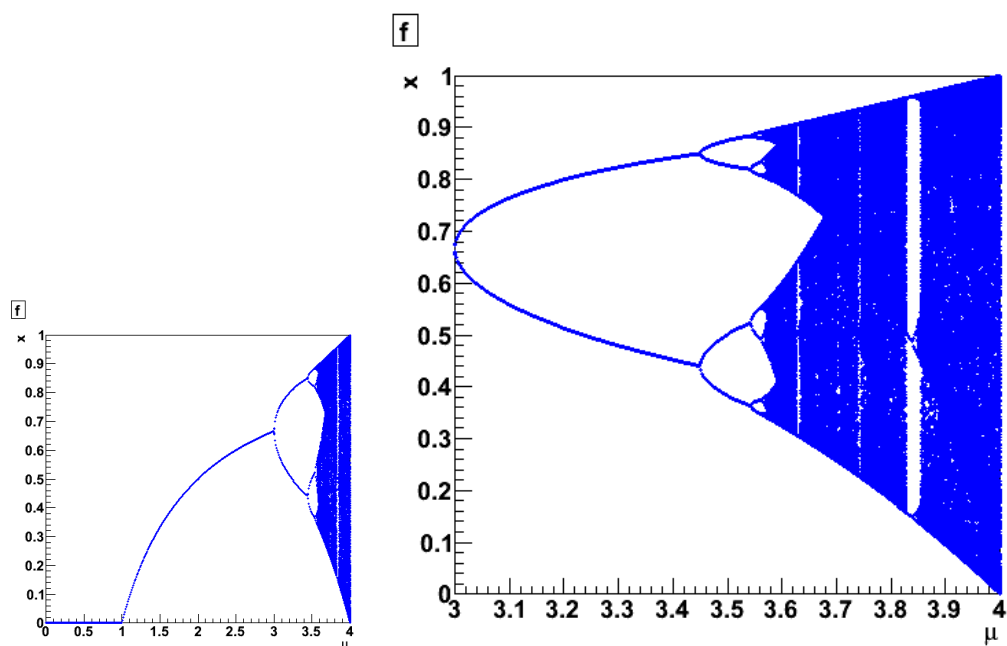


FIGURE 1.3.2 – Dessin de l’ensemble attracteur de ϕ en fonction de μ . (L’image de droite détaille l’intervalle $\mu \in [3, 4]$).

montrent l'évolution des trajectoires en fonction de $\mu = 0 \rightarrow 4$ puis $\mu = 3 \rightarrow 4$ (intervalle intéressant).

Remarque 1.3.5. En $\mu = 1$ il y a une “**bifurcation**”, de même en $\mu = 3$, etc..

Remarque 1.3.6. Pour montrer que pour $3 < \mu < 3.4$ les trajectoires sont attirées par une orbite périodique de période 2, il suffit de considérer l'application $\phi^2 = \phi \circ \phi$ et de montrer qu'elle a un point fixe attractif. (Etc pour les périodes plus élevées). (Cette étude a été faite dans les années 70). Voir TD.

Proposition 1.3.7. Le point $x = \infty$ est toujours un point attractif pour la dynamique de ϕ (si $\mu \neq 0$).

Démonstration. En effet si $|x_n|$ est assez grand de sorte que $|\mu| |x_n - 1| > 2$ alors

$$|\phi(x_n)| = |x_n| |\mu| |1 - x_n| \geq 2 |x_n|$$

et par récurrence $|\phi(x_n)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$. □

Remarque 1.3.8. Ainsi pour $\mu \in [0, 4]$ l'ensemble attractif de ϕ sur \mathbb{R} est $\{\infty\} \cup \mathcal{A}$ où $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ est non vide. Par contre pour $\mu > 4$, on montre que l'ensemble attractif de ϕ est l'unique point $\{\infty\}$.

Dans la section suivante on étudie plus précisément l'ensemble attractif et répulsif en fonction de μ , et on établit un “diagramme des phases”, appelé ensemble de Mandelbrot pour ce modèle spécifique.

1.3.3 Ensemble de Mandelbrot (1980)

Comme $\phi(x) = \mu x(1 - x)$ est un polynôme, on peut étendre le modèle aux valeurs complexes :

$$\mu \in \mathbb{C}, \quad x \in \mathbb{C}$$

On a vu que l'ensemble attractif de ϕ est $\mathcal{A} \cup \{\infty\}$ avec $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$ éventuellement vide.

Définition 1.3.9. L'ensemble de Mandelbrot est l'ensemble des paramètres μ pour lesquels l'ensemble attractif \mathcal{A} de ϕ est non vide.

D'après la remarque ci-dessus, \mathcal{M} contient l'intervalle $\mu \in [0, 4]$. En termes de physique, l'ensemble de Mandelbrot est un diagramme de phase qui montre pour quels paramètres μ du modèle on a un ensemble attractif limite \mathcal{A} . Voici une propriété pratique pour caractériser l'ensemble de Mandelbrot \mathcal{M} :

Proposition 1.3.10. $\mu \notin \mathcal{M}$ si et seulement si $\phi^n\left(\frac{1}{2}\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$.

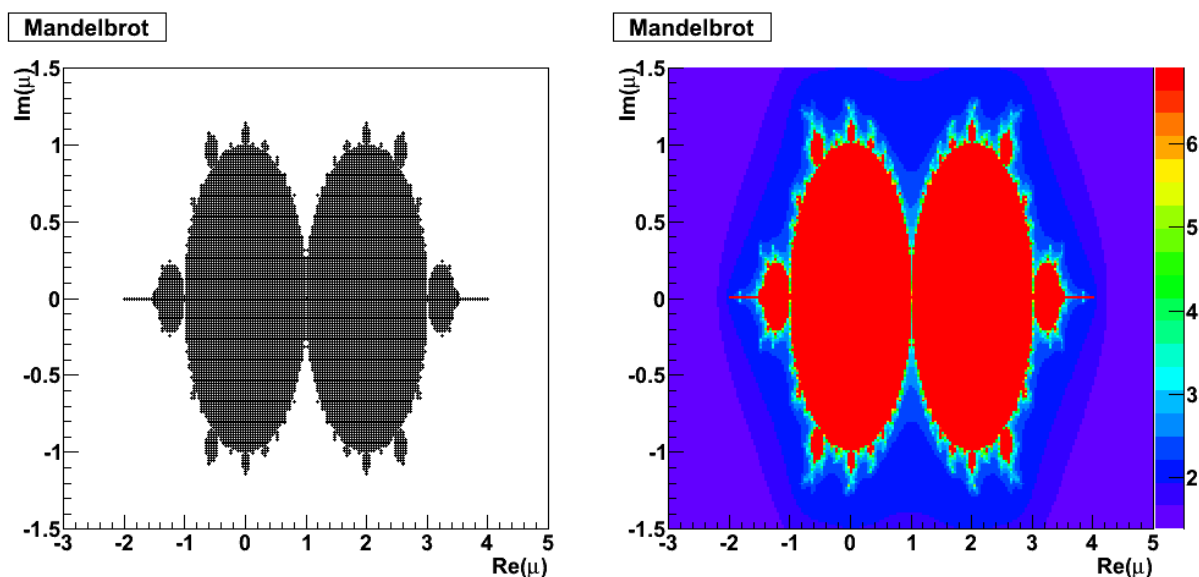


FIGURE 1.3.3 – Ensemble de Mandelbrot \mathcal{M} pour l'application logistique (en noir à gauche et rouge à droite). Sur la figure de droite, les couleurs sont $\log \tau(\mu)$ où $\tau(\mu)$ est le "temps d'échappement" (1.3.1).

Autrement dit le point $x = \frac{1}{2}$ est attiré par l'ensemble \mathcal{A} sauf si celui-ci est vide et alors $x = \frac{1}{2}$ est attiré par ∞ . (noter que $x = \frac{1}{2}$ est l'unique point vérifiant $\phi'(x) = 0$).

Démonstration. [12]. □

Remarque 1.3.11. La propriété 1.3.10 permet de dessiner numériquement l'ensemble de Mandelbrot. Voir figure 1.3.3. Il est habituel de mettre une couleur pour les paramètres μ hors de l'ensemble \mathcal{M} selon la valeur de $\log \tau(\mu)$ avec

$$\tau(\mu) := \max \left\{ n, \text{ t.q. } \left| \phi_\mu^n \left(\frac{1}{2} \right) \right| < 10^3 \right\} \quad : \text{ "temps d'échappement" } \quad (1.3.1)$$

(où 10^3 est arbitraire mais grand).

— Avec le logiciel libre **xaos** (ou autre) on peut explorer le bord de l'ensemble de Mandelbrot qui est remarquable.

Exercice 1.3.12. Il est habituel de tracer l'ensemble de Mandelbrot non pas pour l'application logistique mais pour l'application quadratique

$$Q(z) = z^2 + c$$

Montrer que l'application logistique et quadratiques sont équivalentes par le changement de variable

$$x = -\frac{1}{\mu}z + \frac{1}{2}, \quad c = \frac{\mu}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\mu \right)$$

Solution Avec ce changement de variables,

$$\begin{aligned} x' &= \phi(x) = \mu x(1-x) \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{\mu}z' + \frac{1}{2} &= \mu \left(-\frac{1}{\mu}z + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{\mu}z + \frac{1}{2} \right) = \mu \left(\frac{1}{4} - \frac{z^2}{\mu^2} \right) = \frac{\mu}{4} - \frac{z^2}{\mu} \\ \Leftrightarrow z' &= z^2 - \frac{\mu^2}{4} + \frac{\mu}{2} = z^2 + c. \end{aligned}$$

1.3.4 L'ensemble de Julia (1918)

Pour étudier la dynamique de ϕ , il est naturel de s'intéresser aussi à l'**ensemble répulsif**, c'est à dire à l'ensemble attractif de l'application inverse ϕ^{-1} . Attention que l'application ϕ^{-1} est bi-valuée. En effet,

$$y = \phi(x) = \mu x(1-x)$$

donne deux pre-images :

$$x_{\pm} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \left(1 - \frac{4y}{\mu} \right)^{1/2} \right).$$

Remarque 1.3.13. si $1 - \frac{4y}{\mu} < 0 \Leftrightarrow y < \frac{\mu}{4}$ alors $x_{\pm} \notin \mathbb{R}$. Cela est possible si $\mu < 4$.

Remarque 1.3.14. Ce qui suit se généralise à $\phi(x)$ un polynome de degré $\deg(\phi) \geq 2$. Voir Devaney p.269 [12].

Définition 1.3.15. l'**ensemble de Julia J (1918)** est l'attracteur de l'application biva-luée $\phi_{\mu}^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Autrement dit, c'est le **répulsif** de l'application ϕ .

Remarque 1.3.16. On peut donc facilement écrire un programme qui dessine J en partant d'un point z_0 générique.

Remarque 1.3.17. En général l'ensemble de Julia J est une **fractale** : c'est un **ensemble de Cantor** si $\mu \notin \mathcal{M}$ et c'est une **courbe Hölder continue** qui contient l'ensemble \mathcal{A} si $\mu \in \mathcal{M}$. Voir figure 1.3.4 qui montre l'ensemble de Julia (ens. répulsif de ϕ) et l'ensemble attracteur \mathcal{A} . On dit parfois que l'ensemble de Julia est un "**attracteur étrange**"⁴. Voir les videos qui montrent l'évolution de ces ensembles pour $\mu = 1.5 \rightarrow 5$ puis $\mu = 1.5 + i \rightarrow 5 + i$.

Remarque 1.3.18. $x = \infty$ est un point attractif pour la dynamique de ϕ .

Définition 1.3.19. L'**ensemble de Julia plein** est $K = \{z \in \mathbb{C}, \phi^n(z) \nrightarrow \infty\}$. [12, p.311].

Proposition 1.3.20. J est le bord de K .

4. Le terme attracteur étrange est apparu la première fois en 1968 dans l'article de Ruelle et Takens qui contredisait la théorie de Landau pour la turbulence. Ce terme voulait qualifier un attracteur qui est fractal, comme l'ensemble de Julia ou l'attracteur de Lorenz.

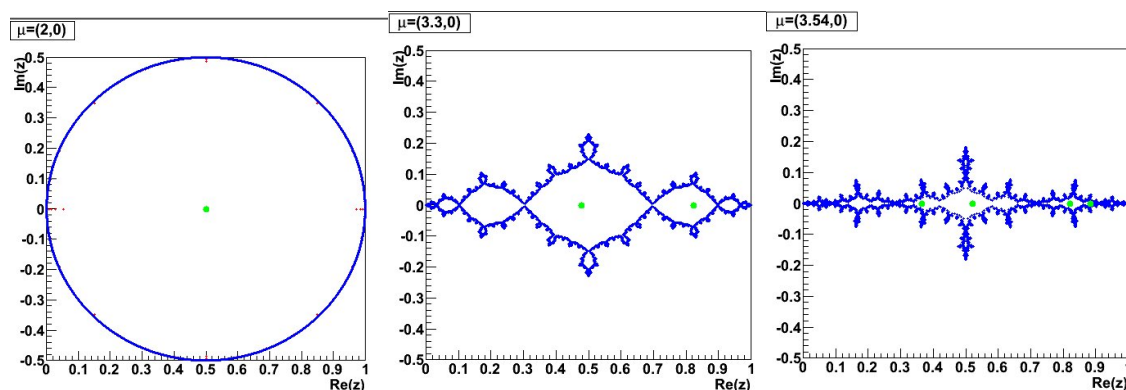


FIGURE 1.3.4 – En bleu : ensemble de Julia (ens. répulsif de ϕ) dans le plan complexe et en vert est l’ensemble attracteur \mathcal{A} de ϕ pour différentes valeurs de μ . L’ensemble attracteur a déjà été observé dans la figure 1.3.1.

1.4 Billard de Sinai (1970)

Le modèle de dynamique appelé “billard” représente une particule “libre” dans l’espace Euclidien qui rebondit de façon parfaite sur des parois. Plus précisément c’est un point dans le plan \mathbb{R}^2 (ou dans l’espace Euclidien \mathbb{R}^d) qui avance en ligne droite à vitesse constante et qui rebondit sur les parois selon la loi que angle de réflexion = angle d’incidence. Selon la géométrie des parois, il est simple ou compliqué de prévoir la dynamique du point pour les temps longs.

Si il n’y a pas de paroi, la position à la date t est simplement $x(t) = x(0) + vt \in \mathbb{R}^d$ avec $v \in \mathbb{R}^d$ vitesse constante. Dans la suite on présente le problème simple du billard rectangulaire et le problème plus complexe du billard dispersif de Sinai.

1.4.1 Le billard rectangulaire

Considérons un point de position $q_0 \in \mathbb{R}^2$ et de vitesse initiale $v_0 \in \mathbb{R}^2$ qui évolue dans un billard rectangulaire. La loi du mouvement est la ligne droite (vitesse constante) et le rebond est parfait sur les parois (c’est à dire angle de réflexion = angle d’incidence). On observe que la trajectoire dessine une figure très régulière. Voir figure 1.4.1.

Question : étant donnés la position initiale q_0 et la vitesse initiale v_0 , prédire la position $q(t)$ et la vitesse $v(t)$ au temps $t > 0$ quelconque ?

Réponse : Par la “**méthode des images**” qui est spécifique à cette géométrie rectangulaire, le problème devient simple et soluble. Voir figures 1.4.2 et 1.4.3.

Voici l’algorithme pour obtenir des formules précises :

1. On “déplie” le rectangle initial R de taille X_1, X_2 selon les deux directions x, y pour obtenir un domaine 4 fois plus grand noté T . Ce domaine T a des conditions

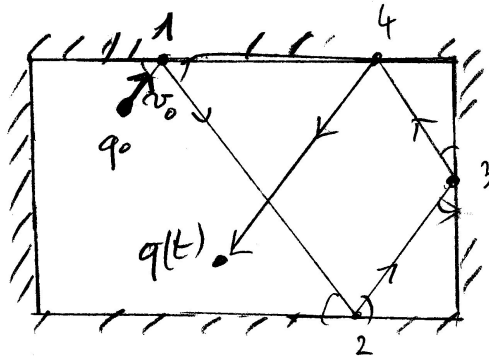


FIGURE 1.4.1 – Billard rectangulaire

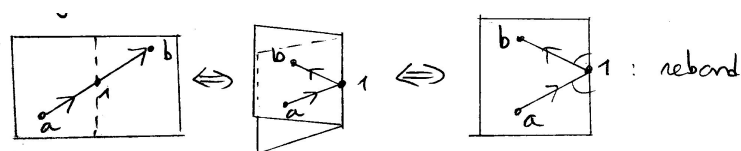


FIGURE 1.4.2 – La méthode des images revient à “plier” et “déplier” une surface plate : On utilisera cette remarque plus loin.

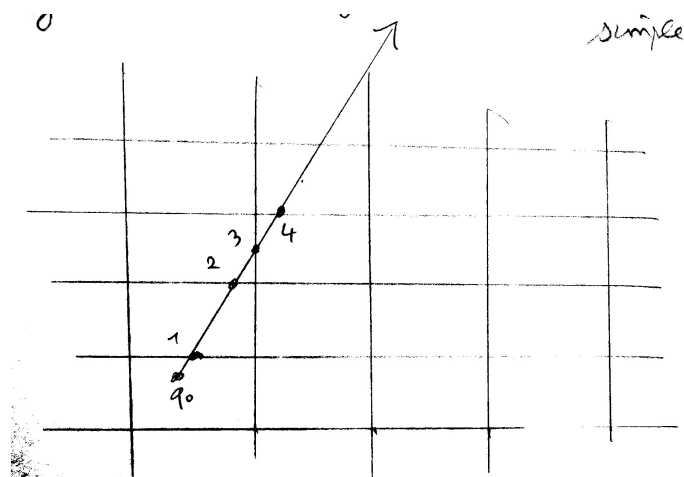


FIGURE 1.4.3 – Méthode des images.

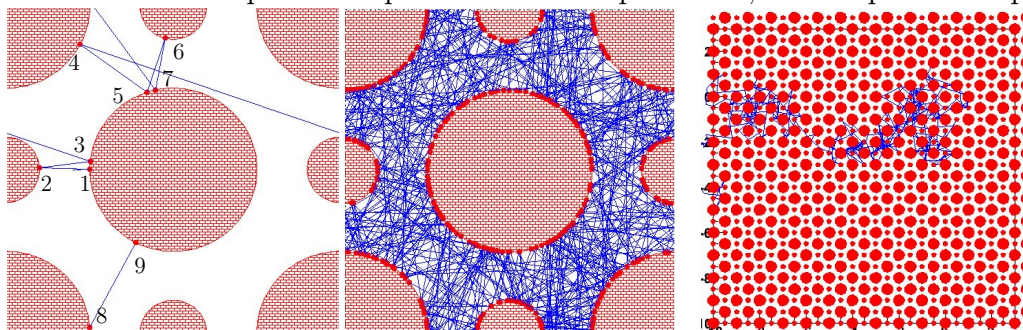
périodiques au bord, c'est donc un tore de taille $2X_1, 2X_2$.

2. Partant du point $x = (x_1, x_2)$, avec une vitesse $v = (v_1, v_2)$ on obtient que $x(t) = (x_1 + v_1 t, x_2 + v_2 t)$ modulo $(2X_1, 2X_2)$.
3. On ramène le point $x(t)$ dans le rectangle initial R .

1.4.2 Billard dispersif de Sinaï (1970)

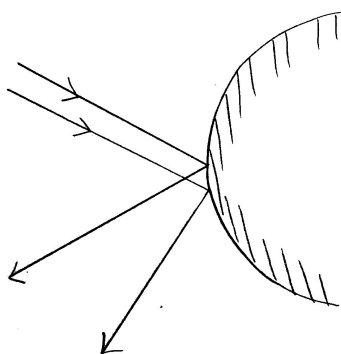
Le billard de Sinaï est un carré avec conditions périodiques au bord (c'est donc un tore \mathbb{T}^2) et contenant des disques. Une bille évolue en ligne droite à vitesse constante et rebondit parfaitement sur le bord des disques. Elle a donc un comportement déterministe. Voir vidéo.

Mais on observe que le comportement est imprévisible, "chaotique". Pourquoi ?

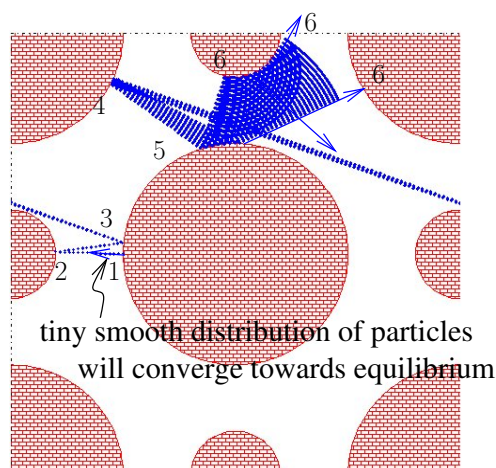


1 trajectoire, temps court 1 trajectoire temps long Le mouvement sur le plan semble être une marche aléatoire.

L'explication heuristique est que les bords du billard sont convexes ce qui implique une "dispersion des trajectoires" après chaque rebond (on caractérisera cela par la sensibilité aux conditions initiales" ou "hyperbolicité" en Section 6).



Après quelques rebonds seulement, les deux trajectoires initialement très proches peuvent avoir des évolutions très différentes (décorrélées). Sur la figure suivante, on observe une bille avec une incertitude initiale $\Delta y = 10^{-4}$. Cette incertitude croît exponentiellement et le comportement peut différer après un temps très court.



La dynamique déterministe engendre donc du hasard. Cela est à l'origine du "chaos déterministe" et de la complexité dans les systèmes dynamiques, et plus généralement de la complexité en physique et dans la nature. Référence : Ruelle "Hasard et chaos" 1990.

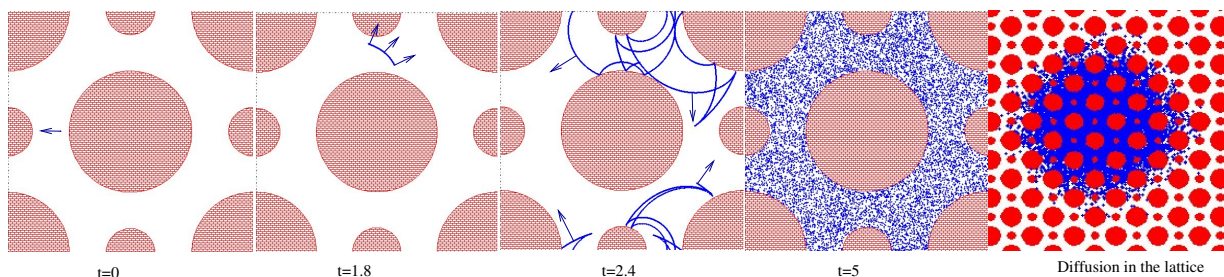
Voir video `1_Animation_1_bille.gif`

Question : Est-il possible de faire des prédictions sur l'évolution malgré ce hasard apparent ? de comprendre les lois de ce hasard ?

Approche probabiliste

Il est nécessaire d'adopter une approche probabiliste. Voici l'idée.

Observons $N = 10^4$ billes indépendantes avec des conditions initiales très proches $\Delta y = 10^{-4}$. La distribution des billes peut s'interpréter comme une distribution de probabilité d'une bille initiale. Cette distribution converge vers l'équilibre et diffuse sur le réseau (sur le plan). Pour cette distribution, on observe un comportement **prédictible** mais **irréversible**. Il y a donc une "évolution effective" prédictible⁵ pour la distribution de probabilité. On introduira la notion d'**entropie** pour caractériser cette perte d'information sur la position de la particule au cours du temps.

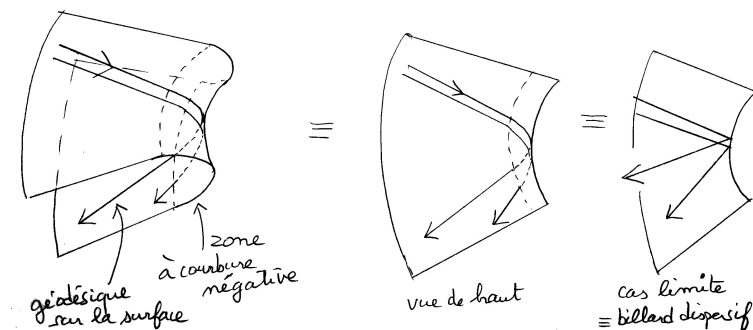


5. Le travail va donc porter à trouver les lois d'évolution pour cette distribution de probabilité. C'est un sujet actuel de recherche.

Voir video 2_Animation_10e4_billes_Sinai.gif 3_Animation_10e4_billes_diffusion.gif

En Section @@, on montrera comment expliquer cette convergence vers l'équilibre, décrire les fluctuations autour de cet équilibre, expliquer la diffusion Gaussienne sur le plan et calculer le coefficient de diffusion.

Remarque 1.4.1. (*) La dynamique en ligne droite dans un billard aux bords convexe peut être considéré comme des trajectoires géodésiques sur une surface à courbure négative.



A la fin du XIXe siècle, Hadamard a initié la théorie du chaos avec l'étude des géodésiques sur les surfaces à courbure négative constante (surfaces hyperboliques).

1.4.3 Systèmes physiques reliés au modèle du billard dispersif

- Le flot géodésique sur les surfaces (ou espace) à courbure négative.
- De façon conjecturale : le “hasard” dans la répartition des nombres premiers (flot sur la surface modulaire)

1.5 Dynamique spatio-temporelle

Dans les modèles précédent, la variable qui évolue au cours du temps était un point dans un espace de dimension finie : $x(t) = (\alpha(t), \beta(t)) \in \mathbb{R}^2$ pour le pendule, $x_n \in \mathbb{R}$ pour l'application logistique, $(q(t), v(t)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ pour le billard.

Il est de nombreux problèmes de physique où la variable qui évolue est une fonction sur l'espace (une "onde" ou un "champ"), qui peut représenter en chimie la concentration d'un composé, en mécanique des fluide ce peut être le champ des vitesses, etc.

Une fonction est un objet mathématique appartenant à un espace de dimension infinie ($d = \infty$ ou d très grand) et la dynamique des fonctions est considérablement plus compliqué que celle des points dans \mathbb{R}^d (avec d petit).

En général on parle de dynamique "spatio-temporelle" pour désigner ces études. (En mathématique on parle de "Equations aux Dérivées Partielles non linéaires" ou "dynamiques sur réseau couplées").

On présente ici un modèle de dynamique spatio temporelle intéressant d'un point de vue historique et scientifique.

1.5.1 Modèle de Belousov-Zhabotinsky (1950)

Voir aussi, la [page web sur Wikipedia](#). On présente ici une version discrétisée de ce modèle qui se prête bien aux simulations numériques. A l'origine cela modélisait l'évolution de composés chimiques. L'espace est bidimensionnel, discrétisé et périodique.

A un instant $n \in \mathbb{Z}$ (le temps est discret) $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une fonction à trois composantes sur le réseau $N \times N$ périodisé.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ qui est le nombre de points selon x et y . On considère le réseau⁶

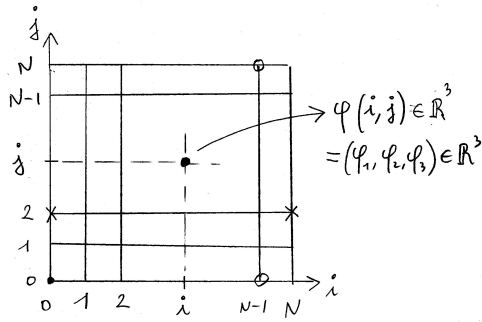
$$L := (\mathbb{Z}/(N\mathbb{Z}))^2$$

A un instant $n \in \mathbb{Z}$ (le temps est discret) on considère une fonction φ sur le réseau L à valeur dans \mathbb{R}^3 :

$$\varphi : L \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Autrement dit, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ avec des composantes $\varphi_1(i, j), \varphi_2(i, j), \varphi_3(i, j) \in \mathbb{R}$ au point $(i, j) \in L$. Au total $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^L$

6. rappel : $\mathbb{Z} = \{\dots -1, 0, 1, 2, \dots\}$ est l'ensemble des entiers relatifs. $(N\mathbb{Z}) = \{-N, 0, N, 2N, 3N, \dots\}$ sont les multiples de N et $\mathbb{Z}/(N\mathbb{Z})$ désigne l'ensemble \mathbb{Z} quotienté par $(N\mathbb{Z})$ ce qui signifie que l'on identifie n et $n + N$, autrement dit c'est l'ensemble à N éléments $\{1, 2, \dots, N\}$ avec l'opération $N + 1 \equiv 1$, etc... . On peut aussi dire que $\mathbb{Z}/(N\mathbb{Z})$ est l'ensemble $\{1, 2, \dots, N, N + 1\}$ avec la condition de périodicité $N + 1 \equiv 1$. Ainsi $L := (\mathbb{Z}/(N\mathbb{Z}))^2$ est un carré discrétisé avec ces même conditions de périodicité (un tore discrétisé).



Pour définir $\varphi^{(n+1)}$ (à l'instant $n+1$) à partir de $\varphi^{(n)} = \varphi$ on considère deux opérations successives :

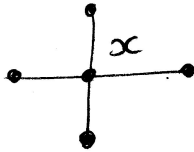
1. **“Moyennisation spatiale” ou “diffusion”** : c'est l'opération

$$\mathcal{M} : \begin{cases} (\mathbb{R}^3)^L & \rightarrow (\mathbb{R}^3)^L \\ \varphi & \rightarrow \mathcal{M}\varphi \end{cases}$$

défini par : si $x \in L$,

$$(\mathcal{M}\varphi)(x) := \frac{1}{5} \sum_{y \in L, y \sim x} \varphi(y) \quad (1.5.1)$$

où $\sum_{y \sim x}$ signifie que la somme porte sur le point x et ses 4 voisins proches.



2. **“Dynamique ponctuelle” ou “réaction” sur \mathbb{R}^3** : en chaque point $x \in L$ du réseau, la fonction $\varphi(x) = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathbb{R}^3$ est modifiée par l'application :

$$\mathcal{R} : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} & \rightarrow \begin{pmatrix} \varphi'_1 = \varphi_1 (1 + \varphi_2 - \varphi_3) \\ \varphi'_2 = \varphi_2 (1 + \varphi_3 - \varphi_1) \\ \varphi'_3 = \varphi_3 (1 + \varphi_1 - \varphi_2) \end{pmatrix} \end{cases} \quad (1.5.2)$$

et ensuite on restreint⁷ chaque valeur φ'_j à l'intervalle $[0, 1]$. Cela définit un opérateur non linéaire

$$\mathcal{R} : \begin{cases} (\mathbb{R}^3)^L & \rightarrow (\mathbb{R}^3)^L \\ \varphi & \rightarrow \mathcal{R}\varphi \end{cases}$$

défini par $(\mathcal{R}\varphi)(x) = \mathcal{R}(\varphi(x))$

7. Si $\varphi'_j < 0$ alors $\varphi'_j = 0$ et si $\varphi'_j > 1$ alors $\varphi'_j = 1$.

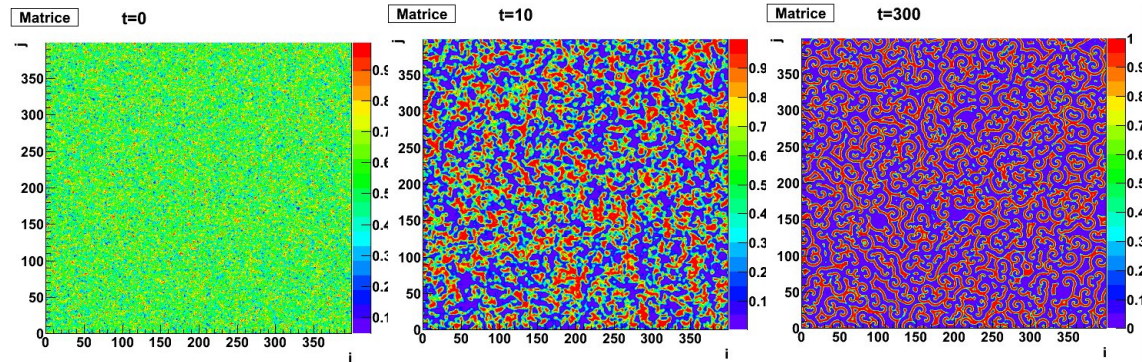


FIGURE 1.5.1 – Image numérique de la première composante $\varphi_1(x)$, $x \in L$ sur un réseau L de taille $N \times N$ avec $N = 400$. Initialisé au départ au hasard (à $t = 0$). Après une durée de transition $t \geq 100$, l'évolution converge vers un cycle périodique en temps qui a une structure spatiale avec des spirales.

La dynamique est la suite de ces opérations de diffusion et réaction :

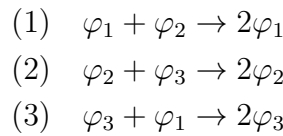
$$\mathcal{L} := \mathcal{RM}$$

La question est de décrire $\mathcal{L}^n \varphi$ pour des temps n quelconques, partant d'un champ initial φ .

Voir animations `Animation_BZ_2.gif` et `Animation_BZ_2.gif` qui montrent l'évolution périodique des fronts et de spirales. On obtient un comportement périodique en temps à partir de $t \gtrsim 100$.

1.5.2 Interprétation du modèle en chimie

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in [0, 1]$ représentent les concentrations de 3 composés. On suppose qu'il y a les 3 réactions chimiques schématisée par les relations



Dans la réaction (1) on dit que φ_2 est un **catalyseur** pour la création du composé φ_1 , etc. Cela implique que à chaque étape, la variation de concentration est donnée par

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_1 &= \underbrace{\varphi_1\varphi_2}_{(1)} - \underbrace{\varphi_1\varphi_3}_{(3)} = \varphi_1(\varphi_2 - \varphi_3) \\ \Delta\varphi_2 &= \underbrace{\varphi_3\varphi_2}_{(2)} - \underbrace{\varphi_1\varphi_2}_{(1)} = \varphi_2(\varphi_3 - \varphi_1) \\ \Delta\varphi_3 &= \underbrace{\varphi_1\varphi_3}_{(3)} - \underbrace{\varphi_2\varphi_3}_{(2)} = \varphi_3(\varphi_1 - \varphi_2) \end{aligned}$$

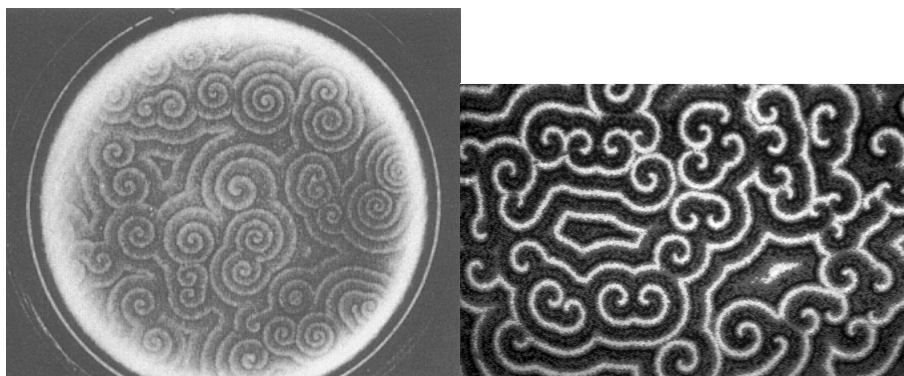


FIGURE 1.5.2 – Une évolution de bactéries *Dictyostelium discoideum* qui est analogue à la “réaction de Belousov-Zhabotinsky” (voir video de Florian Siegert, livre de Cross. [10])

donnant la loi de transformation (1.5.2). Il y a aussi diffusion spatiale des réactifs modélisée par la formule de moyennisation spatiale (1.5.1).

Voir vidéos sur Youtube.

Chapitre 2

Applications et champ de vecteurs

Dans ce chapitre on considère une dynamique déterministe sur un espace de phase différentiable (une variété différentiable). On parle de « dynamique différentiable ». La dynamique est à temps discret (application) ou continu (champ de vecteur et flot).

On étudie les points fixes et leur stabilité linéaire, i.e. l'étude de la dynamique à l'ordre 1 dans leur voisinage.

2.1 Applications

2.1.1 Définitions et exemples

Définition 2.1.1. Soit un entier $d \geq 1$ et une **application** C^∞

$$\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d.$$

Cela définit un système dynamique par la relation de récurrence :

$$x(t+1) = \phi(x(t)), \quad t \in \mathbb{N}. \quad (2.1.1)$$

La **trajectoire** issue d'un point $x \in \mathbb{R}^d$ est la suite des points $x(t)$, avec $t \in \mathbb{N}$. On a $x(t) = \phi^t(x)$ avec

$$\phi^t := \phi \circ \phi \circ \dots \circ \phi \quad (2.1.2)$$

qui est l'application ϕ composée t fois.

Exemple 2.1.2. en dimension $d = 1$, pour la variable $x \in \mathbb{R}$. On considère l'application linéaire

$$\phi(x) = \lambda x$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé. Le système dynamique est $x(t+1) = \phi(x(t)) = \lambda x(t)$. On observe que $\phi(0) = 0$ donc $x^* = 0$ est un point fixe. On a $x(t) = \phi^t(x(0)) = \lambda^t x(0)$. On déduit que si $|\lambda| < 1$ alors $|x(t)| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ donc $x^* = 0$ est un **point fixe stable**. Si $|\lambda| > 1$ alors

$|x(t)| \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$; $x^* = 0$ est un **point fixe instable**. Si $|\lambda| = 1$, on dit que $x^* = 0$ est un **point fixe neutre** (ou elliptique).

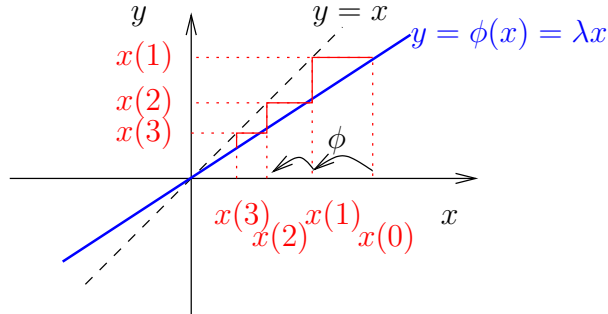


FIGURE 2.1.1 – Système dynamique linéaire $x(t+1) = \lambda x(t)$ avec $0 < \lambda < 1$. Partant d'un point $x(0)$ arbitraire, la suite $x(t) \rightarrow 0$ pour $t \rightarrow \infty$.

Exemple 2.1.3. en dimension $d = 2$, pour la variable $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. On considère l'application linéaire

$$\phi(x) = Mx$$

avec la matrice diagonale $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Le système dynamique est

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \phi(x(t)) = Mx(t) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1(t+1) = 2x_1(t) \\ x_2(t+1) = \frac{1}{2}x_2(t) \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $x_1(t) = 2^t x_1(0)$ et $x_2(t) = \frac{1}{2^t} x_2(0)$. Observer que le produit $x_1(t) x_2(t) = x_1(0) x_2(0)$ ne dépend pas du temps (constante du mouvement) et donc le point $x(t)$ appartient à l'hyperbole $x_1 x_2 = \text{cste} = x_1(0) x_2(0)$ pour tout t . Voir figure 2.1.2. On observe que $\phi(0,0) = (0,0)$ donc $x^* = 0$ est un **point fixe hyperbolique** où la direction x_1 est instable et la direction x_2 est stable.

Exemple 2.1.4. en dimension $d = 1$, on a vu l'**application logistique** en Section 1.3 qui est non linéaire et ayant un comportement extrêmement complexe pour certaines valeurs du paramètre μ .

Exemple 2.1.5. En section 1.5.1 on a vu l'**application de Belousov-Zhabotinsky** qui modélise certaines réaction chimiques. C'est une application en dimension N^2 (très grande) et non linéaire. Son comportement est assez complexe.

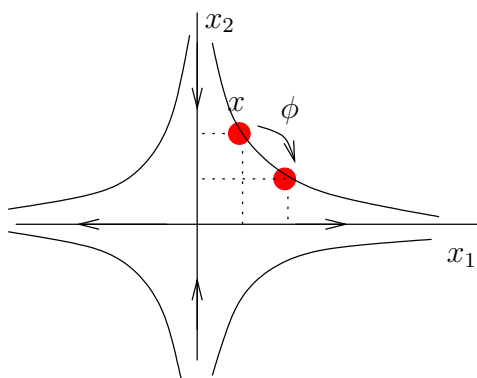


FIGURE 2.1.2 – Système dynamique linéaire $x(t+1) = \phi(x(t)) = Mx(t) \in \mathbb{R}^2$ avec $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Les trajectoires des points sont sur des hyperboles.

2.1.2 Rappels sur la différentielle

On note $D\phi(x) := \left(\frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x_j} \right)_{i,j=1\dots d}$ la **différentielle de l'application** ϕ au point x aussi appelée **matrice Jacobienne**. Rappelons d'après la formule de dérivée de fonctions composées que si on considère une trajectoire étant la suite de points $x(t+1) = \phi(x(t))$, pour $t \in \mathbb{N}$, cad la suite $x(0), x(1), \dots, x(t-1), x(t)$ alors la différentielle

$$D\phi^t(x) \stackrel{(2.1.2)}{=} D(\phi \circ \phi \circ \dots \circ \phi)(x) = D\phi(x(t-1)) \dots D\phi(x(1)) D\phi(x(0)) \quad (2.1.3)$$

est le produit des différentielles le long de la trajectoire. Attention ce produit de matrices est non commutatif.

Rappelons aussi que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ donc

$$\begin{aligned} \det(D\phi^t(x)) &= \det(D\phi(x(t-1))) \dots \det(D\phi(x(0))) \\ &= \prod_{k=0}^{t-1} \det(D\phi(x(k))) \end{aligned}$$

2.1.3 Applications conservatives ou dissipatives

Sur \mathbb{R}^d , on note $dx = dx_1 dx_2 \dots dx_d$ l'élément de volume.

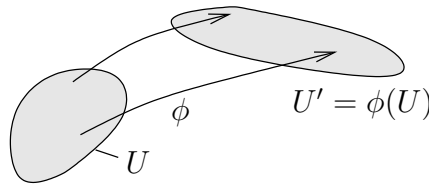
Proposition 2.1.6. Si $U \subset \mathbb{R}^d$ est un ensemble de points, on note $\phi(U) = \{\phi(x), x \in U\}$ qui est l'ensemble des points de U transportés par le flot. Son volume est $\text{Vol}(\phi(U)) := \int_{\phi(U)} dx$. Il s'écrit aussi

$$\text{Vol}(\phi(U)) = \int_{x \in U} |\det D\phi(x)| dx.$$

Par conséquent on a les équivalences suivantes :

- $\text{Vol}(\phi(U)) < \text{Vol}(U)$ pour tout U (i.e. le volume diminue) $\Leftrightarrow \det |D\phi(x)| < 1, \forall x$.
On dit que l'application est **dissipative**.
- $\text{Vol}(\phi(U)) > \text{Vol}(U)$ pour tout U (i.e. le volume augmente) $\Leftrightarrow \det |D\phi(x)| > 1, \forall x$.
On dit que l'application est **expansive**.
- $\text{Vol}(\phi(U)) = \text{Vol}(U)$ pour tout U (i.e. le volume est conservé) $\Leftrightarrow \det |D\phi(x)| = 1, \forall x$. On dit que l'application est **conservative**.

Démonstration. On a $\text{Vol}(\phi(U)) := \int_{\phi(U)} dx$. On effectue le changement de variable $y = \phi^{-1}(x) \Leftrightarrow x = \phi(y)$ donc $dx = \left| \det \frac{\partial \phi}{\partial y} \right| dy$ où $\frac{\partial \phi(y)}{\partial y}$ est la différentielle de ϕ en y . On a $x \in \phi(U) \Leftrightarrow x = \phi(y)$ avec $y \in U$. Donc $\text{Vol}(\phi(U)) = \int_{y \in U} \left| \det \frac{\partial \phi(y)}{\partial y} \right| dy$. \square



Exemple 2.1.7. Sur \mathbb{R}^2 , $x = (x_1, x_2)$, considérons l'application linéaire $\phi(x) = (\phi_1(x), \phi_2(x))$:

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= 2x_1 \\ \phi_2(x) &= 0.3x_2 \end{aligned}$$

La différentielle est la matrice

$$\left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} \right)_{j,i} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{pmatrix}$$

On a

$$\det \left(\left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} \right)_{j,i} \right) = 0.6 < 1$$

(qui est indépendant du point $x = (x_1, x_2)$ car ϕ est linéaire). La dynamique est dissipative. Voir figure 2.1.3.

Remarque 2.1.8. Cependant l'axe x_1 est instable, c'est une matrice hyperbolique.

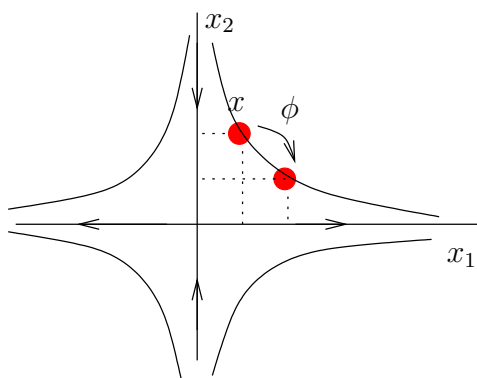


FIGURE 2.1.3 – Par exemple, l’application sur \mathbb{R}^2 , $\phi(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{pmatrix} x$ est dissipative. Le volume ici en rouge diminue, même si la taille augmente selon l’axe instable x_1 . Voir exemple 2.1.7.

2.1.4 Opérateur de transfert

Motivation : En physique on ne connaît jamais précisément l’état initial $x(0)$ d’un système à l’instant $t = 0$. Il est donc intéressant d’étudier l’évolution d’une distribution quelconque d’états initiaux, éventuellement localisés près d’un point $x(0)$. Voir par exemple les sections 1.3 et 1.4.2. Parfois cette distribution s’étale dans l’espace des phases. Ce dernier cas traduit une situation ”imprévisible”. On observe alors un comportement complexe mais instructif. Dans d’autres cas, la distribution reste concentrée près d’un point qui évolue. Ce dernier cas traduit une situation ”prévisible”.

Par exemple pour les prévisions météorologiques, les ingénieurs simulent numériquement le comportement de l’atmosphère sur quelques jours, en partant de plusieurs conditions initiales proches de celle de l’instant présent observé. Les résultats sont parfois concordant (si un anticyclone stable est présent par exemple) mais parfois très différent, ce correspond à des situations et événements ”imprévisibles”.

Dans cette Section nous présentons la définition et quelques propriétés de l’opérateur de transfert \mathcal{L} qui permet de faire évoluer une distribution d’états initiaux par une dynamique quelconque.

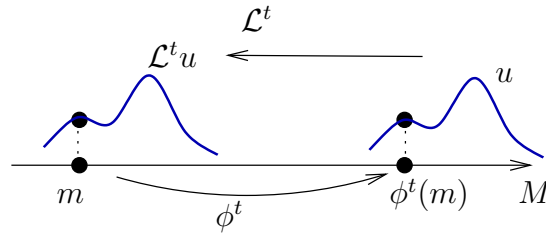
Définition 2.1.9. Si $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est une application C^∞ , on considère l’opérateur qui agit sur les fonctions sur l’espace :

$$\mathcal{L} : \begin{cases} C^\infty(\mathbb{R}^d) & \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^d) \\ u(x) & \rightarrow u(\phi(x)) \end{cases}$$

appelé **opérateur de composition**, ou **opérateur de transfert**.

Voir figure 2.1.4.

Considérons l’opérateur \mathcal{L}^* adjoint à \mathcal{L} dans l’espace $L^2(\mathbb{R}^d)$, c’est à dire que \mathcal{L}^* est

FIGURE 2.1.4 – Schéma de l'action de l'opérateur de transfert \mathcal{L} sur une fonction u .

définit par

$$\langle u | \mathcal{L}^* v \rangle_{L^2} = \langle \mathcal{L} u | v \rangle_{L^2}, \quad \forall u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),$$

avec le « produit scalaire L^2 entre fonctions » :

$$\langle u | v \rangle := \int \overline{u(x)} v(x) dx.$$

L'intérêt de l'opérateur \mathcal{L}^* vient de la propriété (ou remarque) suivante qui montre que \mathcal{L}^* permet d'étudier l'évolution des distributions de probabilité.

Proposition 2.1.10. *Si $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est un difféomorphisme (c'est à dire inversible), l'opérateur adjoint $\mathcal{L}^* : C^\infty(\mathbb{R}^d) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^d)$ est donné par*

$$(\mathcal{L}^* v)(y) = |\det(D\phi^{-1})(y)| v(\phi^{-1}(y)), \quad (2.1.4)$$

où $D\phi^{-1} = \left(\frac{\partial(\phi^{-1})_k}{\partial y_j} \right)_{j,k}$ est la différentielle de l'application ϕ^{-1} . En particulier si ϕ est conservatif alors $(\mathcal{L}^* v)(y) = v(\phi^{-1}(y))$.

\mathcal{L}^* est un opérateur qui préserve et fait évoluer les distributions de probabilité correspondant à la dynamique de ϕ . En effet si $v(x) \geq 0$ et $\int v(x) dx = 1$ (i.e. v est une densité de probabilité), alors $(\mathcal{L}^* v)(x) \geq 0$ et $\int (\mathcal{L}^* v)(x) dx = 1$ (i.e. $\mathcal{L}^* v$ est aussi une densité de probabilité), et si δ_x est la distribution de Dirac en x alors

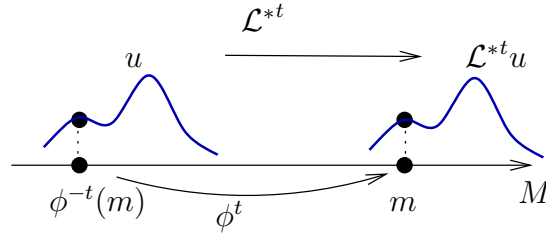
$$\mathcal{L}^* \delta_x = \delta_{\phi(x)}.$$

On appelle \mathcal{L}^* l'opérateur de Perron-Frobenius.

Voir figure 2.1.5.

Remarque 2.1.11. \mathcal{L}^* est aussi appelé **opérateur stochastique** ou **opérateur de Ruelle** ou **opérateur de Liouville** associé à la dynamique de $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$

Remarque 2.1.12. Si l'application est conservative alors $\det |(D\phi^{-1})(y)| = 1$. Sinon ce coefficient Jacobien compense les effets de expansion ou contraction de sorte que l'on a conservation de la probabilité totale.

FIGURE 2.1.5 – Schéma de l'action de l'opérateur de transfert \mathcal{L}^* sur une fonction $v(x)$.

Démonstration. On écrit

$$\begin{aligned}\langle u|\mathcal{L}^*v\rangle &= \langle \mathcal{L}u|v\rangle = \int \overline{(\mathcal{L}u)(x)}v(x) dx \\ &= \int \overline{u(\phi(x))}v(x) dx\end{aligned}$$

Posons le changement de variable $y = \phi(x)$, soit $x = \phi^{-1}(y)$, donnant $dx = \det |(D\phi^{-1})(y)| dy$. Alors

$$\langle u|\mathcal{L}^*v\rangle = \int \overline{u(y)}v(\phi^{-1}(y)) \det |(D\phi^{-1})(y)| dy$$

Par identification avec $\langle u|\mathcal{L}^*v\rangle = \int \overline{u(y)}(\mathcal{L}^*v)(y) dy$, on déduit (2.1.4).

Notons $\mathbf{1}$ la fonction $u(x) = 1, \forall x$. On a

$$\mathcal{L}\mathbf{1} = \mathbf{1} \circ \phi = \mathbf{1}$$

donc

$$\int (\mathcal{L}^*v)(x) dx = \langle \mathbf{1}|\mathcal{L}^*v\rangle = \langle \mathcal{L}\mathbf{1}|v\rangle = \langle \mathbf{1}|v\rangle = \int v(x) dx$$

D'autre part, pour tout $u \in C^\infty(S^1)$ (fonction test), on a

$$\langle u|\mathcal{L}^*\delta_x\rangle = \langle \mathcal{L}u|\delta_x\rangle = \langle u \circ \phi|\delta_x\rangle = \overline{u(\phi(x))} = \langle u|\delta_{\phi(x)}\rangle$$

donc $\mathcal{L}^*\delta_x = \delta_{\phi(x)}$. □

Exemple 2.1.13. Sur \mathbb{R}^2 , $x = (x_1, x_2)$, considérons l'application linéaire $\phi(x) = (\phi_1(x), \phi_2(x))$:

$$\begin{aligned}\phi_1(x) &= 2x_1 \\ \phi_2(x) &= \frac{1}{3}x_2\end{aligned}$$

Si $u(x_1, x_2)$ est une fonction alors

$$(\mathcal{L}u)(x) = u(\phi(x)) = u\left(2x_1, \frac{1}{3}x_2\right)$$

On a $\det\left(\left(\frac{\partial\phi_j}{\partial x_i}\right)_{j,i}\right) = \frac{2}{3} < 1$ et $\phi^{-1}(x_1, x_2) = (\frac{1}{2}x_1, 3x_2)$ donc

$$(\mathcal{L}^*v)(x_1, x_2) = \frac{3}{2}v\left(\frac{1}{2}x_1, 3x_2\right).$$

2.1.5 Point fixe et stabilité

Définition 2.1.14. Le point $x^* \in \mathbb{R}^3$ est **point fixe** (ou point d'équilibre) du système dynamique si

$$x^* = \phi(x^*).$$

L'étude de la stabilité d'un point fixe consiste à étudier la différentielle de l'application sur l'espace tangent au point fixe. Cela correspond à étudier les trajectoires près d'un point fixe x^* à l'ordre 1. Rappelons de la Section 2.1.2 où on a défini la différentielle de l'application ϕ au point fixe x^* ,

$$D\phi(x^*) = \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x_i}(x^*) \right)_{i,j}$$

aussi appelée la “matrice Jacobienne”. Comme x^* est point fixe alors

$$D\phi^t(x^*) \stackrel{(2.1.3)}{=} (D\phi(x^*))^t.$$

Il est donc naturel de diagonaliser (si possible) l'application linéaire $D\phi(x^*)$:

$$D\phi(x^*) = ANA^{-1},$$

avec $N = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_d \end{pmatrix}$ et des valeurs propres $\lambda_j \in \mathbb{C}$ (sinon N est une forme normale de Jordan, voir Section A.1.1). Alors on a l'expression :

$$D\phi^t(x^*) \stackrel{(2.1.3)}{=} (D\phi(x^*))^t = AN^tA^{-1}$$

avec

$$N^t = \begin{pmatrix} \lambda_1^t & & & 0 \\ & \lambda_2^t & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_d^t \end{pmatrix}$$

Proposition 2.1.15. Si $D\phi(x^*)$ est une matrice diagonalisable alors
Alors, avec les changements de coordonnées $x \rightarrow z$ donné par

$$z = A^{-1}(x - x^*)$$

la dynamique est donnée par $z(t+1) = Nz(t) + O(z^2)$ et donc au premier ordre (négligeant $O(z^2)$) :

$$z(t) = N^t z(0) \tag{2.1.5}$$

ce qui correspond à d équations découplées : $z_j(t) = \lambda_j^t z_j(0)$. Conséquence : si $|\lambda_j| < 1$ alors $|z_j(t)| \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$.

Remarque 2.1.16. Avec les coordonnées z , l'application linéarisée et itérée s'exprime comme

$$\phi_{\text{lin}}^t = N^t. \quad (2.1.6)$$

Démonstration. Notons y l'écart au point fixe x^* :

$$y := x - x^* \in \mathbb{R}^d.$$

(Cela revient à faire changement de coordonnées $x \rightarrow y$ tel que le point fixe est en $y = 0$). Le développement de Taylor de l'application ϕ au point $x = x^*$ et au premier ordre s'écrit

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \underbrace{\phi(x^*)}_{x^*} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) (x^*) (x - x^*) + O((x - x^*)^2) \\ &= x^* + My + O(y^2) \end{aligned}$$

La loi d'évolution (2.1.1) s'écrit $x_{t+1} = \phi(x_t) = x^* + My_t + O(y_t^2)$ soit $y_{t+1} = My_t + O(y_t^2)$. Si on néglige les termes $O(y^2)$ on obtient le système dynamique linéaire ("approximation linéaire") :

$$y(t+1) = My(t) \quad (2.1.7)$$

Donnant $y(t) = M^t y(0)$. Pour exprimer M^t pour tout t , il est utile de diagonaliser la matrice $M = ANA^{-1}$. En posant le changement de coordonnées $y \rightarrow z$:

$$z = A^{-1}y \in \mathbb{R}^d$$

Eq(2.1.7) s'écrit $Az(t+1) = ANA^{-1}Az(t) \Leftrightarrow z(t+1) = Nz(t)$ donnant

$$z(t) = N^t z(0)$$

avec $N^t = \begin{pmatrix} \lambda_1^t & & & 0 \\ & \lambda_2^t & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_d^t \end{pmatrix}.$

□

Remarque 2.1.17. Ne pas oublier que cette expression $x_{\text{lin}}(t)$ est solution du système linéarisé (2.1.7) et non pas solution (exacte) du problème de départ (2.2.2).

Définition 2.1.18. D'après le résultat $z_j(t) = \lambda_j^t z_j(0)$ de la proposition 2.1.15, on dit que

- le point fixe x^* est **stable** si $|\lambda_j| < 1, \forall j$.
- le point fixe x^* est **instable** si il existe $|\lambda_j| > 1$.
- le point fixe x^* est **expansif** si $|\lambda_j| > 1, \forall j$.
- le point fixe x^* est **elliptique** si $|\lambda_j| = 1, \forall j$.
- le point fixe x^* est **hyperbolique** si $|\lambda_j| \neq 1, \forall j$. Les vecteurs propres pour $|\lambda_j| < 1$ forment une base de l'espace linéaire stable $E_s(x^*)$. Les vecteurs propres pour $|\lambda_j| > 1$ forment une base de l'espace linéaire instable $E_u(x^*)$.

(*)Variétés stables et instables d'un point fixe hyperbolique

Pour la définition et propriété suivante, voir Pesin p.31 “Stable manifold theorem” [33].

Proposition 2.1.19. *Supposons que $x^* \in \mathbb{R}^d$ est un point fixe hyperbolique de l'application ϕ . La variété stable $\mathcal{W}_s(x^*)$ du point fixe hyperbolique x^* est définie par*

$$\mathcal{W}_s(x^*) := \left\{ x \text{ t.q. } \phi^t(x) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} x^* \right\}$$

On montre que c'est une sous variété lisse de \mathbb{R}^d et dont l'espace tangent en x^ est l'espace linéaire stable $E_s(x^*)$.*

La variété instable $\mathcal{W}_u(x^)$ est*

$$\mathcal{W}_u(x^*) := \left\{ x \text{ t.q. } \phi^t(x) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} x^* \right\}$$

On montre que c'est une sous variété lisse de \mathbb{R}^d et dont l'espace tangent en x^ est l'espace linéaire instable $E_u(x^*)$.*

En général il est difficile (ou impossible) de calculer les variétés stables ou instables analytiquement. On peut les calculer numériquement dans le voisinage de x^* .

2.2 Champ de vecteur

2.2.1 Définitions : champ de vecteur, équations du mouvement, flot

Définition 2.2.1. Notons $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ un point de \mathbb{R}^d . Supposons une fonction

$$\mathcal{V} : \begin{cases} \mathbb{R}^d & \rightarrow \mathbb{R}^d \\ x & \rightarrow \mathcal{V}(x) = (\mathcal{V}_1(x), \dots, \mathcal{V}_d(x)) \end{cases} \quad (2.2.1)$$

considérée comme un **champ de vecteur** sur \mathbb{R}^d de composantes $\mathcal{V}_j(x)$, $j = 1 \dots d$. On considère les **équations de mouvement**

$$\frac{dx}{dt} = \mathcal{V}(x) \quad (2.2.2)$$

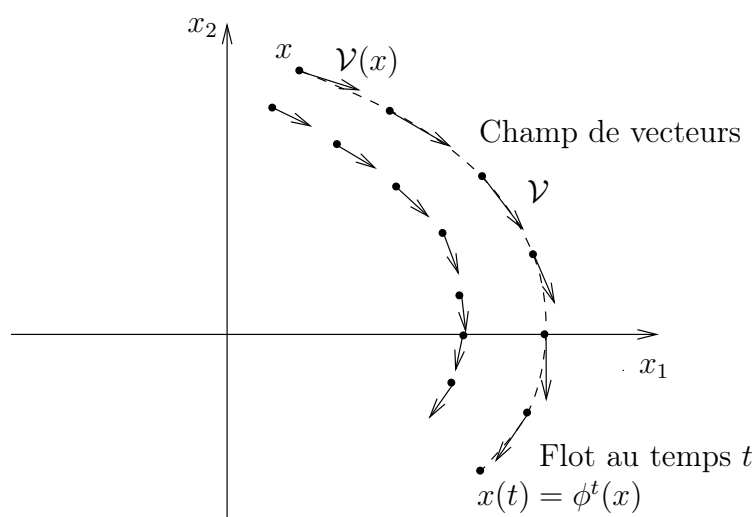
où l'inconnue est une trajectoire $x(t) \in \mathbb{R}^d$ dépendant du temps $t \in \mathbb{R}$. Pour un point initial $x \in \mathbb{R}^d$ donné, on note $\phi^t(x) = x(t)$ la **trajectoire** issue de ce point au temps $t \in \mathbb{R}$. Ainsi

$$\phi^t : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$$

vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{d\phi^t(x)}{dt} = \mathcal{V}(\phi^t(x)) \quad (2.2.3)$$

et l'application $\phi^t : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est appelé le **flot** au temps $t \in \mathbb{R}$.



Si l'expression du champ de vecteur $\mathcal{V}(x)$ est connue, l'expression du flot $\phi^t(x)$ n'est pas connue a priori et difficile ou impossible à trouver en général. La théorie des systèmes dynamiques consiste à étudier les propriétés du flot ϕ^t .

Exemple 2.2.2. En dimension $d = 1$. On considère le champs de vecteur $\mathcal{V}(x) = 2x$ et l'équation de mouvement

$$\frac{dx}{dt} = \mathcal{V}(x) = 2x \Leftrightarrow \frac{dx}{x} = 2dt \Leftrightarrow d \ln(x) = d(2t + C) \Leftrightarrow \ln(x) = 2t + C \Leftrightarrow x(t) = e^{2t+C}$$

avec $C \in \mathbb{R}$. on a $x(0) = e^C$ donc $x(t) = e^{2t}x(0)$. Le flot au temps t est donc $\phi^t(x) = e^{2t}x$.

Exemple 2.2.3. En dimension $d = 2$. On considère le champs de vecteur $\mathcal{V}(x_1, x_2) = (2x_1, -2x_2)$ et l'équation de mouvement

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \mathcal{V}(x) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} &= 2x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -2x_2, \end{cases} &\Leftrightarrow \phi^t(x_1, x_2) = (e^{2t}x_1, e^{-2t}x_2) \end{aligned}$$

On a réussi à résoudre cet exemple car on a obtenu deux équations linéaires indépendantes.

2.2.2 Flot conservatifs et dissipatifs

On note

$$(\operatorname{div} \mathcal{V})(x) := \sum_{j=1}^d \frac{\partial \mathcal{V}_j(x)}{\partial x_j} \quad (2.2.4)$$

appelée **divergence du champs de vecteur**. Sur \mathbb{R}^d , on note $dx = dx_1 dx_2 \dots dx_d$ l'élément de volume.

Proposition 2.2.4. Si $U \subset \mathbb{R}^d$ est un ensemble de points et $\phi^t(U)$ est l'ensemble de points transportés par le flot alors son volume est

$$\text{Vol}(\phi^t(U)) := \int_{x \in \phi^t(U)} dx = \int_{y \in U} \det \left| \frac{\partial \phi^t}{\partial y} \right| dy$$

et la variation du volume (à $t = 0$) est donnée par

$$\left(\frac{d\text{Vol}(\phi^t(U))}{dt} \right)_{t=0} = \int_{x \in U} (\text{div} \mathcal{V})(x) dx$$

Par conséquent on a les équivalences suivantes :

- $\text{Vol}(\phi^t(U))(t)$ diminue pour tout $U \Leftrightarrow \det \left| \frac{\partial \phi^t}{\partial y} \right| < 1 \Leftrightarrow \text{div} \mathcal{V}(x) < 0, \forall x$. On dit que le flot est **dissipatif**.
- $\text{Vol}(\phi^t(U))(t)$ augmente pour tout $U \Leftrightarrow \det \left| \frac{\partial \phi^t}{\partial y} \right| > 1 \Leftrightarrow \text{div} \mathcal{V}(x) > 0, \forall x$. On dit que le flot est **expansif**.
- $\text{Vol}(\phi^t(U))(t)$ est constant pour tout $U \Leftrightarrow \det \left| \frac{\partial \phi^t}{\partial y} \right| = 1 \Leftrightarrow \text{div} \mathcal{V}(x) = 0, \forall x$. On dit que le flot est **conservatif**.

Remarque 2.2.5. Voir aussi [31, p.5]. En mécanique des fluides, on emploie le terme “incompressible” pour dire “conservatif”.

De ce qui précède, on déduit que pour tout t et tout U on a

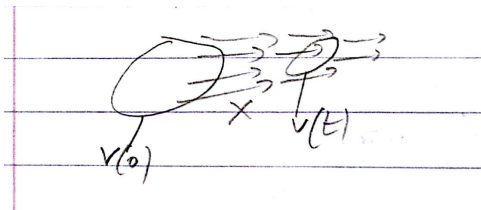
$$\frac{d\text{Vol}(\phi^t(U))}{dt} = \int_{y \in U} (\text{div} \mathcal{V})(\phi^t(y)) \det \left| \frac{\partial \phi^t}{\partial y} \right| dy = \int_{y \in U} \frac{d\det \left| \frac{\partial \phi^t}{\partial y} \right| (y)}{dt} dy$$

et donc la formule suivante

$$\frac{d\det \left| \frac{\partial \phi^t}{\partial y} \right| (y)}{dt} = \text{div}(\mathcal{V})(\phi^t(y)) \det \left| \frac{\partial \phi^t}{\partial y} \right| (y), \quad \forall y, \forall t.$$

ou plus simplement en $t = 0$:

$$\left(\frac{d\det \left| \frac{\partial \phi^t}{\partial y} \right| (y)}{dt} \right)_{t=0} = \text{div}(\mathcal{V})(y), \quad \forall y.$$



Démonstration. On a $\text{Vol}(\phi^t(U)) := \int_{x \in \phi^t(U)} dx = \int_{x \in \mathbb{R}^d} f_U(\phi^{-t}(x)) dx$ où $f_U(y) = 1$ si $y \in U$, $f_U(y) = 0$ si $y \notin U$, est la fonction caractéristique de l'ensemble U . On a

$$\frac{d}{dt} \text{Vol}(\phi^t(U)) = \frac{d}{dt} \int_{x \in \mathbb{R}^d} f_U(\phi^{-t}(x)) dx.$$

La fonction f_U n'est pas dérivable mais peut s'approcher (par la norme L^∞) par une suite de fonctions dérivables à support compact. Si la fonction f est dérivable, on a d'après la formule de dérivée de fonctions composées

$$\frac{d}{dt} \int f(\phi^{-t}(x)) dx = \int \frac{d}{dt} f(\phi^{-t}(x)) dx = \int \sum_{j=1}^d \left(\frac{\partial f}{\partial y_j} \right) (\phi^{-t}(x)) \left(\frac{d\phi_j^{-t}}{dt} \right) (x) dx$$

Or d'après (2.2.3), on a $\left(\frac{d\phi_j^{-t}}{dt} \right) (x) = -\mathcal{V}_j(\phi^{-t}(x))$ et $\phi^{-0}(x) = x$ donc

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \int f(\phi^{-t}(x)) dx \right)_{t=0} &= - \int \sum_{j=1}^d \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) (x) \mathcal{V}_j(x) dx \\ &\stackrel{\text{par parties}}{=} \int f(x) \sum_{j=1}^d \frac{\partial \mathcal{V}_j}{\partial x_j}(x) dx \\ &\stackrel{(2.2.4)}{=} \int f(x) \text{div}(\mathcal{V}(x)) dx \end{aligned}$$

On déduit que cette formule est valable pour la fonction f_U (par passage à la limite $f \rightarrow f_U$) et donc

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \text{Vol}(\phi^t(U)) \right)_{t=0} &= \int f_U(x) \text{div}(\mathcal{V}(x)) dx \\ &= \int_{x \in U} \text{div}(\mathcal{V}(x)) dx \end{aligned}$$

En faisant le changement de variable $x = \phi^t(y)$ donc $dx = \det \left| \frac{\partial \phi^t}{\partial y} \right| dy$ où $\frac{\partial \phi^t}{\partial y}$ est la différentielle du flot ϕ^t en y , on obtient $\text{Vol}(\phi^t(U)) = \int_{x \in \phi^t(U)} dx = \int_{y \in U} \det \left| \frac{\partial \phi^t}{\partial y} \right| dy$. \square

2.2.3 Opérateur de transfert

On a déjà introduit l'opérateur de transfert pour les applications dans la Section 2.1.4. Cette définition convient aussi pour les flots :

Définition 2.2.6. Si $\phi^t : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est un flot C^∞ , généré par un champ de vecteur \mathcal{V} , l'opérateur

$$\mathcal{L}^t : \begin{cases} C^\infty(\mathbb{R}^d) & \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^d) \\ u & \rightarrow u \circ \phi^t \end{cases} \quad (2.2.5)$$

appelé **opérateur de composition**, ou **opérateur de transfert** au temps t .

Voir figure 2.1.4. Rappelons, d'après la proposition 2.1.10, que l'opérateur L^2 -adjoint de \mathcal{L}^t , noté $(\mathcal{L}^t)^*$ est donné par

$$((\mathcal{L}^t)^* v)(y) = \det |(D\phi^{-t})(y)| v(\phi^{-t}(y)), \quad (2.2.6)$$

et $(\mathcal{L}^t)^*$ transporte les mesures de probabilité par le flot. En particulier pour un flot conservatif, on a

$$(\mathcal{L}^t)^* v = v \circ \phi^{-t}. \quad (2.2.7)$$

Proposition 2.2.7. *La famille d'opérateurs de transfert $(\mathcal{L}^t)_{t \in \mathbb{R}}$ forme un groupe :*

$$\mathcal{L}^{t_1} \circ \mathcal{L}^{t_2} = \mathcal{L}^{t_1+t_2}, \quad \forall t_1, t_2,$$

généralisé par le champ de vecteur \mathcal{V} considéré comme un opérateur différentielle d'ordre 1 sur \mathbb{R}^d :

$$\mathcal{L}^t = e^{t\mathcal{V}},$$

avec

$$\mathcal{V} = \sum_{j=1}^d \mathcal{V}_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (2.2.8)$$

où $(\mathcal{V}_j(x))_{j=1\dots d} \in \mathbb{R}^d$ sont les composantes du champ de vecteur introduit en (2.2.1).

Démonstration. Considérons l'équation d'évolution infinitésimale (2.2.3) $\frac{d\phi^t(x)}{dt} = \mathcal{V}(\phi^t(x))$. On a $(\mathcal{L}^t u)(x) \stackrel{(2.2.5)}{=} u(\phi^t(x))$ donc

$$\begin{aligned} \frac{d(\mathcal{L}^t u)(x)}{dt} &= \sum_j \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right) (\phi^t(x)) \frac{d(\phi^t)_j(x)}{dt} \\ &\stackrel{(2.2.3)}{=} \sum_j \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right) (\phi^t(x)) \mathcal{V}_j(\phi^t(x)) \\ &= \sum_j \mathcal{V}_j(\phi^t(x)) \frac{\partial}{\partial x_j} \mathcal{L}^t u(x) \\ &= \mathcal{V} \mathcal{L}^t u(x) \end{aligned}$$

On a donc $\frac{d\mathcal{L}^t}{dt} = \mathcal{V} \mathcal{L}^t$ et $\mathcal{L}^0 = \text{Id}$. La solution de cette équation différentielle est $\mathcal{L}^t = e^{t\mathcal{V}}$. \square

Lemme 2.2.8. *L'opérateur L^2 -adjoint de \mathcal{V} est*

$$\mathcal{V}^* = -\mathcal{V} - \text{div}(\mathcal{V}). \quad (2.2.9)$$

Par conséquent l'opérateur de Perron Frobenius est $(\mathcal{L}^t)^* = e^{t\mathcal{V}^*} = e^{t(-\mathcal{V} + \text{div}(\mathcal{V}))}$.

Démonstration. Par définition de l'adjoint

$$\begin{aligned}
\langle u | \mathcal{V}^* v \rangle &= \langle \mathcal{V} u | v \rangle = \int \overline{(\mathcal{V} u)(x)} v(x) dx \\
&= \int \overline{\left(\sum_{j=1}^d \mathcal{V}_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right)}(x) v(x) dx \\
&= \sum_{j=1}^d \int \mathcal{V}_j(x) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j}(x) v(x) dx \\
&\stackrel{p.p.}{=} - \sum_{j=1}^d \int \bar{u}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} (\mathcal{V}_j(x) v)(x) dx \\
&= - \sum_{j=1}^d \int \bar{u}(x) \left(\frac{\partial \mathcal{V}_j(x)}{\partial x_j} v(x) + \mathcal{V}_j(x) \frac{\partial v}{\partial x_j}(x) \right) dx \\
&= - \int \bar{u}(x) ((\operatorname{div} \mathcal{V})(x) v(x) + (\mathcal{V} v)(x)) dx \\
&= - \langle u | (\operatorname{div} \mathcal{V}) v + \mathcal{V} v \rangle
\end{aligned}$$

On déduit (2.2.9). □

Remarque 2.2.9. En géométrie différentielle [17], on montre qu'il est naturel de considérer un champ de vecteur comme un opérateur différentiel (2.2.8).

Remarque 2.2.10. L'équation d'évolution infinitésimale (2.2.3) $\frac{d\phi^t(x)}{dt} = \mathcal{V}(\phi^t(x))$ peut aussi s'écrire

$$i\hbar \frac{d\phi^t(x)}{dt} = i\hbar \mathcal{V}(\phi^t(x)) = \hat{H} \phi^t$$

avec l'opérateur $\hat{H} = i\hbar \mathcal{V}$ et un paramètre $\hbar > 0$ arbitraire. Cette dernière équation a la même allure que l'équation de Schrödinger en mécanique quantique. L'opérateur d'évolution $\mathcal{L}^t = e^{t\mathcal{V}} = e^{-i\hbar \hat{H}t}$ a la même expression que l'opérateur d'évolution en mécanique quantique. Il y a cependant des différences notables :

- ici \hat{H} est un opérateur différentiel d'ordre 1 (alors que en mécanique quantique $\hat{H} = -\hbar^2 \Delta + V(x)$ est d'ordre 2).
- Si le flot est conservatif alors $\hat{H}^* = \hat{H}$ est autoadjoint, sinon ce n'est pas le cas (en général $\mathcal{V}^* = -\mathcal{V} + \operatorname{div} \mathcal{V}$).
- Les fonctions $u(x)$ sont ici des fonctions sur l'espace des phases (où a lieu le flot ϕ^t), alors que en mécanique quantique, les fonctions d'ondes $\psi(q)$ sont des fonctions sur l'espace de configuration.

Démonstration. Cette correspondance entre évolution classique et quantique via l'opérateur de transfert est sujet de recherches actuelles [16, 22]. □

2.2.4 (*) Théorème fondamental qui garantit les solutions aux EDO

Rappel : par définition la fonction $\mathcal{V} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est **Lipschitz** si il existe $C > 0$ tel que

$$\forall x, y, \|x - y\| \leq 1 \implies \|\mathcal{V}(x) - \mathcal{V}(y)\| \leq C \|x - y\|.$$

Autrement dit si l'écart $\|\mathcal{V}(x) - \mathcal{V}(y)\|$ s'annule comme $\|x - y\|$ lorsque $y \rightarrow x$. Par exemple une fonction C^k avec $k \geq 1$ est Lipschitz.

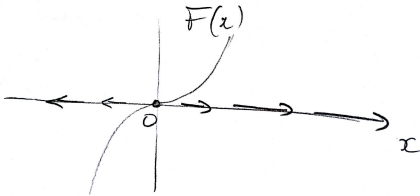
Théorème 2.2.11. “Cauchy-Lipchitz”. Si le champ de vecteur $\mathcal{V} : x \in \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{V}(x) \in \mathbb{R}^d$ est C^1 (ou même seulement Lipschitz) alors pour toute condition initiale $x \in \mathbb{R}^d$, il existe un intervalle de temps $[t_1, t_2]$ avec $t_1 < 0 < t_2$ tel que la solution à l'EDO $\frac{dx}{dt} = \mathcal{V}(x)$, existe et est unique sur cet intervalle de temps.

Démonstration. Voir [39]. □

Remarque 2.2.12. Parfois il existe une solution unique sur $t \in \mathbb{R}$ mais pas toujours comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 2.2.13. Sur \mathbb{R} , on considère l'EDO

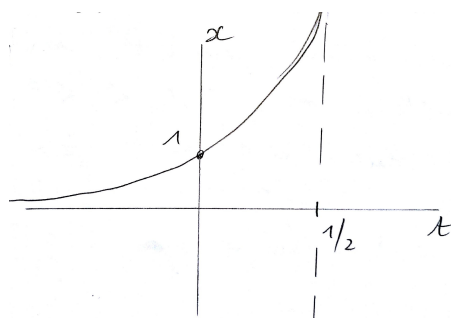
$$\frac{dx}{dt} = \mathcal{V}(x) = x^3, \quad x(0) = 1.$$



La solution est obtenue en écrivant

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = x^3 &\Leftrightarrow \frac{dx}{x^3} = dt \Leftrightarrow \frac{1}{(-2)} d\left(\frac{1}{x^2}\right) = dt \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{-2x^2} = t - C, \quad C \in \mathbb{R}, \\ &\Leftrightarrow x(t) = \frac{1}{\sqrt{2(C-t)}}, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

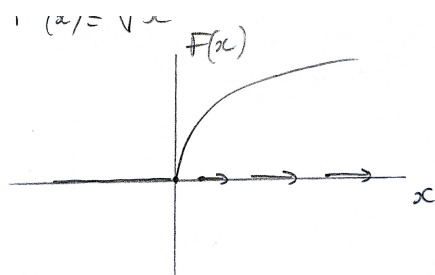
On prend $C = \frac{1}{2}$ de sorte que $x(0) = 1$. Il y a donc une solution sur l'intervalle $t \in [-\infty, \frac{1}{2}]$ mais pas plus car le point $x(t) \rightarrow \infty$ atteint l'infini en temps fini $t = \frac{1}{2}$.



Remarque 2.2.14. Comme le suggère le théorème, si \mathcal{V} n'est pas C^1 (ou pas Lipschitz) il peut ne pas y avoir d'unicité. Voir l'exemple suivant.

Exemple 2.2.15. Sur \mathbb{R} , on considère l'EDO

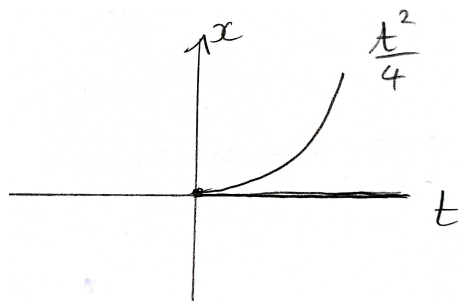
$$\frac{dx}{dt} = \mathcal{V}(x) = \sqrt{x}, \quad x(0) = 0.$$



Pour la résoudre, on écrit

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = x^{1/2} &\Leftrightarrow \frac{dx}{x^{1/2}} = dt \Leftrightarrow 2d(x^{1/2}) = dt \\ \Leftrightarrow 2x^{1/2} = t + C, \quad C \in \mathbb{R}, &\Leftrightarrow x = \left(\frac{t+C}{2}\right)^2, \quad C = 0 \text{ pour avoir } x(0) = 0, \\ \Leftrightarrow x(t) = \frac{t^2}{4}, \quad t \geq 0. & \end{aligned}$$

Mais il y a une autre solution évidente qui est $x(t) = 0$ pour $t \geq 0$.



Conclusion : dans cet exemple, le champ de vecteur $\mathcal{V}(x)$ n'est pas Lipschitz en $x = 0$ et on a observé que l'ODE a deux solutions.

2.2.5 Point fixe et stabilité

Définition 2.2.16. Le point $x^* \in \mathbb{R}^3$ est **point fixe** (ou point d'équilibre) du système dynamique $\frac{dx}{dt} = \mathcal{V}(x)$ si

$$\mathcal{V}(x^*) = 0,$$

c'est à dire que c'est le zéro du champ de vecteur \mathcal{V} . Par conséquent x^* est un point fixe pour le flot :

$$\phi^t(x^*) = x^*, \forall t \in \mathbb{R}.$$

L'étude de la stabilité d'un point fixe consiste à étudier la différentielle du flot (ou du champs de vecteur) sur l'espace tangent au point fixe. Cela correspond à étudier les trajectoires près d'un point fixe x^* à l'ordre 1.

Proposition 2.2.17. Notons la différentielle du champ de vecteur \mathcal{V} au point fixe x^* :

$$m = \left(\frac{\partial \mathcal{V}_j}{\partial x_i}(x^*) \right)_{i,j}$$

On suppose que m est diagonalisable (sinon voir Section [A.1.1](#)) :

$$m = AnA^{-1},$$

avec $n = \begin{pmatrix} \gamma_1 & & & 0 \\ & \gamma_2 & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & \gamma_d \end{pmatrix}$ et des valeurs propres $\gamma_j \in \mathbb{C}$. Alors, avec les changements de coordonnées $x \rightarrow z$ donné par

$$z = A^{-1}(x - x^*)$$

la dynamique est donnée par $\frac{dz(t)}{dt} = nz(t) + O(z^2)$ et donc au premier ordre :

$$z(t) = e^{tn}z(0) \tag{2.2.10}$$

ce qui correspond à d équations découplées : $z_j(t) = e^{\gamma_j t} z_j(0), \forall j$. Conséquence : si $\text{Re}(\gamma_j) < 0$ alors $|z_j(t)| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.

Démonstration. Notons y l'écart au point fixe x^* :

$$y := x - x^* \in \mathbb{R}^d.$$

Le developpement de Taylor du champ de vecteur $\mathcal{V}(x)$ en $x = x^*$ au premier ordre

s'écrit

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(x) &= \underbrace{\mathcal{V}(x^*)}_0 + \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \right) (x^*) (x - x^*) + O((x - x^*)^2) \\ &= my + O(y^2)\end{aligned}$$

avec la matrice

$$m = \left(\frac{\partial \mathcal{V}_j}{\partial x_i} (x^*) \right)_{i,j}$$

appelée la “matrice Jacobienne”. L'EDO (7.3.4) est $\frac{dx}{dt} = \mathcal{V}(x) = my + O(y^2)$ avec $x(t) = x^* + y(t)$ donc $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$. Si on néglige les termes $O(y^2)$ on obtient l'EDO :

$$\frac{dy}{dt} = my \tag{2.2.11}$$

appelées les “**équations de mouvement linéarisées** en x^* ”. On peut facilement résoudre les équations linéarisées (2.2.11) en diagonalisant la matrice m (supposant pour simplifier que m est diagonalisable, sinon voir Section A.1.1) :

$$m = AnA^{-1},$$

avec n matrice diagonale ayant $\gamma_j \in \mathbb{C}$ sur la diagonale. On pose le changement de variable :

$$z = A^{-1}y \in \mathbb{R}^d$$

Alors $y = Az$ avec $z = (z_1, \dots, z_d)$ et

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} = my &\Leftrightarrow A \frac{dz}{dt} = AnA^{-1}Ay \Leftrightarrow \frac{dz}{dt} = nz \\ &\Leftrightarrow \frac{dz_j}{dt} = \gamma_j z_j, \forall j.\end{aligned}$$

Ces dernières équations étant découplées (grâce à la diagonalisation) on peut les résoudre explicitement :

$$z_j(t) = e^{\gamma_j t} z_j(0), \forall j.$$

□

Remarque 2.2.18. Ne pas oublier que cette expression $x_{\text{lin}}(t)$ est solution du système linéarisé (2.2.11) et non pas solution (exacte) du problème de départ (2.2.2).

Définition 2.2.19. Si $\gamma_j = a + ib$ avec $a = \operatorname{Re}(\gamma_j)$, $b = \operatorname{Im}(\gamma_j) \in \mathbb{R}$, alors d'après la proposition 2.2.17, $|z_j(t)| = e^{at} |z_j(0)|$ et donc $|z_j(t)| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ si et seulement si $a < 0$.

Ainsi on dit que :

- le point fixe x^* est **stable** si $\operatorname{Re}(\gamma_j) < 0, \forall j$.
- le point fixe x^* est **instable** si il existe $\gamma_j > 0$.
- le point fixe x^* est **expansif** si $\operatorname{Re}(\gamma_j) > 0, \forall j$.
- le point fixe x^* est **elliptique** si $\operatorname{Re}(\gamma_j) = 0, \forall j$.
- le point fixe x^* est **hyperbolique** si $\operatorname{Re}(\gamma_j) \neq 0, \forall j$. Les vecteurs propres pour $\operatorname{Re}(\gamma_j) < 0$ forment une base de l'espace linéaire stable $E_s(x^*)$. Les vecteurs propres pour $\operatorname{Re}(\gamma_j) > 0$ forment une base de l'espace linéaire instable $E_u(x^*)$.

Avec les coordonnées z , le flot linéarisé s'exprime comme

$$\phi_{\text{lin}}^t = e^{tn} = (e^n)^t$$

Si on compare (2.1.6) on observe que $N = e^n$ et donc $\lambda_j = e^{\gamma_j}$. Ainsi les critères de stabilité (2.1.18) et (2.2.19) sont identiques.

Variétés stables et instables d'un point fixe hyperbolique

Pour la définition et propriété suivante, voir Pesin p.31 "Stable manifold theorem" [33].

Proposition 2.2.20. *Supposons que $x^* \in \mathbb{R}^d$ est un point fixe hyperbolique du champ de vecteur $\mathcal{V}(x)$. La variété stable $\mathcal{W}_{\text{stable}}(x^*)$ du point fixe hyperbolique x^* est définie par*

$$\mathcal{W}_{\text{stable}}(x^*) := \left\{ x \text{ t.q. } \phi^t(x) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} x^* \right\}$$

On montre que c'est une sous variété lisse de \mathbb{R}^d de dimension n et dont l'espace tangent en x^ est l'espace linéaire stable $E_s(x^*)$.*

La variété instable $\mathcal{W}_{\text{instable}}(x^)$ est*

$$\mathcal{W}_{\text{instable}}(x^*) := \left\{ x \text{ t.q. } \phi^t(x) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} x^* \right\}$$

On montre que c'est une sous variété lisse de \mathbb{R}^d de dimension $d - (n + 1) + 1$ et dont l'espace tangent en x^ est l'espace linéaire instable $E_u(x^*)$.*

En général il est difficile (ou impossible) de calculer les variétés stables ou instables analytiquement. On peut les calculer numériquement dans le voisinage de x^* .

Chapitre 3

Dynamique Hamiltonienne, Billards et flot géodésique

On appelle **mécanique classique**, les lois fondamentales de la physique en générale antérieures à la mécanique quantique mais plus précisément les lois « non quantiques ». En mécanique classique il y a :

- Les loi de Newton et de Hamilton : elles définissent les équations du mouvement pour les éléments de matière ou particules élémentaires soumises à différentes forces.
- Les lois de Maxwell : elles décrivent l'évolution des champs électromagnétiques et les forces qu'ils exercent sur la matière chargée.

Ensuite, avec la physique statistique (qui contient la thermodynamique), à partir de ces lois fondamentales, on peut décrire les « milieux continus » comme les gaz, les fluides, les matériaux, les plasmas etc..

La théorie de la relativité d'Einstein (relativité restreinte en 1906 puis relativité générale 1916) est considérée aussi comme une théorie de la mécanique classique (car non quantique). Elle propose un nouveau cadre théorique plus géométrique dans l'espace-temps pour formuler les équations de mouvement de la matière et des champs électromagnétiques.

3.1 Équations de mouvement de la mécanique

Notons $q(t) \in \mathbb{R}^d$ la **position d'une particule** à l'instant $t \in \mathbb{R}$. (il est habituel de considérer les dimensions d'espaces $d = 1, 2, 3$). La fonction $t \in \mathbb{R} \rightarrow q(t) \in \mathbb{R}^d$ s'appelle la **trajectoire de la particule**.

Définition 3.1.1. « **Loi de Newton 1687** ». La trajectoire d'une particule de masse $m > 0$ et soumise à une **force** $F(q, t) \in \mathbb{R}^d$ est déterminée par l'équation différentielle ordinaire :

$$m \frac{d^2 q}{dt^2} = F(q, t) \quad (3.1.1)$$

avec la donnée des conditions initiales de position $q(0)$, et vitesse $\frac{dq}{dt}(0)$.

Remarque 3.1.2. d'après le théorème de Cauchy Lipschitz [39], il existe une solution unique à (3.1.1) si F est une fonction Lipschitz.

Il est préférable de transformer l'équation du deuxième ordre en équation du premier ordre. Cela donne les équations de Hamilton ci-dessous.

Définition 3.1.3. On supposera dans tout cet exposé que $F(q, t)$ est une **force potentielle** c'est à dire qu'elle peut s'écrire sous la forme particulière ^a :

$$F = - \left(\frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial q_d} \right) =: -\text{grad}(V) \quad (3.1.2)$$

avec une fonction $V(q, t) \in \mathbb{R}$ appelée **énergie potentielle**. Posons l'**impulsion** :

$$p := m \frac{dq}{dt} \in \mathbb{R}^d \quad (3.1.3)$$

et introduisons la fonction réelle suivante, appelée **Hamiltonien** (ou énergie totale)

$$H(q, p, t) := \frac{1}{2m} |p|^2 + V(q, t) \in \mathbb{R} \quad (3.1.4)$$

(Le premier terme $\frac{1}{2m} |p|^2 = \frac{1}{2} m \left| \frac{dq}{dt} \right|^2$ s'appelle l'**énergie cinétique**).

a. Localement il est nécessaire et suffisant que $\text{rot}(F) = 0$

Remarque : dans les notations précédentes, $p = (p_1, \dots, p_d) \in \mathbb{R}^d$, $|p|^2 = \sum_{j=1}^d |p_j|^2$.

Proposition 3.1.4. « *Équations de Hamilton 1833* » Les équations de Newton (3.1.1) peuvent s'écrire sous la forme :

$$\frac{dq_j(t)}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad \forall j. \quad (3.1.5)$$

déterminant un champ de vecteur $\mathcal{V} := \left(\frac{\partial H}{\partial p_j}, -\frac{\partial H}{\partial q_j} \right)_j$ sur l'**espace des phases** $(q, p) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ (figure 3.1.1).

Démonstration. On calcule

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} \stackrel{(3.1.4)}{=} \frac{1}{m} p_j \stackrel{(3.1.3)}{=} \frac{dq_j}{dt}$$

et

$$-\frac{\partial H}{\partial q_j} \stackrel{(3.1.4)}{=} -\frac{\partial V}{\partial q_j} \stackrel{(3.1.2)}{=} F_j \stackrel{(3.1.1)}{=} m \frac{d^2 q_j}{dt^2} \stackrel{(3.1.3)}{=} \frac{dp_j}{dt}$$

□

Remarque 3.1.5. Nous ferons un commentaire dans la remarque 3.3.6 sur l'aspect antisymétrique assez particulier des équations de Hamilton (3.1.5), et que d'une certaine façon

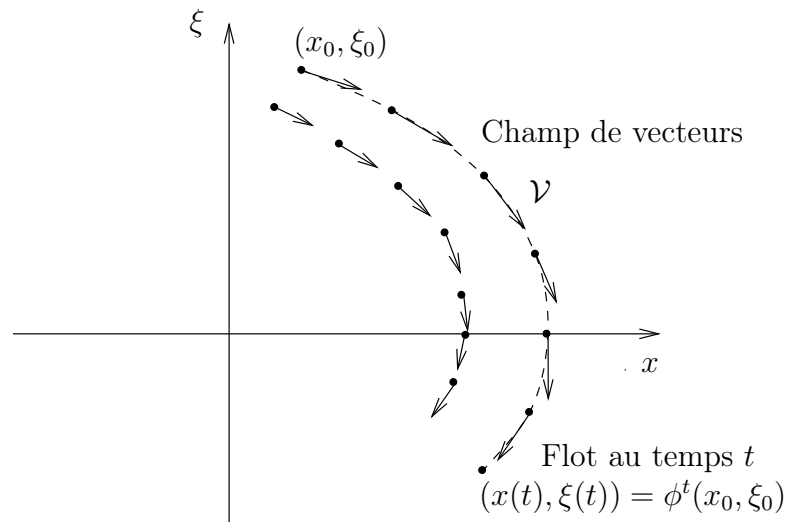


FIGURE 3.1.1 – Champ de vecteurs de Hamilton \mathcal{V} et flot Hamiltonien ϕ^t dans l'espace des phases.

cela laisse déjà entrevoir la mécanique quantique ondulatoire. En 1833 Hamilton a utilisé au départ ces équations pour exprimer l'optique géométrique des rayons qui n'est qu'une approximation de l'optique ondulatoire [24]. Nous verrons de façon analogue que la mécanique classique est une approximation de la mécanique quantique ondulatoire.

3.2 Exemples

Il faut savoir que pour les problèmes à un degré de liberté, $d = 1$ (donc l'espace des phases est $(q, p) \in \mathbb{R}^2$ de dimension 2), et $H(q, p)$ indépendant de t , alors les équations du mouvement sont solubles. En dimension plus grande elles ne le sont pas en général, sauf exceptions comme le problème à deux corps qui est soluble car il se ramène en fait à un problème à un degré de liberté. Plus généralement ces problèmes solubles sont appelés **systèmes intégrables**[3]. L'étude du chaos dans les chapitres ultérieurs sera au contraire consacrée à l'étude des problèmes parmi les « plus simples » qui ne sont pas solubles.

Exemple 3.2.1. « Le problème à deux corps » C'est un système intégrable d'importance historique car c'est par lui que Newton a écrit (3.1.1) en 1687. A l'échelle du système solaire, on peut considérer la Terre comme un point de masse $m = 6.10^{24}\text{kg}$ à la position $q \in \mathbb{R}^3$ soumise à la force d'attraction gravitationnelle de la part du soleil (situé en $q = 0$) :

$$F(q) = -C \frac{u}{|q|^2}$$

avec $u = \frac{q}{|q|}$ vecteur unitaire et $C = \mathcal{G} \cdot m \cdot m_S$ avec la masse du soleil $m_S = 2.10^{30}\text{kg}$ et la constante de gravitation universelle $\mathcal{G} = 6,67.10^{-11}\text{N.m}^2.\text{kg}^{-2}$. Cette force dérive de

l'énergie potentielle

$$V(q) = -C \frac{1}{|q|}. \quad (3.2.1)$$

L'équation du mouvement obtenue est $\frac{d^2q}{dt^2} = \frac{1}{m}F(q) = -\mathcal{G} \cdot m_S \frac{u}{|q|^2}$. Remarquer que curieusement la masse de la Terre n'y intervient pas. Cela signifie que par exemple une poussière (ayant une autre masse) qui serait à la place de la Terre (même position et même vitesse) aurait la même trajectoire autour du Soleil. Cette remarque appelée « **principe d'équivalence** » a conduit Einstein à la théorie de la relativité où la gravitation n'est plus une force mais découle de la géométrie de l'espace temps.

De façon analogue mais à une toute autre échelle, dans un atome d'hydrogène, un électron de masse $m = 9,31 \cdot 10^{-31} \text{kg}$ est soumis à la « force de Coulomb » de la part du proton

$$F(q) = -C' \frac{u}{|q|^2}, \quad V(q) = -C' \frac{1}{|q|} \quad (3.2.2)$$

avec $C' = k_C q \cdot q$ où $q = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{C}$ est la charge élémentaire de l'électron et du proton et $k_C = 9 \cdot 10^9 \text{Nm}^2\text{C}^{-2}$ est la constante de Coulomb.

Dans ces deux problèmes, grâce à la forme particulière de $V(q)$, on peut résoudre exactement les équations du mouvement et obtenir que les trajectoires de la planète (respect. de l'électron) sont des ellipses (ou paraboles ou hyperboles selon la condition initiale). Voir [3] ou [18, TD6].

Exemple 3.2.2. « **Puits de potentiel, oscillateur Harmonique** ». A une dimension $d = 1$ on s'intéresse à une particule près d'un minimum local de l'énergie potentielle $V(q)$ que l'on suppose en $q = 0$ avec $V(0) = 0$. Par développement de Taylor, on écrit :

$$V(q) = \frac{1}{2}kq^2 + O(q^3)$$

avec $k = \frac{d^2V}{dq^2}(0) > 0$. En ne gardant que ce premier terme (comme première approximation) le Hamiltonien s'écrit :

$$H(q, p) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}kq^2 \quad (3.2.3)$$

et s'appelle le modèle de l'**oscillateur harmonique**. Les trajectoires sont des ellipses dans l'espace des phases¹, voir figure 3.2.1.

1. Avec le changement de variables $Q := \sqrt{\frac{k}{2}}q, P := \frac{p}{\sqrt{2m}}$ et posant $\omega := \sqrt{\frac{k}{m}}, Z = Q + iP$, (3.1.5) donne l'équation de mouvement $\frac{dZ}{dt} = -i\omega Z$ qui donne le mouvement de rotation $Z(t) = Z(0)e^{-i\omega t}$.

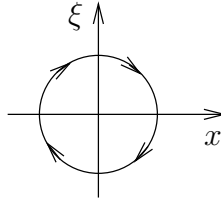


FIGURE 3.2.1 – Une trajectoire de l'oscillateur harmonique dans l'espace des phases. La position $q(t)$ et la vitesse $v(t) = \frac{1}{m}p(t)$ oscillent en quadrature.

3.3 Flot Hamiltonien et crochets de Poisson

Nous précisons quelques aspects de la dynamique Hamiltonienne qui seront utiles plus tard. Pour simplifier l'exposé, on supposera que pour toutes conditions initiales données $(q(0), p(0)) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ la solution $(q(t), p(t)) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ de (3.1.5) existe et est unique pour tout $t \in \mathbb{R}$ (Le théorème de Cauchy Lipschitz garantit cela localement en temps si V est Lipschitz).

Définition 3.3.1. Avec les notations précédentes le **flot Hamiltonien** est la famille d'applications pour $t \in \mathbb{R}$:

$$\phi^t : \begin{cases} \mathbb{R}^{2d} & \rightarrow \mathbb{R}^{2d} \\ (q(0), p(0)) & \rightarrow (q(t), p(t)) \end{cases} \quad (3.3.1)$$

définit par (2.2.3) :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \left(\frac{d\phi^t(x)}{dt} \right)_{t=0} = \mathcal{V}(x) \quad (3.3.2)$$

Voir figure 3.1.1.

Théorème 3.3.2 (de Liouville). . *Le flot Hamiltonien ϕ^t est **conservatif** : il préserve la forme volume $dqdp = \prod_j dq_j dp_j$ dans l'espace des phases \mathbb{R}^{2d} .*

Démonstration. D'après la proposition 2.2.4, il faut montrer que le champ de vecteur $\mathcal{V} = \left(\frac{\partial H}{\partial p_j}, -\frac{\partial H}{\partial q_j} \right)_j$ défini en (3.1.5) est de divergence nulle :

$$\operatorname{div}(\mathcal{V}) \stackrel{(52)}{=} \sum_j \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial H}{\partial p_j} \right) + \frac{\partial}{\partial p_j} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_j} \right) \stackrel{(3.1.5)}{=} 0.$$

Proposition 3.3.3. « **Conservation de l'énergie** ». *Si la fonction H est indépendante de t (c.à.d. H est seulement fonction de (q, p)) alors la valeur $E = H(q(t), p(t))$ appelée **énergie** est constante le long d'une trajectoire. La couche d'énergie $\Sigma_E := H^{-1}(E) \subset \mathbb{R}^{2d}$ est l'ensemble des points d'énergie E . C'est un ensemble (sous variété) de dimension $\dim \Sigma_E = 2d - 1$.*

On écrit :

$$\frac{dH(q(t), p(t))}{dt} = \left(\frac{\partial H}{\partial q} \right) \frac{dq}{dt} + \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right) \frac{dp}{dt} \stackrel{(3.1.5)}{=} \left(-\frac{dp}{dt} \right) \frac{dq}{dt} + \left(\frac{dq}{dt} \right) \frac{dp}{dt} = 0$$

□

Au lieu de considérer l'évolution d'un point $(q(t), p(t))$ sur l'espace des phases, nous verrons qu'il est naturel et instructif de considérer plus généralement l'évolution d'un nuage de points ou d'une distribution lisse de points, que l'on modélise par une distribution de probabilité $f(q, p) dq dp$ sur l'espace des phases où f est une fonction lisse appelée densité de probabilité. L'hypothèse que f est lisse revient à s'intéresser à presque tous les points, i.e. sauf à un sous ensemble de mesure nulle.

On rappelle la définition de l'opérateur de Liouville (ou Ruelle) donné en (2.2.7) pour un flot conservatif :

Définition 3.3.4. L'opérateur de Liouville exprime l'évolution d'une distribution de probabilité sur l'espace des phases au temps $t \in \mathbb{R}$:

$$(\mathcal{L}^t)^* : \begin{cases} C^\infty(\mathbb{R}^{2d}) & \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^{2d}) \\ f & \rightarrow (\mathcal{L}^t)^* f := f \circ \phi^{-t} \end{cases} \quad (3.3.3)$$

Remarquons que en utilisant le théorème 3.3.2 de Liouville, la probabilité totale est conservée :

$$\int ((\mathcal{L}^t)^* f) dq dp = \int (f \circ \phi^{-t}) dq dp = \int f dq dp$$

conformément à la proposition générale 2.1.10.

Proposition 3.3.5. Pour toute fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{2d})$ son évolution infinitésimale est donnée par

$$\frac{d((\mathcal{L}^t)^* f)}{dt} = \{H, f\} = -\mathcal{V}f \quad (3.3.4)$$

où

$$\{H, f\} := \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial f}{\partial q} \quad (3.3.5)$$

s'appelle le **crochet de Poisson** des fonctions H, f et

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_q(q) \frac{\partial}{\partial q} + \mathcal{V}_p(q) \frac{\partial}{\partial p} = \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right) \frac{\partial}{\partial q} - \left(\frac{\partial H}{\partial q} \right) \frac{\partial}{\partial p}$$

est l'opérateur champ de vecteur défini en (2.2.8).

Démonstration. On calcule

$$\begin{aligned}
 \frac{d((\mathcal{L}^t)^* f)}{dt} &\stackrel{(3.3.3)}{=} \frac{d(f \circ \phi^{-t})}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q} \frac{d(\phi^{-t})_q}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{d(\phi^{-t})_p}{dt} \\
 &\stackrel{(3.3.1)}{=} \frac{\partial f}{\partial q} \left(-\frac{dq}{dt} \right) + \frac{\partial f}{\partial p} \left(-\frac{dp}{dt} \right) \\
 &\stackrel{(3.1.5)}{=} \frac{\partial f}{\partial q} \left(-\frac{\partial H}{\partial p} \right) + \frac{\partial f}{\partial p} \left(-\left(-\frac{\partial H}{\partial q} \right) \right) = \{H, f\}
 \end{aligned}$$

□

Remarque 3.3.6. Le formalisme de la mécanique classique Hamiltonienne qui vient d'être esquissé possède une formulation en géométrie différentielle très intéressante et très utile appelée **géométrie symplectique**. Nous référons à [3][39, Sec1.14] pour une introduction proche de la physique et [7, 32, 25, 24] pour plus d'approfondissements. Le point de départ de cette approche est que les équations de Hamilton (3.1.5) sur \mathbb{R}^{2d} peuvent s'exprimer de façon géométrique, i.e. indépendamment du système de coordonnées, de la façon suivante. On introduit la deux forme $\omega := \sum_{j=1}^d dq^j \wedge dp^j$ sur \mathbb{R}^{2d} appelée **forme symplectique**. Alors le champ de vecteur de Hamilton \mathcal{V} est déterminé par l'équation

$$\omega(\mathcal{V}, \cdot) = dH \tag{3.3.6}$$

où dH est la différentielle de la fonction $H(q, p)$.

Démonstration. En coordonnées on note $\mathcal{V} = \sum_{j=1}^d \mathcal{V}_{q,j} \frac{\partial}{\partial q^j} + \mathcal{V}_{p,j} \frac{\partial}{\partial p^j}$. Alors d'une part $\omega(\mathcal{V}, \cdot) = \sum_j \mathcal{V}_{q,j} dp^j - \mathcal{V}_{p,j} dq^j$ et d'autre part $dH = \sum_j \frac{\partial H}{\partial p^j} dp^j + \frac{\partial H}{\partial q^j} dq^j$. L'identité (3.3.6) donne bien $\mathcal{V}_{q,j} = \frac{\partial H}{\partial p^j}$ et $-\mathcal{V}_{p,j} = \frac{\partial H}{\partial q^j}$ qui sont les équations de Hamilton (3.1.5). □

Cette formulation faisant intervenir la géométrie symplectique peut paraître surprenante. Elle laisse en fait soupçonner que la mécanique quantique ondulatoire est « cachée » derrière la mécanique classique. Nous verrons dans la section suivante avec le théorème d'Egorov que la mécanique classique s'obtient à partir de la mécanique quantique ondulatoire dans la limite des petites longueurs d'ondes ($\hbar \rightarrow 0$). Par ailleurs il y a une formulation géométrique de cette limite dans le cadre de la « quantification géométrique » [44] qui montre explicitement que la forme symplectique ω classique provient directement de la forme symplectique canonique sur le projectif $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ de l'espace de Hilbert quantique \mathcal{H} .

3.4 Particule libre dans l'espace Euclidien. Translation sur le tore et billards

Dans cette Section on discute le cas particulier d'un système qui ne subit aucune force extérieure. On dit qu'il est "**libre**". Techniquement, $F = 0$ donc d'après (3.1.2), $V(q) =$

cste, et on peut choisir cette constante nulle : $V(q) = 0, \forall q$. Ainsi (en prenant $m = 1$) on a le Hamiltonien $H(q, p) = \frac{1}{2} |p|^2$. Les équations de Hamilton (3.1.5) donnent

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = p, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} = 0. \quad (3.4.1)$$

La solution est

$$p(t) = p(0) = \text{cste}, \quad q(t) = p(0) \cdot t + q(0).$$

Il s'agit donc de **translation rectiligne et uniforme**.

3.4.1 Particule libre sur le cercle S^1 ou le tore \mathbb{T}^d

La position d'une particule sur le cercle est $q \in S^1 := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (i.e. défini modulo les entiers). L'espace des phases $(q, p) \in S^1 \times \mathbb{R}$ est un cylindre. Une particule libre se déplace sur le cercle S^1 à vitesse constante $p(0)$ qui dépend de la condition initiale :

$$p(t) = p(0) = p = \text{cste}, \quad q(t) = p \cdot t + q \text{ modulo } 1,$$

Le tore $\mathbb{T}^d = S^1 \times \dots \times S^1 = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ est un produit de d cercles, avec des coordonnées $(q_1, \dots, q_d) \in \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$. Pour une particule libre sur \mathbb{T}^d , on obtient de même le mouvement en ligne droite à vitesse constante

$$q(t) = pt + q \quad (3.4.2)$$

avec $p \in \mathbb{R}^d$. Voir figure 3.4.1.

Voici différentes situations physiques où il apparaît naturellement ce mouvement appelé "translation sur le tore" :

- Des tiges rigides attachées les unes à la suite des autres dans un plan, et chacune tourne à la vitesse angulaire $\omega_j = (p)_j$. Regardez **ce manège**!. Le résultat d'équidistribution ci-dessous permet de trouver la vitesse de rotation asymptotique de la position du point final $z(t) = \sum_{j=1}^d l_j e^{i\omega_j t}$ où l_j est la longueur de la tige j , voir [4, appendix 13].
- De façon plus importe (car plus fréquente) mais plus abstraite, lorsque l'on étudie au deuxième ordre, un système Hamiltonien avec d degrés de liberté près de son minimum d'énergie, le mouvement est décrit par d oscillateurs harmoniques indépendants de fréquences $(\omega_j)_{j=1, \dots, d}$. Le mouvement de chaque oscillateur est sur un cercle S^1 et celui du système est donc sur un tore \mathbb{T}^d selon (3.4.2) avec $\omega_j = (p)_j$.
- Pour un **système Hamiltonien intégrable** avec d constantes du mouvement, on montre (théorème d'Arnold Liouville) que le mouvement est une translation des "variables angles $\theta_j(t) \equiv 2\pi q_j(t)$ " selon (3.4.2) sur un tore \mathbb{T}^d dans l'espace des phases spécifié par les "variables actions $(I_j)_j$ " qui sont constantes. Voir [3], [18].

En dimension $d = 1$, il est clair que si $p \neq 0$, la trajectoire recouvre tout le cercle S^1 de façon uniforme. En dimension $d \geq 2$ on peut se demander qu'elle partie de l'espace \mathbb{T}^d occupe une trajectoire? voici un résultat. Avant cela, on dit que $p \in \mathbb{R}^d$ est un **vecteur**

3.4. PARTICULE LIBRE DANS L'ESPACE EUCLIDIEN. TRANSLATION SUR LE TORE ET BILLA

irrationnel si $p.k = 0, k \in \mathbb{Z}^d \Rightarrow k = 0$. En dimension $d = 2$, cela signifie que $\frac{(p)_1}{(p)_0} \notin \mathbb{Q}$ (pente irrationnelle). En dimension quelconque cela signifie que l'hyperplan $(p)^\perp := \{k \in \mathbb{Z}^d, p.k = 0\}$ n'intersecte le réseau \mathbb{Z}^d que en $k = 0$.

Proposition 3.4.1. (Théorème d'équidistribution de Kronecker-Weyl 1910) Si $p \in \mathbb{R}^d$ est un vecteur irrationnel alors le flot $q(t) = pt + q$ est dense sur le tore $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$ et même « **uniquement ergodique** » c'est à dire que pour toute fonction $u \in C^0(\mathbb{T}^d)$ et tout point initial $q \in \mathbb{T}^d$,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(q(t)) dt = \frac{1}{\text{Vol}(\mathbb{T}^d)} \int_{\mathbb{T}^d} u(q) dq \quad (3.4.3)$$

i.e. la moyenne temporelle de u sur une trajectoire très longue devient égale à sa moyenne spatiale.

De façon équivalente, (3.4.3) s'écrit avec l'opérateur de transfert $(\mathcal{L}^t u)(q) = u(q + tp)$, (2.2.5), l'opérateur de moyenne temporelle $\frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{L}^t dt$ et l'opérateur de moyenne spatiale $|1\rangle \langle \frac{1}{\text{Vol}(\mathbb{T}^d)} | \cdot \rangle_{L^2}$ (i.e. projecteur L^2 sur la fonction 1) de la façon suivante. On considère la différence :

$$D_T := \left(\left(\frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{L}^t dt \right) - |1\rangle \langle \frac{1}{\text{Vol}(\mathbb{T}^d)} | \cdot \rangle_{L^2} \right)$$

alors on a la **propriété d'unique ergodicité** :

$$\forall u \in C^0(\mathbb{T}^d), \forall q \in \mathbb{T}^d, (D_T u)(q) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0. \quad (3.4.4)$$

Remarque 3.4.2. La **propriété d'unique ergodicité** (3.4.4) implique :

$$\forall u, v \in C^0(\mathbb{T}^d), \langle v | D_T u \rangle \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$$

appelée **propriété d'ergodicité** et que l'on verra plus tard dans d'autres exemples.

Démonstration. Pour $k \in \mathbb{Z}^d$ on considère la fonction $\varphi_k(q) := \exp(i2\pi k.q)$ appelé **mode de Fourier**. D'après la théorie de Fourier on peut décomposer $u = \sum_k u_k \varphi_k$ avec les coefficients de Fourier $u_k = \int_{\mathbb{T}^d} \overline{\varphi_k(q)} u(q) dq$. Si $k \neq 0$ alors $k.p \neq 0$ et

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi_k(q(t)) dt &= \frac{1}{T} \int_0^T \exp(i2\pi k.(p.t + q)) dt \\ &= e^{i2\pi k.q} \frac{1}{T} \frac{1}{i2\pi k.p} [\exp(i2\pi k.pt)]_0^T \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Par ailleurs pour le mode $k = 0$, on a $\frac{1}{T} \int_0^T \varphi_0(q(t)) dt = 1$. Ainsi

$$\frac{1}{T} \int_0^T u(q(t)) dt = \sum_k u_k \frac{1}{T} \int_0^T \varphi_k(q(t)) dt \xrightarrow{T \rightarrow \infty} u_0 = \int_{\mathbb{T}^d} u(q) dq.$$

3.4. PARTICULE LIBRE DANS L'ESPACE EUCLIDIEN. TRANSLATION SUR LE TORE ET BILLA

Premier chiffre c	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre de pays	49	36	23	24	13	14	13	10	12
Proportion observée p_c	0,253	0,186	0,119	0,123	0,067	0,072	0,067	0,051	0,062

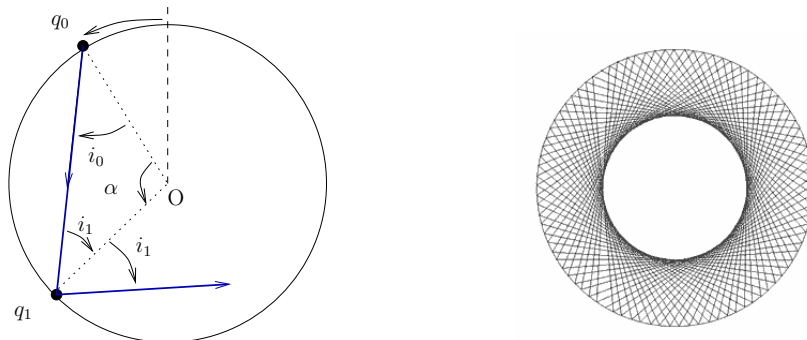
TABLE 3.1 – Répartition du premier chiffre significatif des effectifs de population de 194 pays du monde selon l'édition 2010 du CIA World Factbook

Montrer que dans cette suite $c_n : 1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, \dots$ un chiffre donné $c \in \{1, 2, 3 \dots 9\}$ apparaît avec la probabilité $p_c = \frac{\log(1+\frac{1}{c})}{\log 10}$, soit $p_1 = 30\%, p_2 = 17\%, \dots, p_9 = 4.5\%$. Plus précisément si $\kappa_t(c) := \frac{1}{t} \text{Card} \{n < t, c_n = c\}$ est la proportion de présence du chiffre c dans la séquence $\{c_0, c_1, \dots, c_{t-1}\}$, montrer que

$$\kappa_t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} p_c.$$

Aide : écrire $c_n 10^{r_n} \leq u_n < (c_n + 1) 10^{r_n}$ et prendre le log pour se ramener à une dynamique de translation de $\frac{\log 2}{\log 10}$ modulo 1. Montrer que $\frac{\log 2}{\log 10}$ est irrationnel. Montrer l'unique ergodicité de la dynamique.

Exercice 3.4.5. Billard circulaire. On considère un billard de bord circulaire (rayon 1). Une particule se déplace à vitesse constante dans le disque et rebondit de façon parfaite sur le bord. On note $q_0 \in [0, 2\pi]$ la position angulaire d'un point sur le bord, $i_0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ l'angle du vecteur vitesse par rapport à la normale. (q_0, i_0) détermine l'état initial d'une particule qui suit ensuite une trajectoire dans le billard.



1. L'état initial (q_0, i_0) sur le bord détermine la suite des rebonds caractérisés par $(q_t, i_t) \in [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ pour $t = 0, 1, 2, \dots$. Exprimer (q_t, i_t) à partir de (q_0, i_0) .
2. Tracer un exemple de trajectoire périodique (fermée) qui fait $m = 3$ rebonds en $n = 1$ tour autour du centre. Tracer un exemple de trajectoire périodique qui fait $m = 5$ rebonds en $n = 2$ tours autour du centre. Montrer plus généralement que une trajectoire est **périodique** si et seulement si $i_0 = \pi \frac{a}{b}$ où a, b sont des entiers premiers entre eux (on dit que $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ est **rationnel**). Exprimer le nombre m de rebonds et le nombre n de tours effectués en une période en fonction de a, b ? Quelle est la longueur L parcourue pour une trajectoire périodique, en fonction de m, n ?

3. Si I est un intervalle donné du bord et $i_1 = \pi x$ avec $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ **irrationnel**, on note $\kappa_t(I) \in [0, 1]$ la proportion de points $q_{t'}$ de la trajectoire avec $t' \in [0, t - 1]$, qui appartiennent à l'intervalle I :

$$\kappa_t(I) := \frac{1}{t} \# \{t' \in \{0, \dots, t - 1\}, \text{ t.q. } q_{t'} \in I\}.$$

Montrer que pour toute condition initiale q_0 , $\kappa_t(I)$ converge vers la longueur relative $|I| / (2\pi)$ de l'intervalle lorsque $t \rightarrow \infty$. On dit que la dynamique est **uniquement ergodique**. Aide : utiliser la fonction caractéristique l'intervalle $\chi_I(q) = 1$ si $q \in I$ et $\chi_I(q) = 0$ sinon. Observer que $\kappa_t(I) = \frac{1}{t} \sum_{t'=1}^t \chi_I(q_{t'})$ et que $|I| = \int \chi_I(q) dq$. Décomposer χ_I en séries de Fourier $\varphi_n(q) = \exp(inq)$.

4. Sans utiliser la question précédente, montrer que si $i = \pi x$ avec $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ **irrationnel** alors les points q_1, q_2, \dots de la trajectoire (non périodique) sont denses sur le bord (i.e. il n'y a pas d'intervalle du bord non touché). Aide : procéder par l'absurde en supposant qu'il y a un intervalle non touché. Retrouver ce résultat comme conséquence de la question précédente.

Solution : voir Section ?? page ??.

Exercice 3.4.6. Sur les nombres rationnels et irrationnels

Montrons que “les nombres rationnels sont exceptionnels parmi les réels”. Soit $x \in [0, 1]$ que l'on écrit en base deux $x = \sum_{k \geq 1} b_k 2^{-k} = [0, b_1 b_2 b_3 \dots]_{\text{base } 2}$ avec $b_k \in \{0, 1\}$.

1. Montrer que $x \in \mathbb{Q}$ si et seulement si la suite $(b_k)_{k \geq 1}$ est périodique à partir d'un certain rang.
2. Montrer que $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ est dénombrable, c'est à dire que l'on peut numéroter tous les éléments.
3. Montrer que $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$ est indénombrable (Cantor 1874 qui a montré l'existence de plusieurs “infinis”). Aide : procéder par l'absurde, faire une liste $m = 1, 2, \dots$ de $x^{(m)} = 0.b_1^{(m)} b_2^{(m)} \dots$ et considérer la diagonale $0.b_1^{(1)} b_2^{(2)} \dots$.

3.5 Particule libre sur une surface (ou espace courbe). Géodésiques

Si $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ est une surface lisse plongée dans l'espace Euclidien \mathbb{R}^3 , une particule de position $q(t) \in \mathcal{S}$ est dite libre de se déplacer sur la surface si la force qu'elle subit est normale à la surface (cette force est telle qu'elle impose à la particule de rester sur la surface). Autrement dit la force tangentielle est nulle, et d'après la loi de Newton, l'accélération tangentielle est nulle. Pour exprimer cela par une équation, on introduit $P_q : \mathbb{R}^3 \rightarrow T_q \mathcal{S}$ le projecteur orthogonal sur le plan tangent à la surface au point q et la vitesse $v = \frac{dq}{dt} \in \mathbb{R}^3$. L'accélération dans \mathbb{R}^3 est $\frac{dv}{dt}$ et donc l'accélération tangentielle est $P_q \frac{dv}{dt}$. La condition de particule libre sur la surface s'écrit donc :

$$P_q \frac{dv}{dt} = 0 \tag{3.5.1}$$

Voir figure 3.5.1(a).

En terme géométriques on note $\frac{Dv}{dt} = 0$ et $D := Pd$ s'appelle la **dérivée covariante** ou **connexion de Levi-Civita**. L'absence de force tangentielle fait que la particule va le plus « droit possible » en restant sur la surface. Par définition, on dit que sa trajectoire est une **géodésique**².

Par exemple sur la sphère $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ les géodésiques sont les grands cercles. Sur une surface plate (ou dans l'espace Euclidien \mathbb{R}^d), les géodésiques sont des droites. On peut montrer [39, p.52], [17], que

- L'équation (3.5.1) a une unique solution $q(t) \in \mathcal{S}$ qui de plus est solution des équations de Hamilton (3.1.5) avec le Hamiltonien $H(q, p) = \frac{1}{2} \|p\|_{T^*\mathcal{S}}^2$ d'une particule libre qui fait apparaître la norme du vecteur cotangent $p \in T_q^*\mathcal{S}$. Comme cette formulation est intrinsèque et géométrique (i.e. invariante par changement de coordonnées) elle s'adapte au cas des variétés Riemanniennes, i.e. variété où chaque espace (co-)tangent est muni d'un produit scalaire. L'espace des phases est ici le fibré cotangent $T^*\mathcal{S}$ qui est une variété de dimension $2\dim\mathcal{S} = 4$. Cette formulation intrinsèque a été utilisée par Einstein en relativité générale pour décrire les lignes d'univers de particules comme des géodésiques dans l'espace temps.
- [39, p.47] Si $A = q(0)$ et $B = q(t)$ sont deux points de la même géodésique alors parmi tous les chemins paramétrés $\gamma : t \rightarrow q(t)$ qui joignent A et B au temps t , la géodésique est un extremum local pour la « fonctionnelle énergie » $\mathcal{E}(\gamma) := \int_0^t \frac{1}{2} \left\| \frac{dq}{dt} \right\|^2 dt$ et pour la « fonctionnelle longueur » $l(\gamma) := \int_0^t \left\| \frac{dq}{dt} \right\| dt$ (noter que $l(\gamma)$ est indépendant du paramétrage).

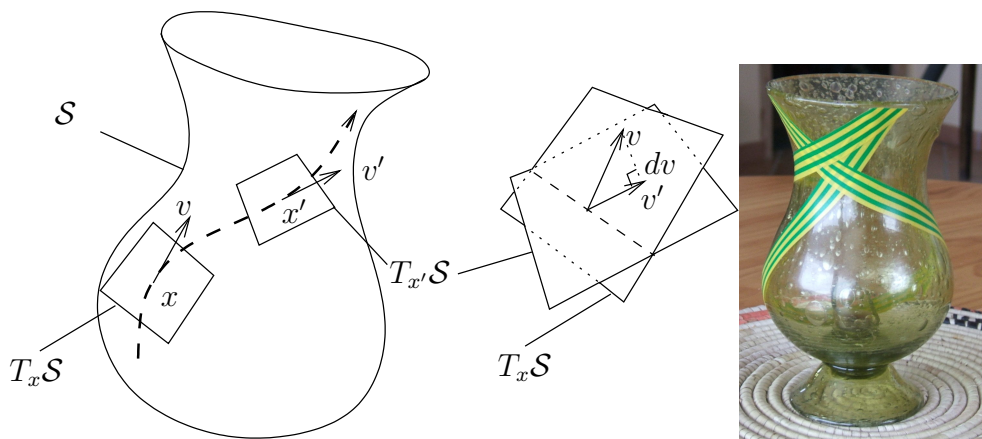


FIGURE 3.5.1 – (a) Géodésique sur une surface \mathcal{S} : le vecteur vitesse $v(t) = \frac{dq}{dt}$ est solution de $P_q \frac{dv}{dt} = 0$ où P_q est le projecteur orthogonal sur le plan tangent $T_q\mathcal{S}$ au point q . (b) En pratique une géodésique est obtenue en collant un ruban de scotch « de façon la plus plate possible », ici sur un vase ayant de la courbure de Gauss positive et négative.

2. Essayer de se convaincre et de démontrer que si l'on colle sans pli un ruban de scotch (étroit) sur une surface alors il suit une géodésique.

Flot géodésique, courbure de Gauss et chaos

La **courbure de Gauss** en un point $q \in \mathcal{S}$ de la surface est

$$\kappa(q) = \frac{1}{R_1(q) R_2(q)}$$

où $R_1(q)$, $R_2(q)$ sont les rayons de courbures extrémaux et avec la convention que $\kappa(q) > 0$ si les rayons sont du même côté et $\kappa(q) < 0$ si ils sont de côté opposé.

Considérons un point $q \in \mathcal{S}$ de la surface et le à la surface au point q . Si dans un voisinage du point q , la surface est d'un seul côté du plan tangent $T_q\mathcal{S}$, on dit que la courbure $\kappa(q) > 0$, sinon $\kappa(q) < 0$. Le **théorema Egregium** de Gauss montre que $\kappa(q)$ est une grandeur géométrique intrinsèque à la surface, car peut s'obtenir à partir de mesure de longueur sur la surface.

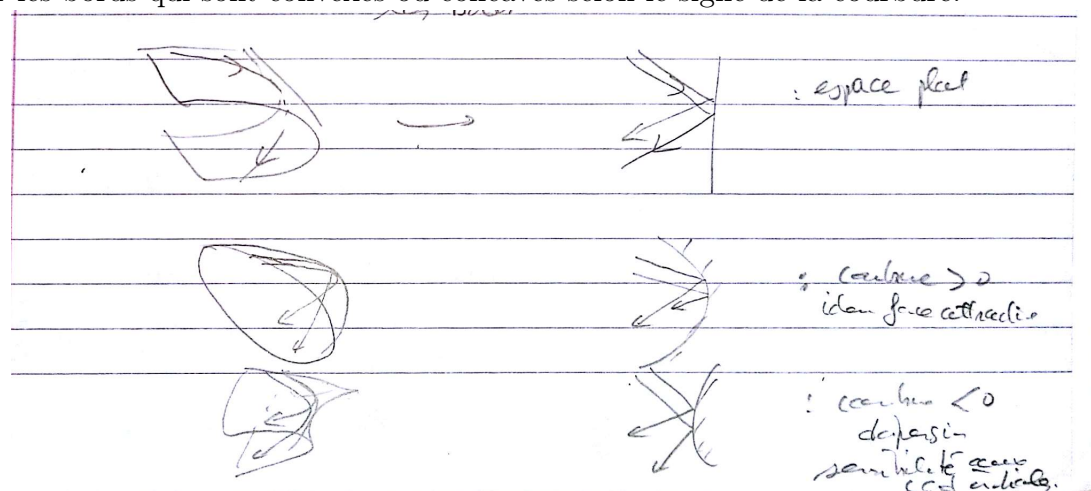
On observe que dans les régions de courbure positive, les trajectoires voisines ont un mouvement convergent l'une vers l'autre. Au contraire, un mouvement divergent dans les régions de courbure négative.

- Courbure $\kappa > 0 \Leftrightarrow$ force attractive, mouvement convergent.
- Courbure $\kappa < 0 \Leftrightarrow$ force répulsive, mouvement divergent, sensibilité aux conditions initiales, comportement chaotique des géodésiques.

En 1898, Hadamard a initié la théorie du chaos avec l'étude des géodésiques sur les surfaces à courbure négative constante (surfaces hyperboliques). Il apparait que si la courbure de Gauss de la surface est négative alors les trajectoires voisines « se dispersent », il y a sensibilité aux conditions initiales. Malgré son aspect un peu « abstrait », le flot géodésique sur les surfaces (ou variété) à courbure négative s'étudie bien et constitue donc un modèle d'étude privilégié.

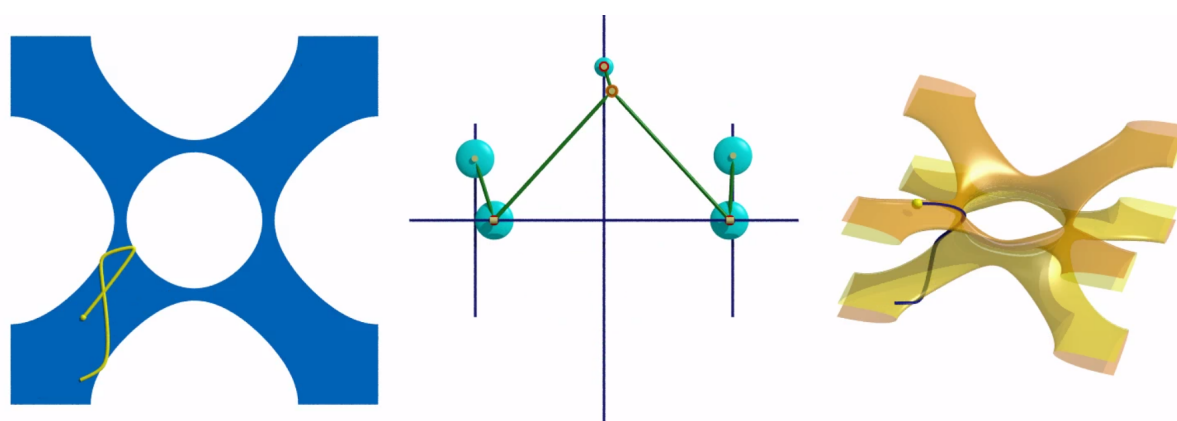
3.5.1 Du flot géodésique au billard

Si on applatit la surface, on obtient un billard. La courbure de la surface est concentrée sur les bords qui sont convexes ou concaves selon le signe de la courbure.



Exemple :

Voici un exemple intéressant de système mécanique libre fait de tiges (“linkages”), étudié par Mikael Kourganoff dans sa thèse. Dans le cas idéal sans frottement, il montre que le mouvement libre du système mécanique (image du centre) est équivalent au mouvement d’une particule libre sur une surface dans \mathbb{R}^3 (en jaune, image de droite, elle suit les géodésiques de la surfaces), et que ce flot est sensible aux conditions initiales”, plus précisément Anosov. Il montre que lorsque la masse de la boule centrale tends vers 0, alors la surface de droite s’aplatit et vu du haut, la dynamique converge vers la dynamique dans un billard dispersif (en bleu, image de gauche).



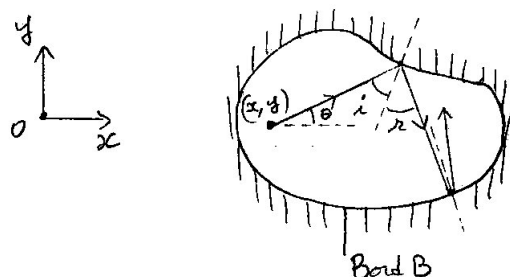
Voici une vidéo de ce système.

3.6 Billards

Le billard est une autre situation où on étudie une particule “libre”, i.e. sans force extérieure dans l’espace Euclidien (sauf sur les bords qui concentrent de la courbure).

Dans le plan \mathbb{R}^2 horizontal avec les coordonnées $q = (q_1, q_2)$ on considère une courbe fermée B qui est le bord du billard. Dans le billard, une particule ponctuelle de masse m se déplace en ligne droite à vitesse constante (on suppose qu’il n’y a pas de frottements) et elle rebondit parfaitement sur le bord B (angle de réflexion = angle d’incidence et la norme de la vitesse est conservée).

La question est de prédire la trajectoire $q(t)$ suivit par la particule.



Description en terme de forces et de Hamiltonien

- Dans le billard, la particule subit aucune force dans le plan horizontal, donc $0 = F(q) = -\text{grad}(V(q))$ donc l'énergie potentielle est $V(q) = \text{cste} = 0$ (on peut choisir la constante nulle). Le Hamiltonien est donc seulement constitué de l'énergie cinétique :

$$E = H(q, p) = \frac{1}{2}m \left\| \frac{dq}{dt} \right\|^2 = \frac{\|p\|^2}{2m} = \frac{1}{2m} (p_1^2 + p_2^2)$$

avec le vecteur impulsion $p = m \frac{dq}{dt} = (p_1, p_2)$.

- La conservation de l'énergie E implique que la norme de la vitesse $\left\| \frac{dq}{dt} \right\| = \sqrt{\frac{2E}{m}}$ est constante. Donc à une énergie donnée E , les variables qui peuvent évoluer sont les trois variables (q_1, q_2, θ) où θ est la direction de la vitesse (et de p). La **couche d'énergie** $\Sigma_E = H^{-1}(E)$ est donc de dimension $2d - 1 = 4 - 1 = 3$.
- Dans le billard, le mouvement entre deux rebonds est une translation rectiligne et uniforme. En effet l'équation de Newton $\frac{dp}{dt} = F = 0$ (ou l'équation de Hamilton $\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} = 0$) implique que $p = m \frac{dq}{dt}$ est constant.

Intérêt en physique Le modèle du billard parfait est un problème très simplifié, mais qui peut servir à décrire des particules piégées dans des cavités, par exemple

- des molécules dans un volume (modèle du gaz parfait sans interactions mutuelles)
- des électrons libres dans un conducteur métallique,
- des neutrons et protons dans le noyau nucléaire,
- des rayons lumineux dans une cavité aux parois réfléchissantes,
- des ondes (acoustiques, électromagnétiques, sismiques) dans des cavités ou dans des guides d'ondes.

Section de Poincaré

Pour simplifier l'étude des trajectoires dans cet espace $\Sigma_E = H^{-1}(E)$ de dimension trois on introduit la notion importante de Section de Poincaré.

A chaque rebond de la bille sur le bord B , on note \tilde{q} l'**abscisse curviligne** (comptée à partir d'un point du bord de référence), et i l'**angle entre la normale au bord et la**

vitesse. On note

$$\tilde{p} := \sin(i) \in]-1, 1[$$

La suite des rebonds définit une suite :

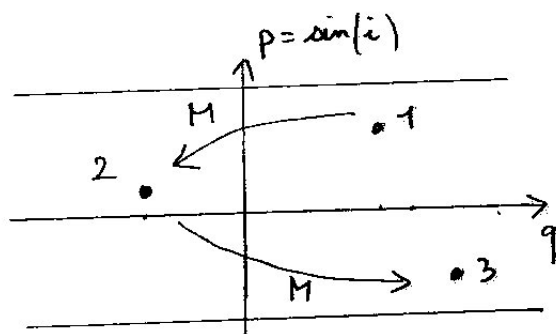
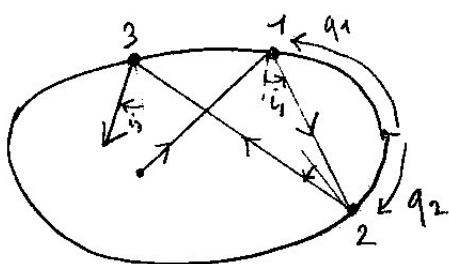
$$(\tilde{q}_1, \tilde{p}_1) \rightarrow (\tilde{q}_2, \tilde{p}_2) \rightarrow (\tilde{q}_3, \tilde{p}_3) \dots$$

qui est une trajectoire discrète. Il est clair graphiquement que la connaissance d'un seul couple $(\tilde{q}_j, \tilde{p}_j)$ détermine la suite entière. On note

$$M : (\tilde{q}_j, \tilde{p}_j) \rightarrow (\tilde{q}_{j+1}, \tilde{p}_{j+1})$$

appelée **application de Poincaré**.

C'est une dynamique discrète sur un **espace de dimension 2**, appelé **Section de Poincaré**.



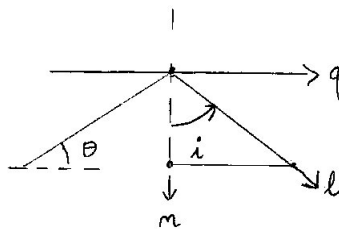
On a l'analogie du **Théorème de Liouville** :

Proposition 3.6.1. *L'application de Poincaré conserve l'élément d'aire $d\tilde{q}d\tilde{p}$.*

Démonstration. Voici 2 preuves différentes. On verra une 3eme preuve en exercice 3.6.5. Preuve 1 : ([28, p.340]). Un état dans le billard a les coordonnées (q_1, q_2, θ) (θ : direction de la vitesse), et les équations du mouvement sont $\dot{\theta} = 0, \dot{q}_1 = V \cos \theta, \dot{q}_2 = V \sin \theta$ qui est un champ de vecteur de divergence nulle ($\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_{q_1}}{\partial q_1} + \frac{\partial V_{q_2}}{\partial q_2} = 0$) donc préserve l'élément de volume $d\mu = dq_1 dq_2 d\theta$. Au bord du billard, pour un rebond, si on utilise les coordonnées (\tilde{q}, n, i) où \tilde{q} est le long du bord, n normale au bord et i est l'angle d'incidence, on a $d\mu = dq_1 dq_2 d\theta = d\tilde{q} dn di$ (car on a effectué une rotation). Si l est la coordonnée le long de la trajectoire, alors $dn = \cos(i) dl$ et avec $\tilde{p} = \sin(i)$ on a

$$d\mu = d\tilde{q} dn di = d\tilde{q} \cos(i) dl di = d\tilde{q} d\tilde{p} dl$$

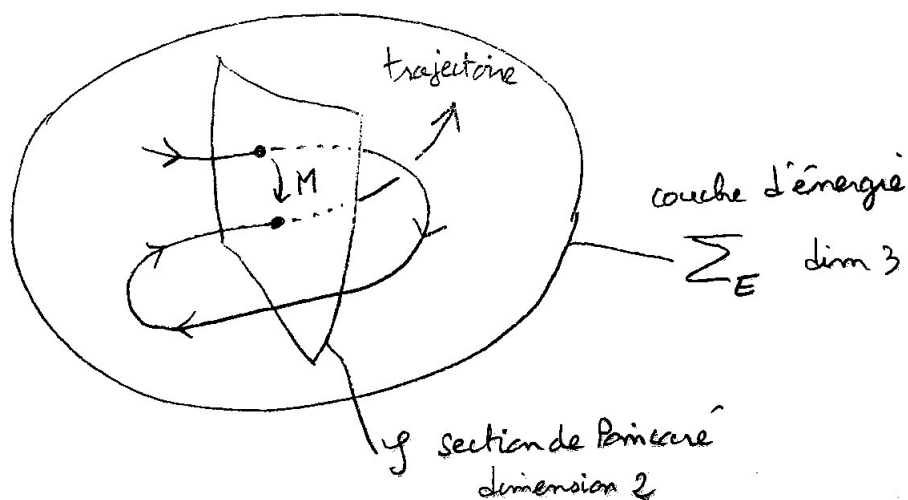
qui est préservé. dl est préservé donc $d\tilde{q}d\tilde{p}$ est préservée. □



Démonstration. Preuve 2 plus simple, mais qui utilise la dérivée extérieure ([38] p.4) : Notons $D(\tilde{q}_j, \tilde{q}_{j+1})$ la distance entre les rebonds. On vérifie sur un schéma que $\frac{\partial D}{\partial \tilde{q}_{j+1}} = -\sin(i_{j+1}) = -\tilde{p}_{j+1}$, $\frac{\partial D}{\partial \tilde{q}_j} = \tilde{p}_j$. Donc la différentielle est $dD = \frac{\partial D}{\partial \tilde{q}_j} d\tilde{q}_j + \frac{\partial D}{\partial \tilde{q}_{j+1}} d\tilde{q}_{j+1} = \tilde{p}_j d\tilde{q}_j - \tilde{p}_{j+1} d\tilde{q}_{j+1}$. Et $0 = ddD = d\tilde{p}_j \wedge d\tilde{q}_j - d\tilde{p}_{j+1} \wedge d\tilde{q}_{j+1}$, soit $d\tilde{p}_{j+1} \wedge d\tilde{q}_{j+1} = d\tilde{p}_j \wedge d\tilde{q}_j$. \square

Généralisation :

- On a vu que la couche d'énergie Σ_E est de dimension 3. Les trajectoires sont des courbes de dimension 1 qui évoluent dans la couche d'énergie Σ_E qui est de dimension 3. La section de Poincaré \mathcal{S} est comme une surface de dimension 2 imaginaire, fixe dans cet espace Σ_E , et chaque fois que la trajectoire traverse \mathcal{S} l'intersection donne un point, de coordonnées (\tilde{q}, \tilde{p}) ici. Voir figure.
- La section de Poincaré se généralise de la façon suivante pour un système Hamiltonien indépendant du temps : pour d degrés de liberté, l'espace de phase $\mathcal{P} = \mathbb{R}^{2d}$ est de dimension $2d$. La couche d'énergie Σ_E est de dimension $2d - 1$. Comme une trajectoire évoluant dans Σ_E est de dimension 1, la **section de Poincaré** \mathcal{S} doit être un sous espace de dimension $\dim(\Sigma_E) - 1 = 2d - 2$. L'**application de Poincaré** $M : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ est l'application qui à une intersection fait correspondre l'intersection suivante. On peut montrer (même preuve que ci-dessus) que M préserve le volume sur \mathcal{S} .



Voir Exercice 3.4.5 sur la dynamique dans un billard circulaire.

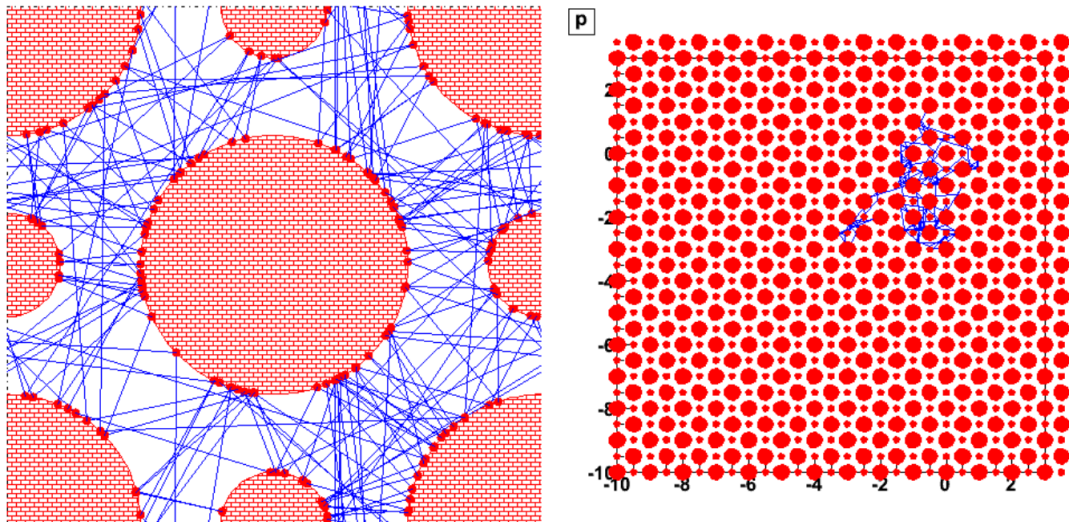
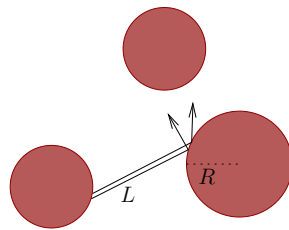


FIGURE 3.6.1 – En bleu, une trajectoire dans le billard de Sinai (tore \mathbb{T}^2 avec des obstacles convexes circulaires). Sur le recouvrement \mathbb{R}^2 , la trajectoire semble suivre une marche aléatoire.

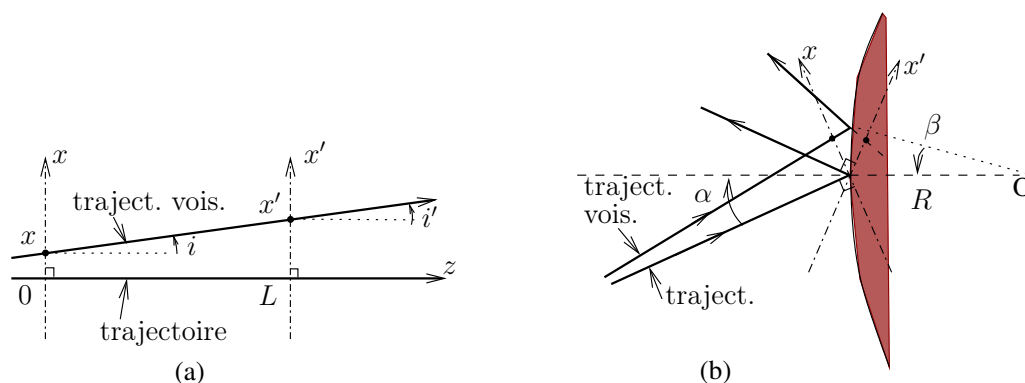
Exercice 3.6.2. Hyperbolicité d'un billard dispersif.

Le but du problème est de montrer que la dynamique d'une particule dans un billard à obstacles convexes (par exemple des disques) est « complètement chaotique » au sens précis : « **sensibilité aux conditions initiales** » ou plus précisément « uniformément hyperbolique ». Un tel billard est appelé « billard dispersif » ou “billard de Sinai”. Voir simulations numériques.

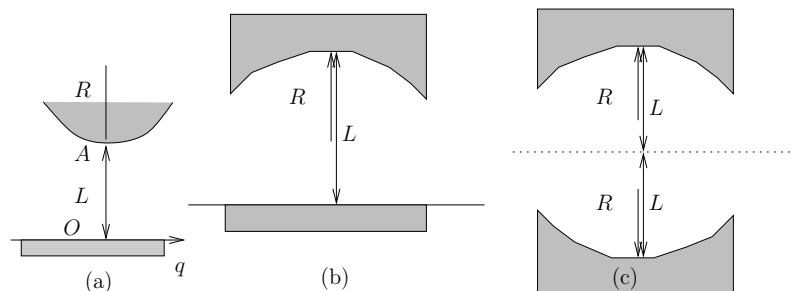


Pour montrer cela on remarque que la dynamique dans un billard plan est une succession de propagations en ligne droite et de réflexions sur des obstacles.

1. Traitons d'abord la propagation, voir figure (a). On considère une trajectoire de référence (c'est l'axe z) et on note x l'axe orthogonal, qui sert de section de Poincaré : une trajectoire voisine coupe l'axe x à la position x et avec un angle i . On supposera $x, i \ll 1$. Après une longueur L donnée, exprimer les nouvelles valeurs (x', i') en fonction de (x, i) sous forme matricielle (cad au premier ordre).



2. On considère maintenant la réflexion avec un angle d'incidence α sur une paroi ayant un rayon de courbure R au point de réflexion, voir figure (b). Avec les mêmes définitions de (x, i) que précédemment, montrer qu'au point de réflexion, au premier ordre, on a
$$\begin{pmatrix} x' \\ i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{R \cos \alpha} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ i \end{pmatrix}.$$
3. On souhaite étudier la **stabilité de la trajectoire périodique verticale** OA dans le billard sur le schéma (a) suivant. On appelle $L = OA$ et $R > 0$ le rayon de courbure de la partie supérieure. Noter que $R < 0$ signifierait une courbure dans l'autre sens (i.e. obstacle concave, figures (b), (c)).



Avec les notations précédentes, montrer que

$$\begin{pmatrix} x' \\ i' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ i \end{pmatrix}$$

avec une matrice M que l'on exprimera à partir de R, L . Calculer les valeurs propres³ de la matrice M et déduire la stabilité de l'orbite périodique OA .

4. Dans les billards (b) et (c) où $R < 0$, déduire la stabilité de l'orbite périodique verticale selon les valeurs de $L/|R|$. Remarques : avec des miroirs, ces géométries sont utilisées dans des cavités optiques Laser par exemple.

3. Aide : si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est une matrice avec $T = \text{Tr}(M) > 2$ et $\text{Det}(M) = 1$ alors ses valeurs propres sont $\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(T \pm \sqrt{T^2 - 4})$. On observe que $|\lambda_+| > 1$ si $T > 2$ ou $T < -2$. On dit alors que la matrice est hyperbolique. On a $\lambda_- = 1/\lambda_+$.

5. Pour une propagation de longueur L suivie d'une réflexion (comme sur la figure 6.1.2), déduire que la matrice qui transforme (x, i) en (x', i') en fonction de $L, R, \cos \alpha$ est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & L \\ \frac{2}{R \cos \alpha} & \frac{2L}{R \cos \alpha} + 1 \end{pmatrix}. \quad (3.6.1)$$

Pour un **billard dispersif**, trouver les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice M (3.6.1) et déduire qu'il y a une **instabilité uniforme** de la dynamique.

Exercice 3.6.3. "Application de $SL(2, \mathbb{R})$ ". Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice réelle qui représente une application de Poincaré linéaire dans le plan (q, p) ayant $(0, 0)$ comme point fixe (= point d'équilibre). La conservation de l'aire $dqdp$ est équivalente à la condition $\text{Det}(M) = ad - cb = 1$ que l'on supposera. (On dit que $M \in SL(2, \mathbb{R})$). Soit $T = \text{Tr}(M) = a + d$ la trace de la matrice. Montrer que

1. Si $|T| > 2$ alors on peut écrire $M = PDP^{-1}$ (qui s'interprète comme un changement de base) où $D = \pm \begin{pmatrix} e^\lambda & 0 \\ 0 & e^{-\lambda} \end{pmatrix}$ est diagonale contenant les valeurs propres et $\lambda = \log \left(\frac{T + \sqrt{T^2 - 4}}{2} \right) > 0$ appelé **coefficient de Lyapounov**. Chaque trajectoire $(q_n, p_n) = M^n(q_0, p_0)$ est sur une hyperbole. Les vecteurs propres donnent les directions instable et stable. Déduire que le point $(0, 0)$ est instable. On dit que la matrice est **hyperbolique**.
2. Si $-2 < T < 2$ alors $M = PDP^{-1}$ avec $D = \pm \begin{pmatrix} e^{i\omega} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega} \end{pmatrix}$ et la fréquence $\omega = \arg \left(\frac{T + i\sqrt{4 - T^2}}{2} \right)$. On dit que la matrice est **elliptique**.
3. Si $|T| = 2$ alors $M = PDP^{-1}$, avec $D = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $D = \pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On dit que la matrice est **parabolique**. Que dire de la stabilité de $(0, 0)$?

Exercice 3.6.4. Etude de l'instabilité d'une trajectoire :

On peut étudier l'instabilité d'une trajectoire particulière, qui est la trajectoire périodique horizontale, voir figure 3.6.2. Calculer l'application linéarisée de l'application de Poincaré M le long de la trajectoire périodique instable horizontale, après deux rebonds.

Aide : calculer la différentielle de l'application $(\tilde{q}_0, \tilde{p}_0) \rightarrow (\tilde{q}_1, \tilde{p}_1) = M(\tilde{q}_0, \tilde{p}_0)$ au point $\tilde{q}_0 = 0, \tilde{p}_0 = \sin(i_0) = 0$. Montrer que la matrice obtenue est de la forme :

$$DM_0 = \begin{pmatrix} \cosh \lambda & \frac{1}{c} \sinh \lambda \\ c \sinh \lambda & \cosh \lambda \end{pmatrix} \quad (3.6.2)$$

avec $c > 0$, $\lambda > 0$ que l'on relie à la géométrie de la cavité (demi-grand axe a et rayon de courbure R). On a $\det(DM_0) = 1$, et $\text{Trace}(DM_0) = 2 \cosh \lambda > 2$. C'est une matrice hyperbolique, dont les valeurs propres sont $e^\lambda > 1$, $e^{-\lambda} < 1$.

Solution : $\cosh \lambda = 1 - \frac{2a}{R}$ et $c = \frac{1}{\sqrt{a(a-R)}}$.

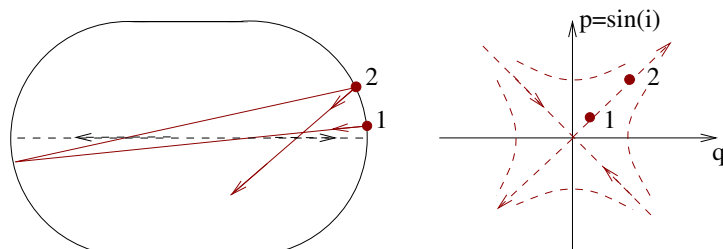


FIGURE 3.6.2 – Section de Poincaré de la trajectoire horizontale instable au voisinage de $\tilde{q} \simeq 0$, $\tilde{p} = \sin i \simeq 0$.

Noter que l'espace de la section de Poincaré (\tilde{q}, \tilde{p}) est compact, et donc l'étirement exponentiel observé dans l'approximation linéaire ne continue pas à l'infini. Nous verrons qu'il y a étirement et repliement de la dynamique sur la section de Poincaré, et cela permet d'expliquer le chaos, observé sur la figure 3.6.3, avec une trajectoire.

Si on lance un paquet concentré de plusieurs billes, dans un billard chaotique, très rapidement les billes se dispersent et remplissent uniformément la cavité. C'est une autre manifestation du chaos.

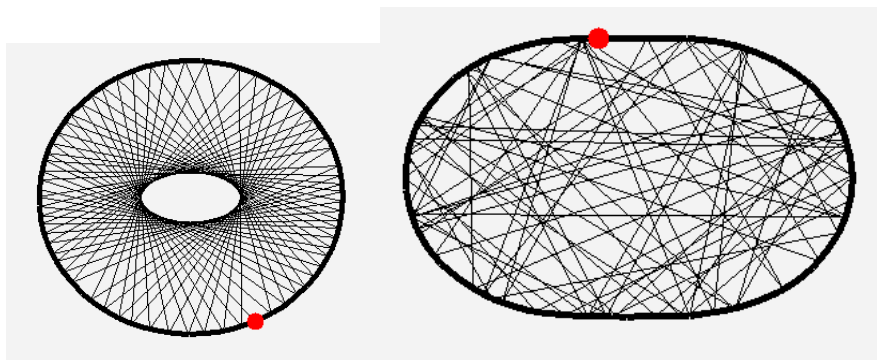
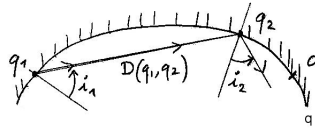


FIGURE 3.6.3 – Trajectoire dans un billard régulier (proche d'une ellipse) ou chaotique.

Exercice 3.6.5. Fonction génératrice d'un billard. Dans un billard, on considère les points de rebonds d'une trajectoire sur le bord. Pour un point de rebond, on note \tilde{q} son abscisse curviligne (à partir d'une référence $\tilde{q} = 0$), i l'angle de réflexion et $\tilde{p} = \sin(i)$. Si $(\tilde{q}_1, \tilde{p}_1)$ et $(\tilde{q}_2, \tilde{p}_2)$ caractérisent deux rebonds successifs d'une trajectoire, on note $D(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)$ la longueur du segment entre les deux rebonds.



1. Montrer (graphiquement) que $\frac{\partial D(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)}{\partial \tilde{q}_2} = \tilde{p}_2$, $\frac{\partial D(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)}{\partial \tilde{q}_1} = -\tilde{p}_1$. On dit que $D(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)$ est une **fonction génératrice**.
2. Soient \tilde{q}_1, \tilde{q}_3 l'abscisse curviligne de deux points fixés sur le bord, et soit \tilde{q}_2 un point quelconque sur le bord. Montrer que la suite $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3$ correspond aux rebonds d'une vraie trajectoire si et seulement si la distance $\mathcal{D}(\tilde{q}_2) = D(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2) + D(\tilde{q}_2, \tilde{q}_3)$ est extrémale par rapport à \tilde{q}_2 . (Utiliser (1)).
3. On définit les fonctions Q, P par $\tilde{q}_2 = Q(\tilde{q}_1, \tilde{p}_1)$ et $\tilde{p}_2 = P(\tilde{q}_1, \tilde{p}_1)$. On note $\tilde{D}(\tilde{q}_1, \tilde{p}_1) := D(\tilde{q}_1, Q(\tilde{q}_1, \tilde{p}_1))$ qui est la longueur du segment après le rebond $(\tilde{q}_1, \tilde{p}_1)$. En calculant $\frac{\partial^2 \tilde{D}}{\partial \tilde{q}_1 \partial \tilde{p}_1}$ et $\frac{\partial^2 \tilde{D}}{\partial \tilde{p}_1 \partial \tilde{q}_1}$ montrer que

$$1 = \frac{\partial Q}{\partial \tilde{q}_1} \frac{\partial P}{\partial \tilde{p}_1} - \frac{\partial Q}{\partial \tilde{p}_1} \frac{\partial P}{\partial \tilde{q}_1}$$

Montrer que cela s'interprète comme le fait que l'élément d'aire $d\tilde{q}_2 d\tilde{p}_2 = d\tilde{q}_1 d\tilde{p}_1$ est conservé entre chaque rebond.

3.7 Apparition du chaos dans un billard circulaire déformé

On peut voir des vidéos associées à ce qui suit sur ce [site](#).

Dans cette Section on décrit et observe un système particulier : une famille de billards dont la forme peut varier entre un cercle, la dynamique sera très simple, et un ovale, la dynamique sera chaotique. Cet exemple montre en fait le scénario général “d'apparition du chaos” que l'on peut observer lorsque l'on perturbe un système intégrable en mécanique Hamiltonienne avec $d = 2$ degrés de liberté (la couche d'énergie est de dimension $2d - 1 = 3$).

On soulève deux questions

1. “**Paradoxe de la flèche du temps**”. Comment expliquer la contradiction apparente entre
 - (a) Les lois physiques, qui sont **réversibles** (ex : bille dans un billard)
 - (b) et la **disymétrie passé/futur** des phénomènes physiques ?
2. “**Paradoxe du chaos déterministe**”. On observe parfois du chaos (= imprévisibilité) avec des lois déterministes. **Comment peut il y avoir des lois déterministes donnant un mouvement chaotique (imprévisible) ?**

3.7.1 Modèle étudié

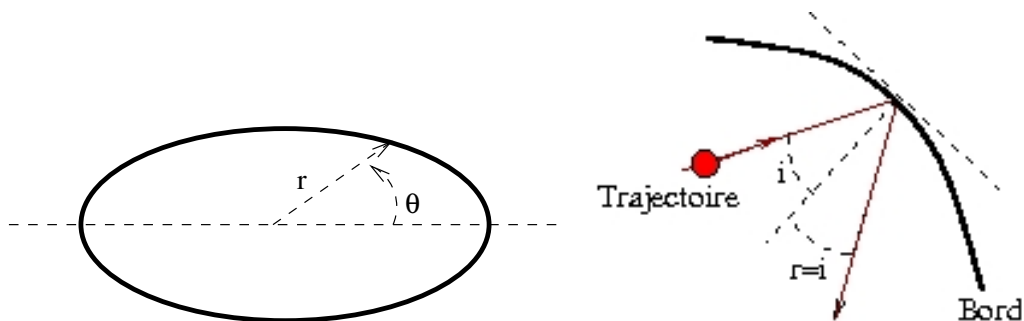
Forme du billard On choisit une forme très simple de billard qui dépend d'un paramètre de déformation :

$$0 \leq a < 1 : \text{paramètre de déformation}$$

Dans le plan $(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$, en coordonnée polaire (r, θ) définies par $q_1 = r \cos \theta$, $q_2 = r \sin \theta$ le bord du billard est la courbe :

$$r(\theta) = 1 + a \cos(4\pi\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi[.$$

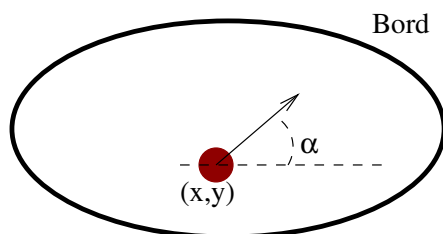
On rappelle que dans le billard, une trajectoire est une ligne droite à vitesse constante et qu'il y a réflexion parfaite sur le bord :



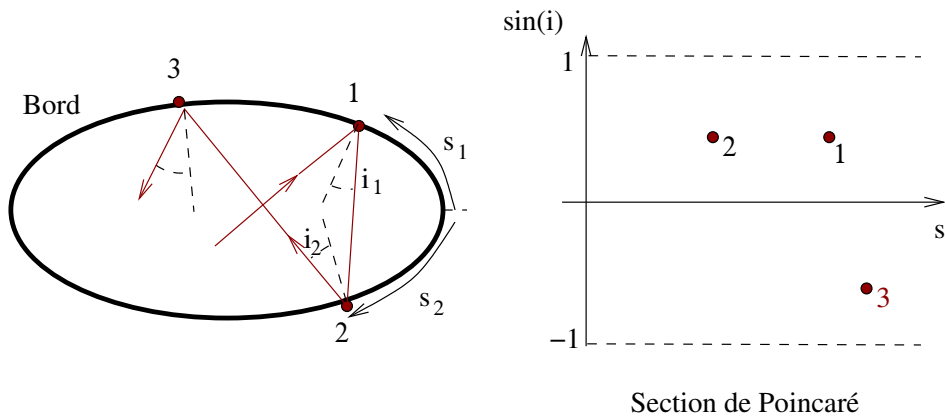
Espace des états

Voir Section 3.6. On a vu que

- Le billard est un **système déterministe** avec $d = 2$ degrés de liberté (q_1, q_2) .
- L'état d'une bille est caractérisé par son état : position (q_1, q_2) et vitesse (v_{q_1}, v_{q_2}) (ou impulsion (p_1, p_2)).
- Mais l'énergie est conservée donc la vitesse $v = \sqrt{v_{q_1}^2 + v_{q_2}^2}$ est fixée. En fait un état est caractérisé par seulement **trois paramètres libres** (q_1, q_2, α) , où α est la direction de la vitesse :



Section de Poincaré Pour simplifier la description, on considère seulement à chaque rebond, la suite des **états** : (position curviligne s , angle i)



Ainsi une **trajectoire** est codée par la suite de ces valeurs aux rebonds : $(s_1, \sin(i_1)), (s_2, \sin(i_2)), (s_3, \sin(i_3))$.
 Cela forme une **dynamique discrète déterministe** et de **dimension 2**. (qui conserve l'aire $dsd\tilde{p}$ avec $p = \sin i$)

3.7.2 Billard circulaire ($a = 0$)

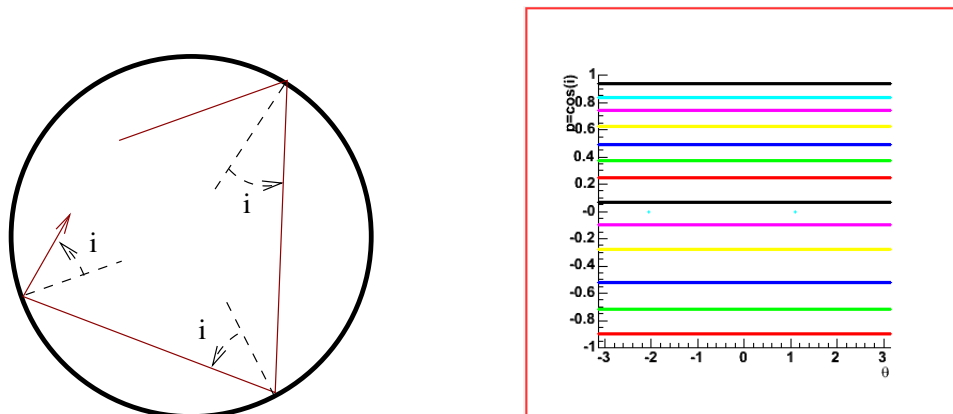
Avec le paramètre $a = 0$, le billard est circulaire. Pour une trajectoire, l'angle i est conservé (donc $\tilde{p} = \sin i$ conservé) et la position évolue selon la loi de translation :

$$\tilde{q}_{t+1} = \tilde{q} + \tilde{p} \text{ modulo } 2\pi.$$

Par conséquent sur la section de Poincaré chaque trajectoire se situe sur la ligne $\tilde{p} = \sin i$.

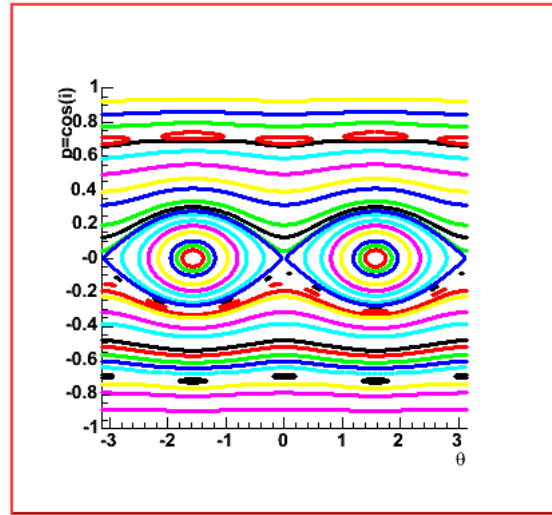
- On montre (voir TD) que si $\tilde{p}/\pi = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ est rationnel alors la trajectoire est périodique, faisant a tours et b rebonds.
- Si $\tilde{p}/\pi \notin \mathbb{Q}$ est irrationnel (ce qui arrive avec probabilité 1) alors la trajectoire remplit de façon dense la ligne horizontale \tilde{p} .
- Remarquer que dans l'espace des phases (q_1, q_2, p_1, p_2) de dimension 4, une telle trajectoire est située sur un tore \mathbb{T}^2 est la trajectoire est une translation de pente irrationnelle, come étudiée en (3.4.2).

Le comportement de chaque trajectoire est donc prévisible, on dit que la dynamique est **régulière** (non chaotique).



3.7.3 Billard légèrement déformé ($a = 0.02$)

Voici le dessin numérique de la Section de Poincaré si $a = 0.02$. Chaque couleur est pour une trajectoire différente.

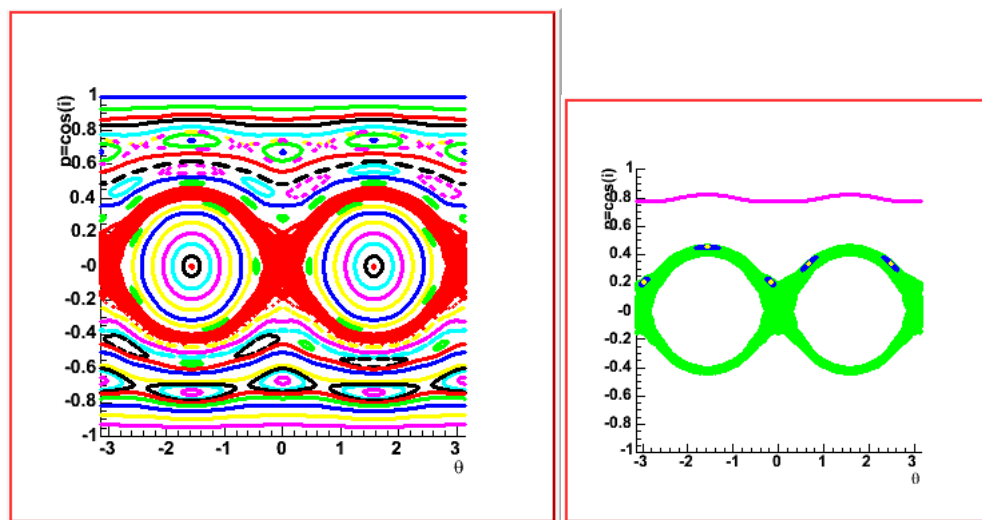


En $\tilde{p} = \sin i = 0$ on voit **deux points fixes stables** et **deux points fixes instables** (hyperboliques). Ils correspondent respectivement aux trajectoires verticales et horizontales dans le billard. (Voir vidéos)

- Si on met un nuage de particules de petite taille (afin de traduire notre méconnaissance de l'état initial) sur la trajectoire stable (verticale), ce nuage reste confiné. Le mouvement est donc régulier et prévisible.
- Si on met un nuage de particules sur la trajectoire stable (verticale), initialement, ce nuage s'étale exponentiellement vite à un rythme exponentiel :

$$L(t) = \lambda^t L(0), \quad \lambda > 1 : \text{Coef. d'expansion}$$

Cette forte **sensibilité aux conditions initiales** implique une **imprévisibilité** de la trajectoire. Mais cette trajectoire est une exception dans l'espace des phases, le nuage ne se répand pas dans tout l'espace de phase, seulement sur une courbe. On ne parle pas encore de système chaotique.

3.7.4 Billard plus déformé ($a = 0.05$)

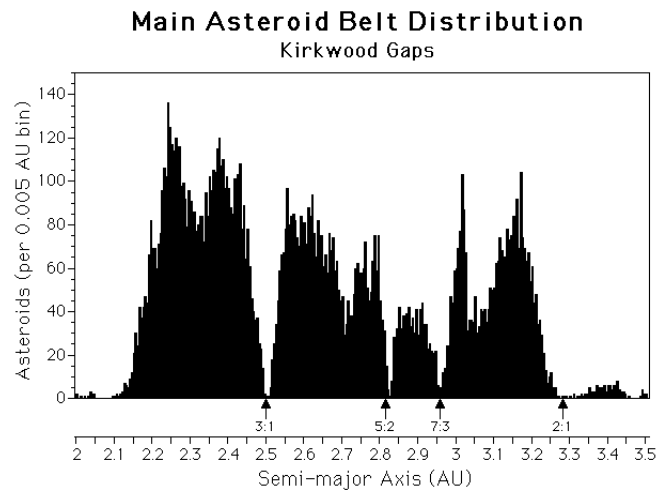
Structure très riche observée sur la Section de Poincaré :

- Elargissement de la zone instable (en rouge). On dit que c'est une “**zone chaotique**”.
- Ilots de résonances :
 - Un peu partout, il apparaît des “**ilots de résonance**” (qui sont issues des trajectoires périodiques $\tilde{p} = \pi \frac{a}{b}$ du cas circulaire). Par exemple pour la **résonance 5 : :2** = 5 impacts pour 2 tours.
 - Comme il y a une infinité de rapports entiers $p :: q$, les ilots de résonances forment une **structure fractale**
 - Entre chaque ilot il y a une orbite instable, qui donnera naissance à du chaos.
- Courbes invariantes :
 - Certaines trajectoires sont encore confinées sur des courbes. Le **théorème KAM**, montre l'existence de ces courbes et qu'elles occupent un espace de mesure non nulle, et qu'elles proviennent en effet de lignes $\tilde{p} = \text{cste}$ du cas circulaire avec \tilde{p}/π “très irrationnel” (par exemple le nombre d'or donnera une courbe qui persiste à une forte perturbation). Dans l'espace des phases du billard, ces courbes forment des tores. On parle de “**tore KAM**”.

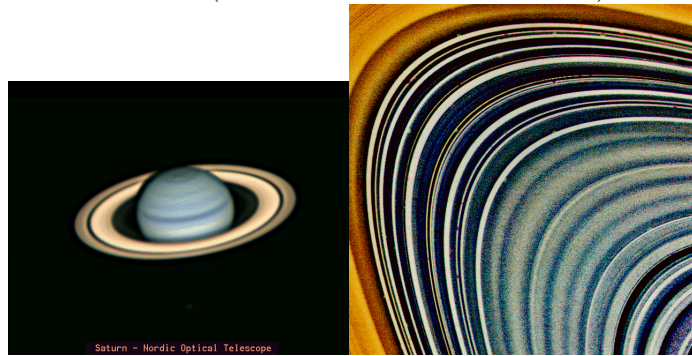
Cette structure très riche observée ici dans un billard circulaire légèrement déformé est en fait très générale dans les systèmes mécaniques proches d'une situation intégrable “**Théorie KAM**”. Voir **KAM theory**. Voici un exemple observé dans la mécanique céleste du système solaire, qui est proche d'un système intégrable (problème à 2 corps) :

Des résonances dans le système solaire :

- Gaps observés dans la répartition des millions d'astéroïdes situés entre Mars et Jupiter : **gaps de Kirkwood (1866)** si période T telle que $T = \frac{p}{q} T_{\text{Jupiter}}$ (À cause des instabilités voisines, ils subissent des chocs et se font éjecter).

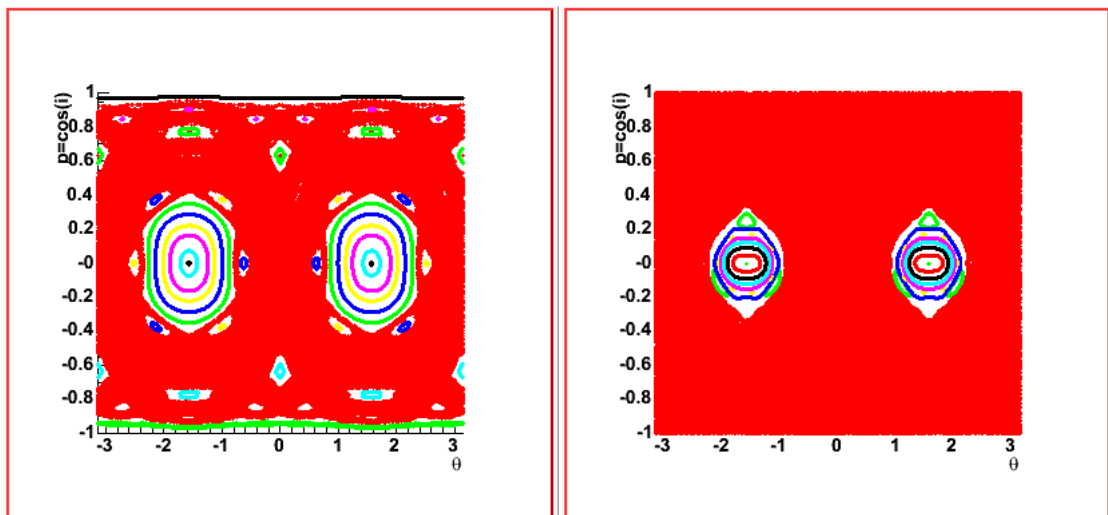


- Gaps dans les **anneaux de Saturne** : les cailloux de période $T = \frac{p}{q}T_{Titan}$ vont être éjectés à cause des instabilités (chocs avec d'autres cailloux).



- Satellites d'Uranus prédits à partir de gaps observés dans les anneaux

3.7.5 Billard déformé ($a = 0.1 - 0.2$)



Observations :

- Les instabilités se sont rejoint en une vaste “**zone chaotique**”.
- Il subsiste des **ilots de régularité**.
- Dans une simulation numérique, le nuage de conditions initiales **s’étire et se replie** indéfiniment, donc **se mélange, comme la pate feuilletée du boulanger** ; montré par **Poincaré 1885**.
 - Chaque trajectoire est instable. La trajectoire d’une bille est **imprévisible au delà d’une date τ** : si imprécision initiale L_0 , alors $L(\tau) = \lambda^\tau L_0 = 1$ pour $\tau = \log(1/L_0) / \log \lambda$ qui est très court.
 - Le nuage de particules converge vers une **distribution d’équilibre** indépendante de la distribution initiale. L’information fuit vers l’infiniment petit. Il y a **augmentation du désordre, de l’entropie**. Pour décrire l’évolution, on doit utiliser non **plus des lois déterministes** mais des **lois probabilistes**, sur l’ensemble chaotique. (Birkhoff , Arnold, Moser, ... 60’, Ruelle,... 80’)

Cette observation résout le paradoxe du chaos déterministe.

Du chaos dans le système solaire :

- Exemple : Hypérion, satellite de Saturne qui a une “forme de cacahuète” et une rotation propre chaotique,

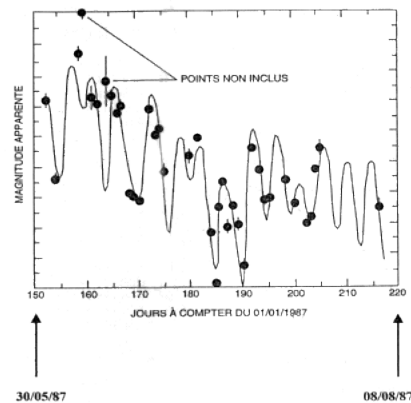
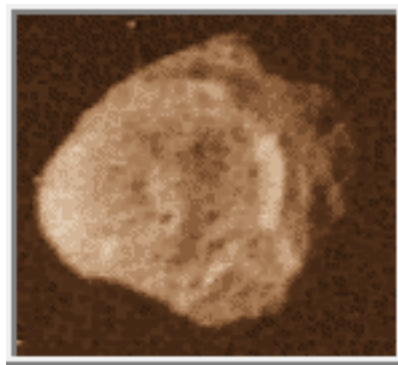


Figure 12 : variations aléatoires observées dans la luminosité d’Hypérion.

- Des études récentes en astronomie (J. Laskar) montrent que sur une échelle de temps de l’ordre de $\tau = 40$ Millions d’années, les **trajectoires des planètes (Venus, Terre, Mars,...) sont chaotiques**, mais dans des intervalles de distance planète-Soleil, qui ne se rencontrent pas. Cela explique qu’il n’y a pas eu de collisions (sauf au début du système solaire).
- La climat terrestre (périodes glaciaires) dépend fortement de la trajectoire de la terre, et est donc chaotique sur une grande échelle de temps.

Ce même système solaire est remarquablement régulier sur des périodes plus courtes, et est à l’origine du développement des sciences chez l’homme (?).

3.8 Exemples de perturbation de modèles intégrables, apparition du chaos Hamiltonien, avec $d = 2$ degrés de liberté

Dans cette Section on discute de modèles de dynamique Hamiltonienne avec $d = 2$ degrés de liberté, i.e. $q = (q_1, q_2)$, $p = (p_1, p_2)$ et avec $H(q, p)$ indépendant du temps. Par conséquent l'énergie est conservée, les trajectoires sont sur la couche d'énergie $\Sigma_E = H^{-1}(E) \subset \mathbb{R}^4$ qui est de dimension $2d - 1 = 3$.

Une Section de Poincaré donnera une dynamique discrète sur une surface de dimension $(2d - 1) - 1 = 2$. L'application de Poincaré est conservative (comme le flot Hamiltonien) et préserve donc l'aire de la surface.

On considère une famille de modèles dépendant d'un paramètre $a \in \mathbb{R}$ (ou $K \in \mathbb{R}$) et on suppose que pour $a = 0$, le système est intégrable, c'est à dire qu'il y a une grandeur conservée en plus de l'énergie. (Par exemple l'angle $\tilde{p} = \sin i$ dans le cas du billard circulaire). Dans cette situation intégrable, les trajectoires sont sur des tores (rationnels ou irrationnels).

Ensuite en faisant $a \neq 0$, on étudie la perturbation de cette situation intégrable et régulière pour observer comme dans l'exemple du billard :

- Les tores rationnels disparaissent pour laisser place à des îlots elliptiques entourés de “zones chaotiques”. Ces îlots forment une structure en fractale. Dans les zones chaotiques il y a phénomène de étirement et repliement. Cela est la cause du chaos (imprévisibilité).
- Les tores très irrationnels persistent à la perturbation. (Théorème KAM). Dans la Section de Poincaré ils apparaissent sous forme de courbes.

3.8.1 L'application standard (“standard map”)

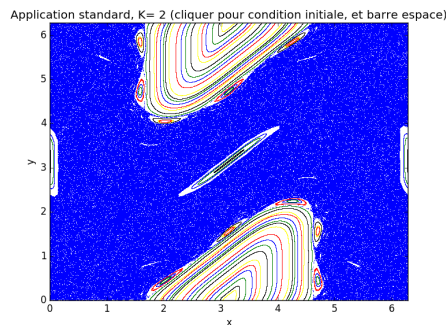
C'est un “modèle jouet” Pour l'application de Poincaré discutée ci-dessus. C'est le modèle le plus simple que l'on puisse écrire et qui est donc sujet à de nombreux travaux théoriques et mathématiques.

On considère $(x_1(t), x_2(t)) \in [0, 2\pi]^2$ qui dépend du temps discret $t \in \mathbb{Z}$ et qui satisfait l'équation de récurrence $(x_1(t+1), x_2(t+1)) = \phi(x_1(t), x_2(t))$,

$$\phi : \begin{cases} x_2(t+1) &= x_2(t) + K \sin(x_1(t)) \text{ modulo } 2\pi \\ x_1(t+1) &= x_1(t) + x_2(t+1) \text{ modulo } 2\pi \end{cases} \quad (3.8.1)$$

avec le paramètre $K \in \mathbb{R}$. On appelle (3.8.1) l'application standard. Il est clair que pour $K = 0$, la quantité $x_2(t)$ est constante et $x_1(t)$ subit une rotation sur S^1 d'angle x_2 .

3.8. EXEMPLES DE PERTURBATION DE MODÈLES INTÉGRABLES, APPARITION DU CHAOS



Voir le site [Travaux pratiques](#).

3.8.2 Le pendule magnétique

Étudié en TP.

Un pendule sans frottement dans \mathbb{R}^3 dans le champ de pesanteur est un système dynamique Hamiltonien avec $d = 2$ degrés de liberté. Si il y a symmétrie de révolution, le moment angulaire est conservé et le système est intégrable.

On suppose le pendule aimanté et on rajoute trois aimants en triangle dans un plan horizontal sous le pendule, jusqu'à ce que la position verticale immobile soit une position d'équilibre instable. Le paramètre de perturbation est la distance des aimants (ou force des aimants).

3.8.3 Le problème à trois corps réduit

Ce problème a une grande importance historique, étudié par Poincaré.

On suppose deux étoile en formation binaire (orbites de Kepler) et une petite planète qui subit la force de ces deux étoiles. En retour, la planète légère n'influence pas les étoiles. Pour cela on dit que c'est le problème à trois corps réduit.

La planète peut être en orbite très proche d'une des deux étoiles. Sa trajectoire sera alors proche d'une ellipse de Kepler. Le paramètre de perturbation et d'apparition du chaos est par exemple la distance à une des deux étoiles.

Chapitre 4

Dynamique probabiliste de Markov

On introduit dans ce chapitre des concepts de dynamique probabiliste sur les graphes à nombre N fini de sommets. L'espace vectoriel est donc de dimension finie N . Dans un chapitre ultérieur, cela nous servira pour introduire une approche probabiliste au "chaos déterministe". Une difficulté technique sera que l'espace fonctionnel sera de dimension infinie.

4.1 Définitions et propriétés générales

4.1.1 Loi d'évolution sur un graphe

On considère $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_{j,i})_{j,i=1\dots N} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, une **matrice** à coefficients réels positifs ou nuls.

À chaque instant $t \in \mathbb{Z}$ (le temps est discret), un vecteur

$$u(t) = (u_i(t))_{i=1\dots N} \in \mathbb{R}^N$$

où chaque composante $u_i(t)$ représente (par exemple) une quantité ou probabilité de présence au sommet i , à l'instant t .

La loi d'évolution (dynamique) de ce vecteur est :

$$\forall i \in \{1 \dots N\}, \forall t \in \mathbb{Z}, \quad u_j(t+1) = \sum_{i=1}^N \mathcal{L}_{j,i} u_i(t).$$

On peut écrire

$$u(t+1) = \mathcal{L}u(t).$$

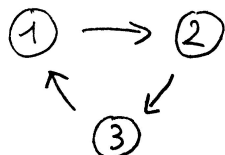
À la matrice \mathcal{L} on associe un **graphe** dont les sommets sont $i \in \{1, \dots, N\}$ et pour chaque élément $\mathcal{L}_{i,j} \neq 0$ il y a une arête orientée $i \rightarrow j$.

4.1.2 Exemples et quelques questions

Exemple 4.1.1. La matrice

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

correspond au graphe à $N = 3$ sommet suivant



qui modélise 3 états notés $i = 1, 2, 3$ et la loi d'évolution déterministe :

$$1 \rightarrow 2$$

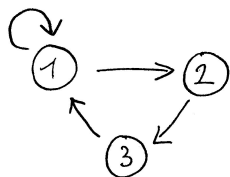
$$2 \rightarrow 3$$

$$3 \rightarrow 1$$

Exemple 4.1.2. La matrice

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

correspond au graphe à $N = 3$ sommet suivant :



qui modélise 3 états notés $i = 1, 2, 3$ et la loi d'évolution probabiliste

$$1 \rightarrow 1 \text{ ou } 2 \text{ avec même probabilité } 1/2,$$

$$2 \rightarrow 3$$

$$3 \rightarrow 1$$

Sur les deux exemples précédents on se pose les questions suivantes.

Question 4.1.3. Partant du site i à l'instant $t = 0$, quelle est la probabilité $p_{i \rightarrow j}(t)$ pour que le système soit sur le site j à l'instant t , calculer $p_{1 \rightarrow 2}(5)$?

Solution 4.1.4. Pour l'exemple 2, $\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on calcule¹

$$\mathcal{L}^5 = \begin{pmatrix} \frac{13}{32} & \frac{5}{8} & \frac{9}{16} \\ \frac{9}{32} & \frac{1}{8} & \frac{16}{5} \\ \frac{5}{16} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Si $u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ décrit une distribution initiale sur le site 1, alors $u(t) = \mathcal{L}^t u(0)$ est

la distribution de probabilité évoluée au temps t . Si $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ décrit l'observable sur le site 2 et donc

$$p_{1 \rightarrow 2}(5) = \langle v | u(5) \rangle = (\mathcal{L}^5)_{2,1} = \frac{9}{32} \simeq 0.28$$

Plus généralement

$$p_{i \rightarrow j}(t) = (\mathcal{L}^t)_{j,i}$$

Question 4.1.5. Partant du site $i = 1$ à l'instant $t = 0$ combien y a-t-il de chemins différents $\mathcal{N}_{i \rightarrow j}(t)$ qui mènent en $j = 2$ à l'instant $t = 5$?

Solution 4.1.6. Pour l'exemple 2, on considère la matrice d'adjacence définie comme suit :

Définition 4.1.7. La **matrice d'adjacence** \mathcal{L} du graphe a les éléments de matrice

$$\mathcal{L}_{j,i} = 1 \text{ si la transition } i \rightarrow j \text{ est permise et } \mathcal{L}_{j,i} = 0 \text{ sinon.} \quad (4.1.1)$$

Ici :

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On calcule :

$$\mathcal{L}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}^4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}^5 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La réponse vient de la proposition suivante :

1. par exemple avec `xcas`

Proposition 4.1.8. Dans un graphe dont \mathcal{L} est la matrice d'adjacence, le nombre de chemins différents $\mathcal{N}_{i \rightarrow j}(t)$ qui mènent de i à j au temps t est donné par :

$$\mathcal{N}_{i \rightarrow j}(t) = (\mathcal{L}^t)_{j,i}$$

Démonstration. En effet d'après la formule de produit de matrices on a :

$$(\mathcal{L}^t)_{j,i} = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_{t-1}} \mathcal{L}_{j, k_{t-1}} \cdot \mathcal{L}_{k_{t-1}, k_{t-2}} \cdots \mathcal{L}_{k_1, i}$$

et un terme de la somme est $\mathcal{L}_{j, k_{t-1}} \cdot \mathcal{L}_{k_{t-1}, k_{t-2}} \cdots \mathcal{L}_{k_1, i} = 1$ (respect. 0) si et seulement le chemin $i \rightarrow k_1 \rightarrow k_2 \rightarrow \dots \rightarrow k_{t-1} \rightarrow j$ est possible sur le graphe (respect. pas possible). Donc cette formule donne bien $\mathcal{N}_{i \rightarrow j}(t)$. \square

En particulier ici

$$\mathcal{N}_{1 \rightarrow 1}(5) = (\mathcal{L}^5)_{2,1} = 3 \text{ chemins}$$

Question 4.1.9. Après "longtemps" sur quel site i se trouve le système ? avec quelle probabilité ? est-ce dépendant de l'état initial ? et si il y a une formule estimer la précision ?

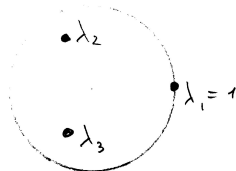
Pour l'exemple 2, la matrice $\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable². Voir appendice

A.1.1 pour la diagonalisation de Matrice que l'on utilise ici.

$$\mathcal{L} = ADA^{-1}, \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

avec les valeurs propres

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = -\frac{1}{4} \pm i \frac{\sqrt{7}}{4}, \quad |\lambda_{2,3}| \simeq 0.707 < 1$$



2. utiliser le logiciel `xcas` par exemple.

et les vecteurs propres (à droite) qui sont les vecteurs colonnes de A :

$$A = (U_1, U_2, U_3), \quad U_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

normalisé de sorte que $\sum_k (U_j)_k = 1$. Les vecteurs lignes de A^{-1} sont aussi importants (appelés vecteurs propres à gauche de la matrice \mathcal{L}) et notés :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}, \quad V_1 = (1, 1, 1)$$

normalisés de sorte que

$$V_j(U_k) = \delta_{j,k}$$

Le projecteur spectral Π_j sur la valeur propre simple λ_j est alors (en notation de Dirac)

$$\Pi_j = |U_j\rangle\langle V_j|$$

On a donc

$$\mathcal{L}^t = |U_1\rangle\langle V_1| + O(|\lambda_2|^t)$$

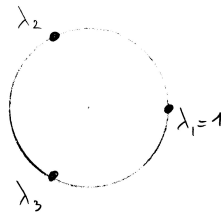
Si au départ le système est dans l'état $i = 1$, on décrit cela par la distribution de probabilité

$$u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Alors la distribution de probabilité au temps } t \text{ est}$$

$$\begin{aligned} u(t) &= \mathcal{L}^t u(0) \\ &= |U_1\rangle\langle V_1|u(0)\rangle + O(|\lambda_2|^t) \\ &= U_1 + O(|\lambda_2|^t) \end{aligned}$$

La réponse est donc que après “longtemps” le système est décrit par la distribution de probabilité U_1 , appelée **état d'équilibre**. L'erreur décroît $O(|\lambda_2|^t) \simeq (0.7)^t$ donc exponentiellement vite. Et cette “convergence vers l'équilibre” est indépendante de l'état initial.

Pour le graphe de l'exemple 1, $\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, le spectre est :



Il n'y a pas convergence vers un état d'équilibre.

4.1.3 Matrices positives, ergodiques, mélangeantes

Définition 4.1.10. Une matrice \mathcal{L} , de taille $m \times m$ est **positive** si chaque élément

$$\mathcal{L}_{j,i} \geq 0, \quad \forall i, j. \quad (4.1.2)$$

On notera $\mathcal{L} \geq 0$. De même on notera $\mathcal{L} > 0$ (strictement positive) si $\mathcal{L}_{j,i} > 0, \forall i, j$.

On peut représenter la matrice \mathcal{L} par un **graphe** avec m sommets et si $\mathcal{L}_{j,i} > 0$ on met une arête $i \rightarrow j$ avec le poids $\mathcal{L}_{j,i}$.

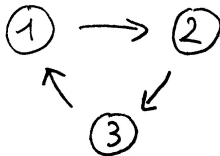
Remarque 4.1.11. En mathématique (en théorie spectrale) il y a une autre définition différente pour dire qu'une matrice \mathcal{L} est « positive » et que nous ne considérons pas ici : si $\operatorname{Re}(\langle u | \mathcal{L} u \rangle) \geq 0, \forall u$. Cela implique que le spectre de \mathcal{L} est sur le domaine $\operatorname{Re}(z) \geq 0$. Les deux définitions n'ont rien à voir entre elles.

Définition 4.1.12. Une matrice \mathcal{L} positive est **ergodique** (ou **irréductible**) si

$$\forall i, j, \quad \exists t \geq 1, \quad (\mathcal{L}^t)_{j,i} > 0$$

Cela signifie que dans le graphe il y a un chemin allant de i à j (au temps t).

Exemple 4.1.13. La matrice d'adjacence du graphe (voir définition (4.1.1)),

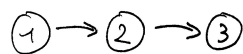


est

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Elle est ergodique.

Exemple 4.1.14. Au contraire, pour le graphe :



la matrice d'adjacence est :

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et n'est pas ergodique.

Définition 4.1.15. Une matrice \mathcal{L} positive est **mélangeante** (ou **primitive**) si

$$\exists t \geq 1, \quad \forall i, j, \quad (\mathcal{L}^t)_{j,i} > 0$$

Cela signifie qu'il existe un temps t pour lequel tout couple de points i, j est relié par un chemin de longueur t .

Remarque 4.1.16. On a les propriétés immédiates :

- \mathcal{L} mélangeante $\implies \mathcal{L}$ ergodique.
- \mathcal{L} mélangeante avec $\mathcal{L}^t > 0 \implies \mathcal{L}^{t+m} > 0$ pour tout $m \geq 0$.

Exemple 4.1.17. Voici des exemples simples :

- $\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas mélangeante car $(\mathcal{L}^t)_{1,2} = 0$ pour tout t multiple de 3 .
- $\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est mélangeante car $\mathcal{L}^4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} > 0$.

Le théorème suivant est le résultat principal de ce chapitre. Nous conseillons de lire la section [A.1.1](#) sur la diagonalisation de matrice avant. On note $(\lambda_j)_j$ les valeurs propres, ordonnées de sorte que $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \dots$

Théorème 4.1.18. de Perron Frobenius ». Si \mathcal{L} est une matrice **positive** et **ergodique**, alors \mathcal{L} a une valeur propre réelle positive $\lambda_1 > 0$ simple (i.e. non dégénérée) qui est **dominante** au sens où les autres valeurs propres λ_j vérifient $|\lambda_j| \leq \lambda_1, \forall j \geq 2$. Le vecteur propre U_1 associé à λ_1 a ses composantes strictement positives et est appelé **état d'équilibre** :

$$\mathcal{L}U_1 = \lambda_1 U_1, \quad U_1 = (u_i)_i, \quad u_i > 0, \forall i \in \{1, \dots, N\}.$$

Si de plus \mathcal{L} est **mélangeante** alors λ_1 est **strictement dominante** c'est à dire que $|\lambda_j| < \lambda_1$ pour $j \geq 2$. Donc

$$\|\mathcal{L}^t - \lambda_1 \Pi_1^t\| = O(|\lambda_2|^t)$$

où $\|\cdot\|$ est une norme (arbitraire) sur les matrices et $\Pi_1 = |U_1\rangle\langle V_1|$ est le projecteur spectral pour la valeur propre λ_1 sur l'état d'équilibre.

Démonstration. (*) (ref : Brin [6, p.78], Davies [11, p.355]).

1. Soit

$$S_1^+ := \left\{ u \in \mathbb{R}^m, \quad \sum_{j=1}^m u_j = 1 \text{ et } \forall j, u_j \geq 0 \right\}$$

qui est le « simplexe des mesures de probabilités ». Soit

$$f : \begin{cases} S_1^+ & \rightarrow S_1^+ \\ u & \rightarrow [\mathcal{L}u] := \frac{\mathcal{L}u}{\|\mathcal{L}u\|_1} \end{cases}$$

f laisse S_1^+ invariant donc d'après le **théorème de Brouwer** f admet un point fixe :

$$\exists u \in S_1^+, \quad f(u) = u$$

Cela implique qu'il existe $\lambda_1 > 0$ tel que

$$\mathcal{L}u = \lambda_1 u$$

Si \mathcal{L} est mélangeante alors $u \in \text{Int}(S_1^+)$ donc $u_j > 0, \forall j$.

2. Soit

$$\tilde{\mathcal{L}} := \frac{1}{\lambda} (\text{Diag}(u))^{-1} \circ \mathcal{L} \circ \text{Diag}(u)$$

alors

$$\tilde{\mathcal{L}}\mathbf{1} = \mathbf{1}$$

donc $\tilde{\mathcal{L}}^*$ préserve S_1^+ . D'après le **théorème de Brouwer**

$$\exists w \in S_1^+, \quad w_j > 0, \forall j, \quad \text{t.q. } \tilde{\mathcal{L}}^* w = w$$

Soit

$$\mathcal{D} := (S_1^+ - w) \subset S_0$$

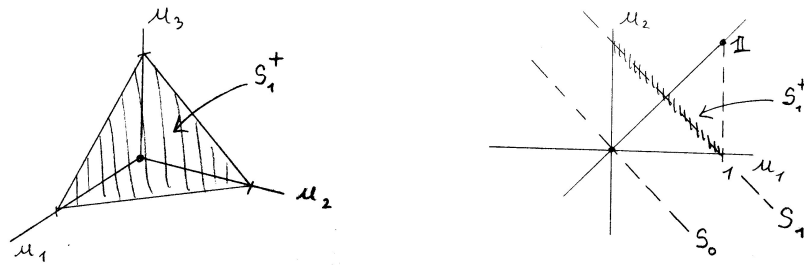
On a

$$\tilde{\mathcal{L}}^*(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$$

donc le spectre de $\tilde{\mathcal{L}}^*_{/S_0}$ est contenu dans le disque unité. Si de plus $\tilde{\mathcal{L}}$ est mélangeante alors il existe $t \geq 1$ tel que

$$\left(\tilde{\mathcal{L}}^*\right)^t(\mathcal{D}) \subset \text{Int}(\mathcal{D})$$

donc $\left(\tilde{\mathcal{L}}^*\right)^t_{/S_0}$ est contractante donc son spectre est strictement inclu dans le disque unité.



□

Application du Théorème de Perron Frobenius

Exercice 4.1.19. « Entropie topologique d'un graphe ».

(Cf TD 1).

Si Γ est un graphe fini orienté avec m sommets, et \mathcal{L} est sa matrice d'adjacence,

1. Montrer que le nombre de chemins reliant les sommets i à j au temps $t \geq 0$ est donné par

$$\mathcal{N}_{i \rightarrow j}(t) = (\mathcal{L}^t)_{j,i}$$

2. Supposons le graphe Γ ergodique. (i.e. \mathcal{L} matrice ergodique). On définit l'entropie topologique par

$$h_{top}(\Gamma) := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \mathcal{N}_{i \rightarrow j}(t)$$

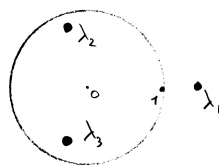
c'est à dire le taux de croissance exponentiel de la complexité des chemins. Remarque : on peut écrire :

$$\# \{\text{chemins}\} = e^{th_{top} + o(t)}$$

Montrer que

$$h_{top}(\Gamma) = \log \lambda_1$$

où λ_1 est la valeur propre dominante de la matrice d'adjacence. Calculer λ_1 dans les deux exemples donnés.



Exercice 4.1.20. «Matrice d'adjacence d'un graphe et entropie»

Si Γ est un graphe fini orienté avec m sommets, sa **matrice d'adjacence** \mathcal{L} est définie par $\mathcal{L}_{j,i} = 1$ si $i \rightarrow j$ (i.e. une arête relie i vers j), et $\mathcal{L}_{j,i} = 0$ sinon.

1. Montrer que le nombre de chemins reliant les sommets i à j au temps $t \in \mathbb{N}$ est donné par ³

$$\# \{ \text{chemins } i \rightarrow j \text{ au temps } t \} = (\mathcal{L}^t)_{j,i}$$

Exemples de graphes :



2. Supposons la matrice \mathcal{L} **mélangeante**. On définit l'**entropie topologique** du graphe par

$$h_{\text{top}}(\Gamma) := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \# \{ \text{chemins } i \rightarrow j \text{ au temps } t \}$$

c'est à dire le taux de croissance exponentiel de la complexité des chemins, car on peut écrire : $\# \{ \text{chemins} \} = e^{th_{\text{top}} + o(t)}$. Montrer que

$$h_{\text{top}}(\Gamma) = \log \lambda$$

où λ est la valeur propre dominante de la matrice d'adjacence. Calculer $h_{\text{top}}(\Gamma)$ pour l'exemple précédent.

Exercice 4.1.21. "Matrice d'adjacence d'un graphe et entropie"

Si Γ est un graphe fini orienté avec m sommets, sa **matrice d'adjacence** \mathcal{L} est définie par $\mathcal{L}_{j,i} = 1$ si $i \rightarrow j$ (i.e. une arête relie i vers j), et $\mathcal{L}_{j,i} = 0$ sinon.

1. Ecrire la matrice d'adjacence \mathcal{L} pour les exemples suivants de graphes.
2. Pour un graphe quelconque Γ , montrer que le nombre de chemins reliant les sommets i à j au temps $t \in \mathbb{N}$, noté ⁴ $\mathcal{N}_{i \rightarrow j}(t) := \# \{ \text{chemins } i \rightarrow j \text{ au temps } t \}$ est donné par

$$\mathcal{N}_{i \rightarrow j}(t) = (\mathcal{L}^t)_{j,i} \tag{4.1.3}$$

Déduire une formule pour

$$\mathcal{N}(t) := \{ \text{chemins périodiques de période } t \}.$$

3. Supposons la matrice \mathcal{L} **mélangeante**. On définit l'**entropie topologique** du graphe par

$$h_{\text{top}}(\Gamma) := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \# \{ \text{chemins } i \rightarrow j \text{ au temps } t \}$$

c'est à dire le taux de croissance exponentiel de la complexité des chemins, car on peut écrire : $\# \{ \text{chemins} \} = e^{th_{\text{top}} + o(t)}$. Montrer que

$$h_{\text{top}}(\Gamma) = \log \lambda$$

où λ est la valeur propre dominante de la matrice d'adjacence. Calculer $h_{\text{top}}(\Gamma)$ pour l'exemple précédent.

3. Le signe $\#$ veut dire "cardinal" c'est à dire "nombre de .."

4. Le signe $\#$ veut dire "cardinal" c'est à dire "nombre de .."

4.1.4 Matrices stochastiques

On présente une classe particulière de matrices positives qui sont utiles pour décrire l'évolution de distributions de probabilité.

Définition 4.1.22. Une matrice \mathcal{L} est **stochastique** (ou **matrice de Markov**) si

- \mathcal{L} est positive (i.e. $\mathcal{L}_{j,i} \geq 0, \forall i, j$)
- $\forall i$, on a $\sum_j \mathcal{L}_{j,i} = 1$: la somme sur chaque colonne est 1.

Voici la signification :

Proposition 4.1.23. \mathcal{L} est une **matrice stochastique** si et seulement si elle préserve les mesures de probabilité, c'est à dire que si $u = (u_1, \dots, u_m)$, avec $\sum_j u_j = 1, u_j \geq 0$, alors $u' = \mathcal{L}u$ vérifie aussi $\sum_j u'_j = 1, u'_j \geq 0$. On appelle $\mathcal{L}_{j,i}$: « probabilité de transition de $i \rightarrow j$ ».

Remarque : en termes mathématiques, cela signifie que la matrice \mathcal{L} est positive et préserve la norme l^1 :

$$\|\mathcal{L}u\|_{l^1} = \|u\|_{l^1}, \quad \|u\|_{l^1} := \sum_j |u_j| \quad (4.1.4)$$

Démonstration. Sens \Rightarrow : on a $u'_j = \sum_i \mathcal{L}_{j,i} u_i$ donc $u'_j \geq 0$, et

$$\sum_j u'_j = \sum_j \sum_i \mathcal{L}_{j,i} u_i = \sum_i \left(\underbrace{\sum_j \mathcal{L}_{j,i}}_1 \right) u_i = \sum_i u_i = 1$$

Sens \Leftarrow : on prend $u = \left(0 \dots \underbrace{1}_i \dots 0 \right)$ alors $u'_j = \mathcal{L}_{j,i} \geq 0$. Et $\sum_j \mathcal{L}_{j,i} = \sum_j u'_j = 1$. \square

Voici une autre caractérisation utile. On note \mathcal{L}^T la matrice transposée et $\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

le vecteur de 1.

Proposition 4.1.24. *Une matrice \mathcal{L} est stochastique si et seulement si*

$$\mathcal{L}^T \mathbf{1} = \mathbf{1} \text{ et } \mathcal{L} \geq 0 \quad (4.1.5)$$

Démonstration. On écrit :

$$1 = (\mathcal{L}^T \mathbf{1})_i = \sum_j (\mathcal{L}^T)_{i,j} = \sum_j \mathcal{L}_{j,i}$$

□

Voici ce que dit le théorème de Perron Frobenius pour les matrices stochastiques :

Proposition 4.1.25. *Si \mathcal{L} est une matrice **stochastique et ergodique** alors la valeur propre dominante est $\lambda_1 = 1$, on a*

$$\mathcal{L}U_1 = U_1$$

*avec les composantes de U_1 qui sont $u_j > 0, \forall j$, et $\sum_j u_j = 1$. On appelle u l'**état d'équilibre**. Le projecteur spectral associé est*

$$\Pi_1 = |U_1\rangle\langle \mathbf{1}|$$

Si de plus la matrice est mélangante alors

$$\mathcal{L}^t = \Pi_1 + O(|\lambda_2|^t), \quad |\lambda_2| < 1. \quad (4.1.6)$$

Remarque : en terme de dynamique, $u_j > 0$ s'interprète comme la fraction de temps passé par le système sur l'état j .

Démonstration. D'après (4.1.5) on sait que 1 est valeur propre de \mathcal{L}^T donc de \mathcal{L} . D'après (4.1.4) on a que

$$\|\mathcal{L}\|_{l^1 \rightarrow l^1} := \max \frac{\|\mathcal{L}u\|_{l^1}}{\|u\|_{l^1}} = 1$$

et d'après (A.1.3),

$$r_{spec}(\mathcal{L}) \leq \|\mathcal{L}\| = 1$$

donc $\lambda_1 = 1$ est bien la valeur propre dominante. D'après $\mathcal{L}U_1 = U_1$ et $\mathcal{L}^T \mathbf{1} = \mathbf{1}$ on déduit que $\Pi_1 = |U_1\rangle\langle \mathbf{1}|$. On a $V_1 = \mathbf{1}$. □

Exercice 4.1.26. « Internet Google rank »

ref : Brin [6]p.104, [Page rank sur Wikipedia](#). L'algorithme de Brin et Page a été breveté pour Google en 1997 et a pris fin en 2011.

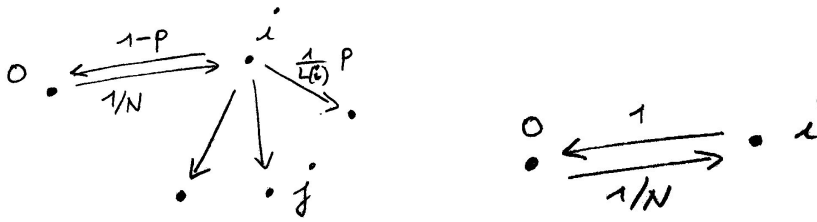
On considère le graphe G où les sommets i sont les pages webs qui existent sur le réseau internet, $i = 1 \rightarrow N$, et avec une arête $i \rightarrow j$ si la page i possède un lien html vers la page j . On note $L(i) \geq 0$ le nombre de liens de la page i vers d'autres pages.

Le graphe modifié \tilde{G} est le graphe G auquel on rajoute un sommet noté $\{0\}$ et des arêtes $0 \rightarrow i, i \rightarrow 0, \forall i = 1 \dots N$. Soit $0 < p < 1$ un paramètre appelé damping (amortissement).

On définit la matrice $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_{i,j})_{i,j=0 \rightarrow N}$ par : $\mathcal{L}_{0,0} = 0$ et pour $i, j \neq 0$,

$$\mathcal{L}_{i,0} = \frac{1}{N}, \quad \mathcal{L}_{0,i} = \begin{cases} 1 & \text{si } L(i) = 0 \\ 1 - p & \text{si } L(i) \geq 1 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}_{j,i} = \begin{cases} \frac{1}{L(i)}p & \text{si } i \rightarrow j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



1. Montrer que la matrice \mathcal{L} est **stochastique** et **mélangeante**. Que déduit-t-on sur le spectre de \mathcal{L} ?
2. Lorsqu'un internaute fait une requête de recherche à "google search" avec des mots clefs, le classement envoyé par google des pages web ("Rankpage") est donné par l'ordre décroissant des composantes $(u_i)_i$ de l'état d'équilibre de la matrice \mathcal{L} (et après application d'un filtre relatif aux mots clefs demandés). Pourquoi cette ordre est pertinent ?
3. Trouver une majoration de $|\lambda_2|$ (la deuxième plus grande valeur propre de \mathcal{L}).
4. Google calcule les composantes de l'état d'équilibre u_i régulièrement (tous les quelques jours). Quel algorithme efficace proposez vous pour faire ce calcul ?

Exercice 4.1.27. « Dynamique de Bernouilli »

Il s'agit d'un cas particulier simple de matrice stochastique. On considère m sommets $i = 1, \dots, m$. La probabilité de transition $p_{i \rightarrow j} = p_j$ est supposée indépendante de l'état initial i . (On a $\sum_{j=1}^m p_j = 1$).

Ecrire la matrice stochastique associée et montrer que l'état d'équilibre est

$$u = (p_1, \dots, p_m)$$

Solution : La matrice stochastique pour un processus de Bernoulli est donc

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} p_1 & \cdots & p_1 \\ p_2 & \cdots & p_2 \\ \vdots & & \vdots \\ p_m & \cdots & p_m \end{pmatrix}$$

et si $u = (p_1, \dots, p_m)$

$$(\mathcal{L}u)_j = \sum_i \mathcal{L}_{j,i} p_i = \sum_i p_j p_i = p_j = u_j$$

donc $\mathcal{L}u = u$, donc u est bien l'état d'équilibre.

La propriété suivante montre comment une matrice positive ergodique peut être « normalisée » pour donner une matrice stochastique.

Proposition 4.1.28. Soit $\mathcal{L} \geq 0$ une matrice positive ergodique. On note $\lambda > 0$ la valeur propre dominante et u l'état d'équilibre avec composantes $u_j > 0, \forall j$:

$$\mathcal{L}u = \lambda u$$

Soit $\text{Diag}(u)$ la matrice diagonale avec les composantes u_j sur la diagonale. Soit

$$\tilde{\mathcal{L}} := \frac{1}{\lambda} \text{Diag}(u)^{-1} \mathcal{L} \text{Diag}(u)$$

Alors $\tilde{\mathcal{L}}^T$ est une matrice **stochastique**.

Remarquer que $\lambda \tilde{\mathcal{L}}$ est semblable à \mathcal{L} . Cela peut être utile pour étudier

$$\mathcal{L}^t = \lambda^t \text{Diag}(u) \tilde{\mathcal{L}}^t \text{Diag}(u)^{-1}$$

Démonstration. Il faut montrer que $\tilde{\mathcal{L}}\mathbf{1} = \mathbf{1}$. On a en effet $\text{Diag}(u)\mathbf{1} = u$ donc

$$\tilde{\mathcal{L}}\mathbf{1} = \frac{1}{\lambda} \text{Diag}(u)^{-1} \mathcal{L}u = \text{Diag}(u)^{-1} u = \mathbf{1}$$

□

Interprétation géométrique d'une matrice stochastique \mathcal{L}

Soit $c \in \mathbb{R}$, et

$$S_c := \left\{ u \in \mathbb{R}^m, \sum_{j=1}^m u_j = c \right\}$$

qui est un hyper-espace affine de \mathbb{R}^m . Soit

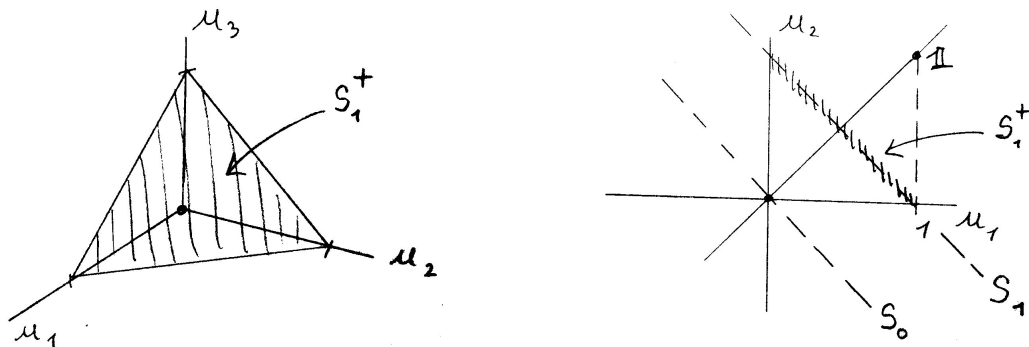
$$S_1^+ := \left\{ u \in \mathbb{R}^m, \sum_{j=1}^m u_j = 1 \text{ et } \forall j, u_j \geq 0 \right\}$$

qui est le « simplexe des mesures de probabilités ».

On a vu que \mathcal{L} est stochastique $\Leftrightarrow \mathcal{L}$ préserve S_1^+ .

Et \mathcal{L} préserve S_c pour tout $c \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\mathcal{L}^T \mathbf{1} = \mathbf{1}$.

(en effet $\sum_j u_j = \langle \mathbf{1} | u \rangle = \langle \mathcal{L}^T \mathbf{1} | u \rangle = \langle \mathbf{1} | \mathcal{L} u \rangle = \sum_j (\mathcal{L} u)_j$).



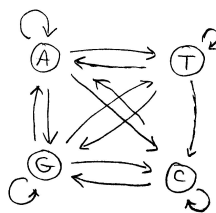
Utilisation de graphe et matrices stochastique en génétique

Référence : livre de Allman [@@]

(paragraphe très incomplet)

— La molécule ADN est un “mot” constitué de 4 lettres possibles appelées A,T,C,G. Les mutations induisent des changement de ces lettres. Pour modéliser les mutations, le **modèle de Jukes-Cantor** est que chaque année, une lettre peut se transformer en une des 3 autres lettres de façon équiprobable avec la probabilité $\alpha/3$. On estime que pour l’ADN humain, $\alpha \simeq 10^{-9}$ mutation/an, alors que pour le virus de la grippe A, $\alpha \simeq 10^{-2}$ mutation/an. Autrement dit ce modèle est décrit par une matrice stochastique (concernant chaque lettre de l’ADN) :

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha/3 & \alpha/3 & \alpha/3 \\ \alpha/3 & 1 - \alpha & \alpha/3 & \alpha/3 \\ \alpha/3 & \alpha/3 & 1 - \alpha & \alpha/3 \\ \alpha/3 & \alpha/3 & \alpha/3 & 1 - \alpha \end{pmatrix}$$



- La phylogénétique consiste à construire “l’arbre de l’évolution des espèces”. On utilise aussi des modèles probabilistes et l’observation des données génétiques actuelles. On cherche à définir et évaluer la “distance génétique” entre espèces.
- La méthode de décomposition en composantes principales, consiste à construire la matrice de covariance pour des données génétiques (c’est une matrice symétrique), et trouver les 2 (ou n) axes principaux (i.e. les vecteurs propres correspondant aux valeurs propres les plus grandes). On représente les données dans ce plan. Voir la carte “gene map of europe”.

4.1.5 Matrices réversibles ou principe de la balance détaillée

En générale il n’est pas évident de trouver l’état d’équilibre d’une matrice stochastique. Le plus simple est de laisser la dynamique évoluer vers cet état, selon (4.1.6). Mais il y a un cas particulier de matrices stochastiques qui apparaissent souvent en physique statistique pour lequel l’état d’équilibre est connu a priori (si on connaît la matrice) :

Définition 4.1.29. (et propriété) Soit $u = (u_j)_j$ un vecteur de composantes $u_j > 0, \forall j$. Une matrice **stochastique** \mathcal{L} est **réversible pour u** (ou « **vérifie le principe de balance détaillée** ») si

$$\forall i, j, \quad \mathcal{L}_{i,j}u_j = \mathcal{L}_{j,i}u_i$$

Alors

$$\mathcal{L}u = u$$

c’est à dire que u est l’état d’équilibre.

Démonstration. On a $\forall i$,

$$(\mathcal{L}u)_i = \sum_j \mathcal{L}_{i,j}u_j = \left(\underbrace{\sum_j \mathcal{L}_{j,i}}_1 \right) u_i = u_i$$

□

Remarque 4.1.30.

- \mathcal{L} réversible n’est pas forcément ergodique.
- Ce qui est particulier est que l’on connaît a priori l’état d’équilibre u , cela contraint la matrice stochastique.

Exemple 4.1.31. En « physique statistique à l'équilibre », il apparait la **distribution de Gibbs** ou **distribution de Boltzmann** :

$$u_j = \frac{1}{Z} \exp(-\beta E(j))$$

où $E(j)$ est une fonction « énergie » de l'état j , $\beta = \frac{1}{k_b T}$ avec T la température (fixée) et $Z > 0$ un facteur de normalization de sorte que $\sum_j u_j = 1$, donc

$$Z = \sum_j \exp(-\beta E(j))$$

Voir exercice suivant.

Exercice 4.1.32. « **Algorithme de MonteCarlo pour le modèle d'Ising** »

On considère un réseau $N \times N$ périodique dont les sites sont notés $X = (x, y)$ et dont les variables sont $f_X = \pm 1$ et modélisent des spins (up/down). Si deux sites sont voisins on note $X \sim Y$. Une configuration des spins est un champ donné : $f = (f_X)_X$. Son énergie ferromagnétique est :

$$E(f) := \sum_X \sum_{Y \text{ tq } X \sim Y} (-f_X \cdot f_Y)$$

1. Combien y a-t-il de sites ? Combien de configurations possibles ? Quelles configurations donnent l'énergie minimale ? et maximale ?
2. L'algorithme d'évolution suivant est appelé **algorithme de montecarlo**. $\beta \geq 0$ est un paramètre fixé qui est l'inverse de la température : $\beta = 1/(k_b T)$.
 - (a) A l'instant $n = 0$, on part d'une configuration f choisie au hasard.
 - (b) On choisit un site X au hasard, et on note f' la configuration identique à f sauf au site X où le spin est opposé : $f'_X = -f_X$ (spin opposé).
 - (c) A l'instant $n + 1$,
 - i. Si $E(f') < E(f)$ on choisit la configuration f'
 - ii. Si $E(f') \geq E(f)$ on choisit la configuration f' avec la probabilité $P_{f \rightarrow f'} = \exp(-\beta \cdot (E(f') - E(f)))$ (et on reste donc avec f avec la probabilité complémentaire).
 - (d) On revient en (b) pour poursuivre l'évolution du champ de spins.

Montrer que cet algorithme correspond à une matrice 2×2 concernant seulement les 2 états f, f' , qui est **stochastique** et **réversible** pour la mesure de Boltzmann :

$$u(f) = \frac{1}{Z} \exp(-\beta E(f))$$

3. Dans cette description de toutes les configurations en terme de graphe, quels sont les sommets du graphes ? il a combien de sommets ? et quelles sont les arêtes et leur probabilité ?

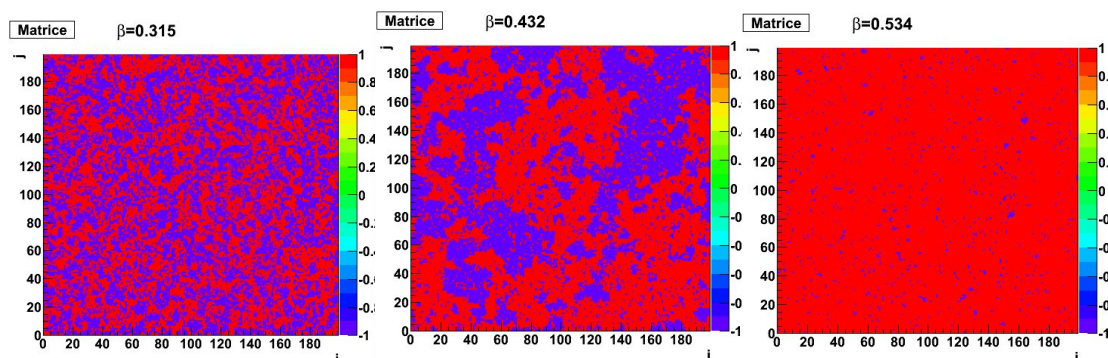
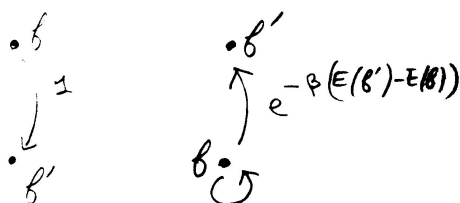


FIGURE 4.1.1 – Resultat de l’algorithme de Monte-Carlo pour le modèle d’Ising, aux températures $\beta = 0.3$ (désordre), 0.4 (transition de phase) et 0.5 (ordre magnétique).



La propriété suivante montre que les matrices réversibles sont cependant des matrices stochastiques très particulières.

Proposition 4.1.33. *Si \mathcal{L} est une matrice réversible pour l’état u , alors son spectre est réel :*

$$\text{Spec}(\mathcal{L}) \subset [-1, 1]$$

plus précisément, la matrice

$$B = \text{Diag}(u^{1/2})^{-1} \circ \mathcal{L} \circ \text{Diag}(u^{1/2})$$

est symétrique : $B^T = B$, et vérifie $B\mathbf{1} = \mathbf{1}$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} B_{j,i} &= u_j^{-1/2} \mathcal{L}_{j,i} u_i^{1/2} = u_j^{-1/2} \mathcal{L}_{j,i} u_i u_i^{-1/2} = u_j^{-1/2} \mathcal{L}_{i,j} u_j u_i^{-1/2} \\ &= u_i^{-1/2} \mathcal{L}_{i,j} u_j^{1/2} = B_{i,j} \end{aligned}$$

□

4.2 Processus à temps continu

Dans les exemples précédents, l'évolution d'un vecteur initial $u(0) = u$ est donnée par

$$u(t) = \mathcal{L}^t u(0), \quad t \in \mathbb{N}$$

On dit que c'est une évolution à « temps discret ». L'opérateur d'évolution au temps t est \mathcal{L}^t .

Définition 4.2.1. Une **évolution à temps continu** est défini par une matrice $m \times m$ A appelée **générateur** et définissant l'évolution du vecteur $u(t) \in \mathbb{C}^m$ pour $t \in \mathbb{R}$ par

$$\frac{du}{dt} = Au(t), \quad \forall t$$

appelée **équation d'évolution**. De façon équivalente

$$u(t) = e^{tA}u(0)$$

L'**opérateur d'évolution** au temps t est

$$\mathcal{L}(t) := e^{tA}$$

La propriété suivante montre la condition sur le générateur A pour que l'opérateur d'évolution $\mathcal{L}(t)$ soit positif (au sens de (4.1.2)).

Proposition 4.2.2. L'opérateur $\mathcal{L}(t)$ est **positif** pour tout $t \in \mathbb{R}$ si et seulement si les éléments hors diagonaux de A sont positifs :

$$\forall i \neq j, \quad A_{i,j} \geq 0,$$

Démonstration. Sens \Rightarrow :

$$A_{i,j} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\underbrace{(e^{tA})_{i,j}}_{\geq 0} - \delta_{i,j} \right) \underbrace{\geq}_{\text{si } i \neq j} 0$$

Sens \Leftarrow : soit $c = \min_i A_{i,i}$ et

$$B := A - c \cdot \text{Id}$$

donc $B \geq 0$ et

$$\mathcal{L}(t) = e^{tA} = e^{tc} e^{tB}$$

or $e^{tc} > 0$ et $e^{tB} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (tB)^n \geq 0$ donc $\mathcal{L}(t) \geq 0$. □

Proposition 4.2.3. *La matrice d'évolution $\mathcal{L}(t) = \exp(tA)$ est **stochastique** si et seulement si les colonnes du générateur A sont de somme nulle :*

$$\forall i, \quad \sum_j A_{j,i} = 0$$

Remarque : alors $A_{i,i} = - \left(\sum_{j \neq i} \underbrace{A_{j,i}}_{\geq 0} \right) \leq 0$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \forall t, \quad \mathcal{L}(t) \text{ stochastique} &\Leftrightarrow \forall t, \quad (e^{tA})^T \mathbf{1} = \mathbf{1} \Leftrightarrow A^T \mathbf{1} = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_j A_{j,i} = 0 \end{aligned}$$

□

Problème 4.2.4. « Mouvement aléatoire à temps continu sur un réseau. Equation de la chaleur »

Dans ce problème on étudie le mouvement aléatoire d'une particule (ou ensemble de particules indépendantes) sur le réseau discret à N sites et périodique $\mathbb{Z}/(N\mathbb{Z})$. Grâce à l'invariance par translation, le problème est soluble par **transformée de Fourier** et donne l'**équation de la chaleur** dans la limite du continu. On montre qu'une distribution de probabilité converge exponentiellement vite vers l'**équilibre**. Avec un ordinateur, on pourrait simuler l'évolution pour une géométrie quelconque.

@@ schéma @@

Problème 4.2.5. Soit un entier $N \geq 1$. On note $A = (A_{j,i})_{i,j=0 \rightarrow N-1}$ la matrice du générateur d'une dynamique stochastique sur le réseau $\mathbb{Z}/(N\mathbb{Z})$.

1. Pour $i \neq j$ on choisit que $A_{j,i} = 1$ si $j = i \pm 1 \pmod N$ et $A_{j,i} = 0$ sinon. Déduire $A_{i,i}$ et écrire la matrice A . Ecrire l'équation d'évolution $\frac{du}{dt} = Au$ pour chaque composante d'un vecteur $u = (u_i)_i$ qui est une distribution de probabilité.
2. Cette question établit des résultats utiles pour la suite. Si $(u_0, \dots, u_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ est un vecteur à N composantes on dit que sa **transformée de Fourier discrète**⁵ est le vecteur $(v_0, \dots, v_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ obtenu par

$$v_k = (\mathcal{F}u)_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i2\pi jk/N} u_j$$

5. La F.F.T (Fast Fourier Transform) est un algorithme qui permet de calculer les composantes v_k si $N = 2^p$ en un temps $O(N \log N)$.

Montrer la **formule d'inversion de Fourier**

$$u_j = (\mathcal{F}^{-1}v)_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{i2\pi jk/N} v_k$$

et la **relation de Parseval**⁶

$$\sum_{k=0}^{N-1} v_k^* v_k = \sum_{j=0}^{N-1} u_j^* u_j$$

Aide : remarquer que

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{i2\pi jk/N} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq 0 \pmod{N} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

- On note D l'opérateur **dérivée discrète** défini par $(Du)_j = u_{j+1} - u_j$. Ecrire la matrice de D et montrer que $A = -D^*D$. Dédire que le spectre de A est réel et négatif. On appelle D^*D le **Laplacien discret**.
- Montrer que

$$(\mathcal{F}Du)_k = (e^{i\pi k/N} - 1) (\mathcal{F}u)_k$$

autrement dit, $\mathcal{F}D = \mathcal{M}_d \mathcal{F}$ où \mathcal{M}_d est l'opérateur multiplication par la fonction $d = (d_k)_k$, $d_k = e^{i\pi k/N} - 1$. Dédire que

$$\mathcal{F}A = \mathcal{M}_a \mathcal{F}$$

où \mathcal{M}_a est l'opérateur multiplication par la fonction $a = (a_k)_k$, $a_k = -4 \sin^2(\pi k/N)$. Tracer la fonction a . Noter que a_k sont les valeurs propres de A .

- Soit $u(t) = e^{tA}u$ l'évolution d'une distribution de probabilité u au temps t . Montrer que $u(t)$ **converge exponentiellement vite vers l'équilibre uniforme** :

$$(u(t))_j = \langle u \rangle + O(e^{-t/\tau})$$

avec $\langle u \rangle := \frac{1}{N} (\sum_l u_l)$ la moyenne spatiale de u et $\tau = \frac{1}{|a_1|} \underset{N \gg 1}{\sim} \frac{N^2}{4\pi^2}$.

- Si $N \gg 1$, poser $x_j = j/N$ pour $j \in \{0, \dots, N-1\}$ et montrer que $\frac{du}{dt} = Au$ devient **l'équation de la chaleur** pour $u(t, x_j) := (u(t))_j$,

$$\frac{\partial u}{\partial t'} = (\Delta u)(t, x), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

à condition de changer l'échelle de temps par $t' = t/N^2$.

6. On note $z^* = \bar{z}$ le complexe conjugué de $z \in \mathbb{C}$.

Marche aléatoire à temps discret : Pour $0 < \varepsilon < 1$, on considère la matrice

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 1 - \varepsilon & \frac{1}{2}\varepsilon & 0 & & \frac{1}{2}\varepsilon \\ \frac{1}{2}\varepsilon & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \ddots & & & 0 \\ & \ddots & & & \frac{1}{2}\varepsilon \\ \frac{1}{2}\varepsilon & & 0 & \frac{1}{2}\varepsilon & 1 - \varepsilon \end{pmatrix}$$

1. Montrer que \mathcal{L} est une matrice stochastique, réversible pour la distribution $u = (1, \dots, 1)$ et mélangeante. Interpréter \mathcal{L} comme une dynamique aléatoire à temps discret sur un réseau périodique.
2. Montrer que $\mathcal{F}\mathcal{L} = \mathcal{M}_p\mathcal{F}$ où \mathcal{M}_p est l'opérateur multiplication par la fonction $p = (p_k)_k$, $p_k = 1 - 2\varepsilon \sin^2(\pi k/N)$. Tracer p . Aide : montrer que $\mathcal{L} = \text{Id} + \frac{\varepsilon}{2}A$.
3. Soit $u(n) = \mathcal{L}^n u$ l'évolution d'une distribution de probabilité u au temps $n \geq 1$. Montrer que $u(n)$ converge exponentiellement vite vers l'équilibre uniforme :

$$(u(n))_j = \langle u \rangle + O(r^n)$$

avec $\langle u \rangle := \frac{1}{N} (\sum_l u_l)$ la moyenne spatiale de u et $r = \max(p_1, |1 - 2\varepsilon|) < 1$. On a $p_1^n \underset{N \gg 1}{\sim} e^{n/\tau}$ avec $\tau = \frac{N^2}{\varepsilon\pi^2}$.

4. Dans la limite $\varepsilon \ll 1$, montrer que l'évolution à temps discret ressemble à celle à temps continu :

$$\mathcal{L}^n \simeq e^{tA}$$

avec $t = \frac{\varepsilon}{2}n$. L'erreur de cette approximation est négligeable sur quel intervalle de temps ?

Chapitre 5

Dynamique déterministe expansive et théorie ergodique

5.1 Introduction

Dans ce chapitre on étudie un modèle (ou une classe de modèles) de **dynamique déterministe** qui présente la propriété de « **sensibilité aux conditions initiales** » et manifeste donc des comportements chaotiques. Ce modèle est idéal pour présenter les concepts fondamentaux et pour mettre en oeuvre les techniques générales. On verra comment obtenir un modèle probabiliste de la dynamique, qui nous rapprochera donc des modèles de Markov du chapitre 4.

Des particularités de ce modèle est qu'il est à **temps discret**, que la dynamique est univaluée dans le futur, mais la **dynamique est multivaluée** dans le passé (i.e. un état a plusieurs états antécédents). Cela ressemble donc fortement au modèle de dynamique sur les graphes, et en ce sens ces modèles de dynamique expansive forment des modèles intermédiaires entre les modèles de dynamique probabiliste sur les graphes (chapitre précédent), et les modèles qui sont déterministes et univalués que l'on verra au chapitre suivant.

Conseil de lecture :

— Voir la vidéo (13 minutes) [27, Chap.VII].

5.2 Modèle de dynamique expansive

Dans cette première section on définit le modèle. L'espace est unidimensionnel, formé par les nombres réels modulo 1, $x \in [0, 1[$ avec $x = 1$ identifié à $x = 0$. Cela forme donc un cercle noté S^1 . Précisément, cet espace est défini comment étant

$$S^1 := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

La dynamique sur cet espace est définie à partir d'une fonction :

$$f : S^1 \rightarrow S^1 \tag{5.2.1}$$

c'est à dire une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que l'on supposera C^∞ et vérifiant $f(x+k) = f(x) \bmod 1, \forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}$. Partant de $x_0 \in S^1$, la **trajectoire** est :

$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1), \quad x_n = f(x_{n-1}) = \dots = f^n(x_0).$$

On supposera que f est **strictement expansive** c'est à dire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) > 1.$$

Remarque 5.2.1. C'est cette condition qui traduit la **sensibilité aux conditions initiales**, car si $x_0, x'_0 = x_0 + \delta x$ sont deux points voisins avec un petit écart $\delta x \ll 1$, à l'itération suivante on a $x_1 = f(x_0)$ et

$$x'_1 = f(x'_0) = f(x_0 + \delta x) \simeq f(x_0) + \delta x \cdot f'(x_0) + O(\delta x^2)$$

donc

$$|x'_1 - x_1| = \underbrace{f'(x_0)}_{>1} \cdot |x'_0 - x_0| + O(\delta x^2)$$

ce qui montre que l'écart entre les points est amplifié à chaque itération.

Exemple 5.2.2. Dans ce chapitre, on considérera souvent l'exemple suivant qui est très simple. Pour $\varepsilon \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = 2x + \frac{\varepsilon}{2\pi} \sin(2\pi x) \quad \bmod 1$$

qui vérifie $f(x+k) = f(x) + 2k = f(x) \bmod 1$ donc définit bien une application $f : S^1 \rightarrow S^1$. On calcule :

$$f'(x) = 2 + \varepsilon \cos(2\pi x)$$

donc si $-1 < \varepsilon < 1$, on a $f'(x) > 1$, l'application est expansive. Voir figure 5.2.1. Il y a deux branches.

Remarque 5.2.3. Dans cet exemple, chaque point $y \in S^1$ a 2 antécédents $x_0 = f^{-1}(y), x_1 = f^{-1}(y)$. Ainsi la fonction $f : x \rightarrow y = f(x)$ est univaluée mais l'inverse $f^{-1} : y \rightarrow x_j = f_j^{-1}(y), j = 0, 1$ est bi-valuée.

Remarque 5.2.4. (*) Plus généralement, une application strictement expansive $f : S^1 \rightarrow S^1$, C^∞ s'écrit

$$f(x) = kx + g(x)$$

avec $k \geq 2$ qui est le nombre de branches, et $g(x+1) = g(x)$ est périodique donc se décompose en série de Fourier. L'hypothèse d'expansivité est $f'(x) = k + g'(x) > 1, \forall x$.

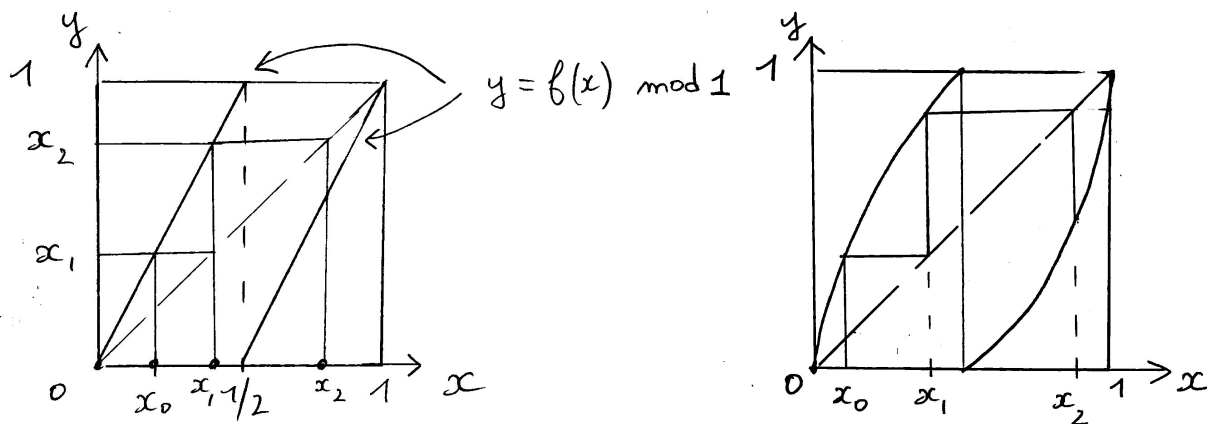


FIGURE 5.2.1 – (a) Trajectoire $x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1)$, etc pour l'application expansive $y = f(x) = 2x \text{ mod } 1$. (b). Idem pour $f(x) = 2x + \frac{\varepsilon}{2\pi} \sin(2\pi x) \text{ mod } 1$ avec $\varepsilon \simeq 0.2$.

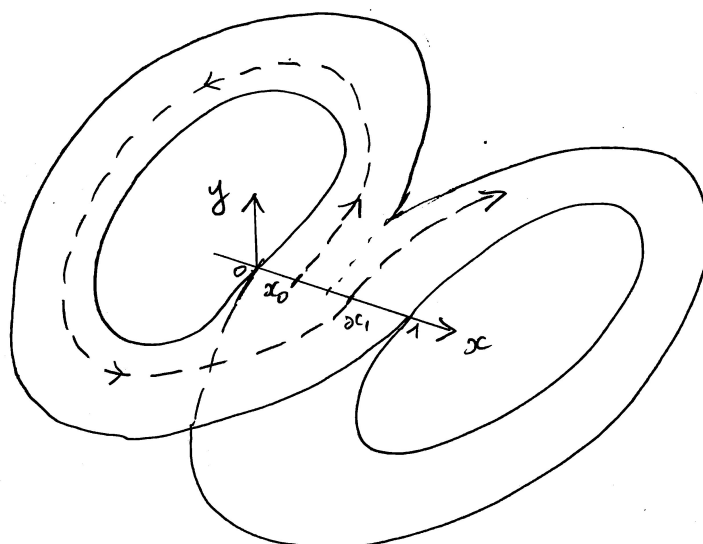


FIGURE 5.2.2

Remarque 5.2.5. Le modèle très simple présenté en (5.2.1) ne semble pas réaliste. Il apparaît cependant très souvent en physique (et autres disciplines) comme étant une section de Poincaré. Par exemple dans des modèle de Laser, modèles de turbulence (modèle de Lorenz), dynamique de Galaxies (modèle de Hénon). Voir figure 5.2.2. Voir vidéo [27, Chap.VII, à t=8mn,38s.].

Remarque 5.2.6. La dynamique dans ces rubans est sur une épaisseur très fine, la composante verticale y est « contractée » au cours du temps.

5.2.1 Étude d'un exemple simple

Considérons le cas très simple de l'application expansive linéaire

$$f : \begin{cases} S^1 & \rightarrow S^1 \\ x & \rightarrow 2x \text{ mod } 1 \end{cases}$$

Par exemple (en base 10) une trajectoire est $x_0 = 0.24 \rightarrow x_1 = f(x_0) = 0.48 \rightarrow x_2 = f(x_1) = 0.96 \rightarrow x_3 = f(x_2) = 0.92$ etc..

En fait pour ce modèle, l'expression d'une trajectoire est plus simple à écrire (et comprendre) si on utilise la base ¹ 2. Il suffit de décaler l'écriture vers la gauche, et ne garder que la partie fractionnaire :

$$\begin{aligned} x_0 &= 0.01100111011 \dots \\ x_1 = f(x_0) &= 0.1100111011 \dots \\ x_2 = f(x_1) &= 0.100111011 \dots \\ x_3 = f(x_2) &= 0.00111011 \dots \end{aligned}$$

On observe que (voir figure 5.2.3)

- pour un nombre général écrit en base deux : $x = 0.\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2\dots$, le premier chiffre $\varepsilon_0 = 0, 1$ indique si x est dans l'intervalle $I_0 = [0, \frac{1}{2}]$ ou $I_1 = [\frac{1}{2}, 1]$.
- La sensibilité aux conditions initiales est évidente, car une petite modification de la condition initiale x_0 par $x'_0 = x_0 + \delta x$ avec $\delta x = 2^{-(n+1)}$ consiste à changer le chiffre ε_n (à la position n après la virgule). Donc après n itérations, on a $x_n = f^n(x_0) = 0.\varepsilon_n\dots$ et $x'_n = f^n(x'_0) = 0.\varepsilon'_n\dots$ avec $\varepsilon'_n \neq \varepsilon_n$. Donc x_n et x'_n sont dans des intervalles I_j différents. Autrement dit une petite modification de la condition initiale de δx a donné un état x'_n différent de x_n à « l'échelle macroscopique » après seulement n itérations. Ex : $n = 10$, correspond à $\delta x = 2^{-11} = 5.10^{-4}$. A chaque itération, l'écart δx est multiplié par 2.

1. . Rappel, en base 2, les chiffres disponibles sont 0,1, et on a les règles d'addition $0 + 1 = 10$, $10 + 1 = 11$, $11 + 1 = 100$ (:qui est quatre), etc. La multiplication par deux est simplement le décalage à gauche et rajout d'un zéro : $1 \rightarrow 10 \rightarrow 100 \rightarrow \dots$ etc. On peut aussi considérer les nombres à virgule : comme 0.011001...

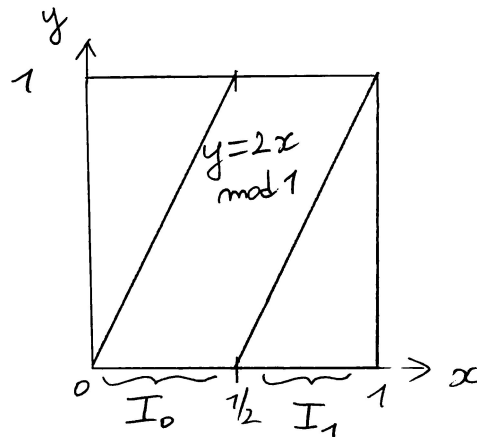


FIGURE 5.2.3

- Une orbite périodique de période n est telle que $x_n = f^n(x_0) = x_0$. Cela implique que l'écriture de x_0 en base 2 est périodique de période n (donc x_0 est un nombre rationnel et réciproquement).

On généralisera ces observations pour une dynamique f quelconque (non linéaire) à la section 5.4 sur la « dynamique symbolique ».

5.3 (*) Stabilité structurelle

Dans cette section on présente une propriété très importante des systèmes dynamiques expansifs (qui se généralise aux dynamiques hyperboliques). Cette propriété montre que le modèle est « robuste par rapport aux perturbations ». C'est donc une propriété importante dans un contexte de modélisation en physique, il garantit la pertinence du modèle même si on néglige des petits effets. Cela n'a rien d'évident a priori, car on pourrait craindre naturellement que la propriété de « sensibilité aux conditions initiales » (l'expansivité) fait que justement des petites perturbations puissent modifier considérablement les propriétés du modèle. Il n'en est rien. Cela peut sembler paradoxale. En fait il est vrai que :

- Partant d'une condition initiale donnée x_0 , une petite perturbation du modèle $g = f + \delta f$, fait que la trajectoire perturbée $\tilde{x}_n = g^n(x_0)$ pour n assez grand peut être très différente de la trajectoire non perturbée $x_n = f^n(x_0)$.

Mais on va montrer que

- Vu dans son ensemble, l'ensemble des trajectoires perturbées $\{g^n(x'_0)\}_{x'_0, n}$ est très proche des trajectoires non perturbées $\{f^n(x_0)\}_{x_0, n}$, au sens précis suivant : pour toute trajectoire perturbée $\{g^n(x'_0)\}_n$ (partant de x'_0 donné) il existe une trajectoire non perturbée $\{f^n(x_0)\}_n$ partant d'un certain x_0 proche de x'_0 telle que chaque point $f^n(x_0)$ est proche de $g^n(x'_0)$. Le théorème suivant donnera l'existence de cette correspondance bijective $h : S^1 \rightarrow S^1$ proche de l'identité, telle que $x'_0 = h(x_0)$, $g^n(x'_0) = h(f^n(x_0))$ pour tout n . La preuve du théorème donnera même la

construction de h .

Ainsi cette propriété de « stabilité structurelle » est déjà une première indication que pour les dynamiques chaotiques, il ne faut pas s'intéresser aux trajectoires individuelles, mais aux trajectoires dans leur collectivité.

Dans le théorème suivant on utilise la norme C^1 qui est par définition : $\|f - g\|_{C^1} := \sup_x |f(x) - g(x)| + \sup_x |f'(x) - g'(x)|$. On rappelle aussi qu'un homéomorphisme h est par définition une application continue bijective et d'inverse continue.

Théorème 5.3.1. « *Stabilité structurelle* ». Si $f : S^1 \rightarrow S^1$ est expansive (et au moins C^1), alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour toute autre application $g : S^1 \rightarrow S^1$ (au moins C^1) « ε -proche de f » en norme C^1 , c'est à dire :

$$\|f - g\|_{C^1} \leq \varepsilon$$

alors g est aussi expansive et de plus les dynamiques de f et g sont « identiques » au sens où il existe un homéomorphisme $h : S^1 \rightarrow S^1$ tel que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ S^1 & \xrightarrow{g} & S^1 \end{array}$$

c.a.d. $g = h \circ f \circ h^{-1}$. De plus $\|h\|_{C^0} \leq C\varepsilon$ ce qui signifie que h est proche de l'identité en norme C^0 .

Remarque 5.3.2. La relation $g = h \circ f \circ h^{-1}$ signifie que l'application h envoie les trajectoires de f sur celles de g . En effet on a que pour tout $x \in S^1$, $n \in \mathbb{N}$,

$$g^n(x) = h \circ f^n \circ h^{-1}(x)$$

Remarque 5.3.3. Même si f, g sont C^∞ , l'application h est en général seulement Hölder continue (son graphe est une « fractale »). Il est facile de comprendre que h ne peut être dérivable car observons que si x est un point fixe de f , alors $x = f(x)$ et $y = h(x)$ est un point fixe de g car $g(y) = h \circ f \circ h^{-1}(y) = h(f(x)) = h(x) = y$. Si h est dérivable alors $g'(y) = f'(x)$. Or il est clair en perturbant f que l'on est libre de choisir $g'(y)$ qui peut être différent de $f'(x)$ (i.e le facteur de stabilité du point fixe).

Remarque 5.3.4. Le théorème 5.3.1 dit que d'un point de vue « topologique » c'est à dire à équivalence près par des homéomorphismes (applications continues), toutes les dynamiques expansives proches sont équivalentes. Il n'y a pas besoin de paramètres pour les distinguer. On dit que l'espace des modules est le singleton $\{0\}$. En fait cette équivalence topologique

est assez « grossière ». Il y a des quantités (propriétés) dynamiques importantes de f, g qui sont différentes comme la stabilité des orbites que ne distingue pas cette équivalence. On verra par exemple que les spectres de Ruelle qui gouvernent les fonctions de corrélation dynamique sont différents en général.

Remarque 5.3.5. @@ Parler d'autres résultats voisins comme « closing lemma » « Shadowing theorem » etc.. (qui ont une preuve commune).

Démonstration. @@ faire @@ cf Katok-Hasselblatt, cf Arnold, méthodes géométriques ... □

5.4 (*) Dynamique symbolique

Considérons une application expansive $f : S^1 \rightarrow S^1$ à deux branches et $f(0) = 0$ (pour simplifier). Posons $a = f^{-1}(0)$ autre que 0.

On considère la **partition de Markov** de l'espace $S^1 = I_0 \cup I_1$ formée par les deux intervalles :

$$I_0 := [0, a], \quad I_1 := [a, 1[$$

Pour un point $x_0 \in S^1$ de trajectoire $x_n = f^n(x_0)$ on associe la suite de symboles $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots)$ avec $\varepsilon_j \in \{0, 1\}$ définis par

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= 0 \text{ si } x_n \in I_0 \\ \varepsilon_n &= 1 \text{ si } x_n \in I_1 \end{aligned}$$

On dit que $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots)$ est la **dynamique symbolique** de x_0 .

Proposition 5.4.1. *On a que la suite $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots)$ caractérise le point x_0 .*

Démonstration. Il suffit de trouver une procédure pour calculer x_0 à partir de $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots)$ donné. Appelons f_0^{-1}, f_1^{-1} les deux branches inverses de f . D'après l'hypothèse d'expansivité de f , $(f_j^{-1})' < \theta < 1$ sont des applications contractantes.

Considérons la suite d'intervalles suivants qui sont imbriqués et qui contiennent tous x_0 : $I = [0, 1[$, puis $I_{\varepsilon_0} = f_{\varepsilon_0}^{-1}(I) \subset I$, puis $I_{\varepsilon_0, \varepsilon_1} = f_{\varepsilon_0}^{-1}(I_{\varepsilon_1}) \subset I_{\varepsilon_0}$, puis $I_{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2} = f_{\varepsilon_0}^{-1}f_{\varepsilon_1}^{-1}(I_{\varepsilon_2}) \subset I_{\varepsilon_0, \varepsilon_1}$, etc. Comme les applications f_j^{-1} sont contractantes, leur taille est majorée par

$$|I_{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}| \leq \theta^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Donc la limite $\bigcap_{n \geq 0} I_{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}$ est un unique point qui contient x_0 donc c'est x_0 . □

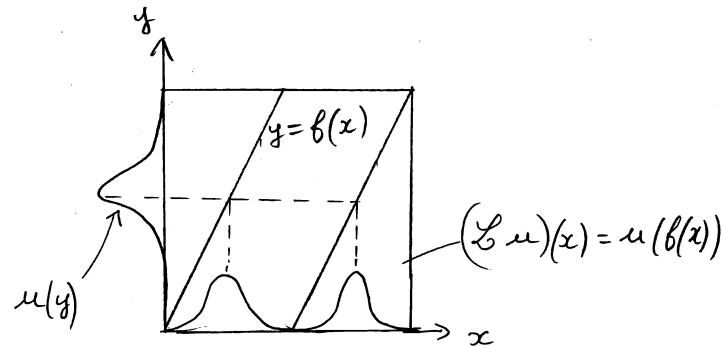


FIGURE 5.5.1 – Schéma de l'action de l'opérateur de transfert \mathcal{L} sur une fonction $u(y)$. On observe que les oscillations sont « doublées ».

5.5 Opérateur de transfert

La question abordée dans cette section est : « comment adopter une description probabiliste pour la dynamique de f qui est par définition déterministe ? »

On va s'intéresser à l'évolution de distributions de probabilité plutôt qu'à l'évolution des points. Pour cela, dans la Section 2.1.4, on a introduit l'opérateur de transfert \mathcal{L} qui fait évoluer les fonctions. Rappelons sa définition.

Définition 5.5.1. Si $f : S^1 \rightarrow S^1$ est une application C^∞ , on considère l'opérateur

$$\mathcal{L} \begin{cases} C^\infty(S^1) & \rightarrow C^\infty(S^1) \\ u & \rightarrow u \circ f \end{cases}$$

appelé **opérateur de composition**, ou **opérateur de transfert**.

Voir figure 5.5.1.

Considérons l'opérateur \mathcal{L}^* adjoint à \mathcal{L} dans l'espace $L^2(S^1, dx)$ (où dx est la mesure de Lebesgue ordinaire sur \mathbb{R}), c'est à dire que \mathcal{L}^* est défini par

$$\langle u | \mathcal{L}^* v \rangle = \langle \mathcal{L} u | v \rangle, \quad \forall u, v \in C^\infty(S^1),$$

avec le « produit scalaire L^2 » :

$$\langle u | v \rangle := \int \overline{u(x)} v(x) dx$$

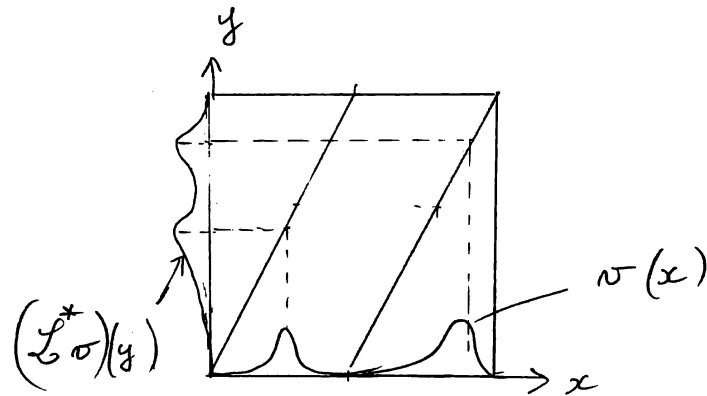


FIGURE 5.5.2 – Schéma de l'action de l'opérateur de transfert \mathcal{L}^* sur une fonction $v(x)$. On observe que les variations sont « étalées ».

Proposition 5.5.2. $\mathcal{L}^* : C^\infty(S^1) \rightarrow C^\infty(S^1)$ est donné par

$$(\mathcal{L}^*v)(y) = \sum_{\varepsilon=0,1} \frac{1}{f'(x_\varepsilon)} v(x_\varepsilon), \quad \text{avec } x_\varepsilon = f_\varepsilon^{-1}(y) \quad (5.5.1)$$

Démonstration. On écrit

$$\begin{aligned} \langle u | \mathcal{L}^*v \rangle &= \langle \mathcal{L}u | v \rangle = \int \overline{(\mathcal{L}u)(x)} v(x) dx \\ &= \int \overline{u(f(x))} v(x) dx \end{aligned}$$

Posons le changement de variable $y = f(x)$, soit $x_\varepsilon = f_\varepsilon^{-1}(y)$, donnant $dx_\varepsilon = (f_\varepsilon^{-1})'(y) dy = \frac{1}{f'(x_\varepsilon)} dy$. On continue

$$\begin{aligned} \langle u | \mathcal{L}^*v \rangle &= \sum_\varepsilon \int_{S^1} \overline{u(y)} v(x_\varepsilon) dx_\varepsilon \\ &= \int_{S^1} \overline{u(y)} \left(\sum_\varepsilon v(x_\varepsilon) \frac{1}{f'(x_\varepsilon)} \right) dy \end{aligned}$$

Par identification avec $\langle u | \mathcal{L}^*v \rangle = \int_{S^1} \overline{u(y)} (\mathcal{L}^*v)(y) dy$, on déduit (5.5.1). \square

Voir figure 5.5.2.

L'intérêt de l'opérateur \mathcal{L}^* vient de la propriété ?? qui montre que \mathcal{L}^* généralise la description de la dynamique de points en dynamique de distribution de probabilité.

5.6 Mélange, ergodicité, mesure d'équilibre

La propriété pour une dynamique d'être « chaotique » n'est pas bien définie. La propriété mathématique précise qui signifie « très chaotique » est d'être une dynamique « mélangeante » et à fortiori « ergodique ». Nous définissons ici ces propriétés donnons leur signification et montrons que les dynamiques expansives sur le cercle ont ces propriétés.

Avant cela nous introduisons la notion de fonction de corrélation.

5.6.1 Fonction de corrélation et mélange exponentiel

Définition 5.6.1. La fonction de corrélation dynamique de deux fonctions $u, v \in C^\infty(S^1)$ au temps $n \in \mathbb{N}$ est

$$\begin{aligned} C_{v,u}(n) &:= \langle v | \mathcal{L}^n u \rangle_{L^2} = \int \overline{v(x)} u(f^n(x)) dx \\ &= \langle (\mathcal{L}^*)^n v | u \rangle_{L^2} = \overline{\langle u | (\mathcal{L}^*)^n v \rangle_{L^2}} \end{aligned}$$

c'est à dire que $C_{v,u}(n)$ mesure la fonction u évoluée au temps n par \mathcal{L}^n et testée sur v , ou de façon équivalente, la fonction v évoluée au temps n par \mathcal{L}^n et testée sur v .

Théorème 5.6.2. Une application C^∞ expansive $f : S^1 \rightarrow S^1$ définit une dynamique **mélangeante à taux exponentiel** c'est à dire qu'il existe $\alpha > 0$, $C > 0$ et une mesure $d\mu_{SRB}$ sur S^1 tels que pour toutes fonctions $u, v \in C^\infty(S^1)$, tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| C_{v,u}(n) - \left(\int \overline{v} dx \right) \left(\int u d\mu_{SRB} \right) \right| \leq C e^{-\alpha n}$$

On appelle $d\mu_{SRB}$ la **mesure d'équilibre**.

Voir preuve plus loin.

Remarque 5.6.3. $d\mu_{SRB}$ s'appelle aussi **mesure SRB** (Sinai, Ruelle, Bowen) ou **mesure physique**, ou **mesure naturelle**.

Remarque 5.6.4. Signification : en posant $u = \mathbf{1}$ (fonction $u(x) = 1, \forall x$) on a $C_{v,u}(n) = \left(\int \overline{v} dx \right)$ et on obtient donc $\int d\mu_{SRB} = 1$ c'est à dire que $d\mu_{SRB}$ est une mesure de probabilité. D'après la définition $\overline{C_{v,u}(n)} = \langle u | (\mathcal{L}^*)^n v \rangle_{L^2}$, et en choisissant une mesure de probabilité initiale v (i.e. $\int v dx = 1$), la propriété de mélange exponentiel s'écrit

$$\overline{C_{v,u}(n)} = \langle u | (\mathcal{L}^*)^n v \rangle_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(\int \overline{u} d\mu_{SRB} \right)$$

et signifie que

$$(\mathcal{L}^*)^n v \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} d\mu_{SRB} \quad : \text{ au sens des distributions}$$

c'est à dire que toute mesure de probabilité v à densité C^∞ converge exponentiellement vite vers la mesure d'équilibre μ_{SRB} . Noter que si $v = \delta_x$ (qui n'est pas C^∞) on a $(\mathcal{L}^*)^n \delta_x = \delta_{f^n(x)}$ c'est à dire que l'on observe un point qui évolue sur une trajectoire, et il n'y a pas de convergence de la mesure de probabilité.

On verra que μ_{SRB} est en fait une mesure à densité C^∞ , mais cela est spécifique au cas des dynamiques expansives.

Démonstration. du théorème 5.6.2. On pourra consulter [19]. . Voici une preuve dans le cas particulier et simple d'une application linéaire expansive $f(x) = 2x \bmod 1$. La preuve générale s'inspire de cet exemple mais utilise plus d'analyse.

On décompose les fonctions $u, v \in C^\infty(S^1)$ en modes de Fourier

$$\varphi_k(x) = e^{i2\pi kx}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

qui forment une base orthonormée de $L^2(S^1)$: $\langle \varphi_k | \varphi_l \rangle = \delta_{k,l}$. Remarquer le fait important

$$\mathcal{L}\varphi_k = \varphi_k \circ f = \varphi_{2k}$$

qui montre que les modes de Fourier sont envoyés à l'infini sauf le mode $k = 0$. On peut calculer la fonction de corrélation entre deux modes de Fourier

$$\langle \varphi_k | \mathcal{L}^n \varphi_l \rangle = \langle \varphi_k | \varphi_{2^n l} \rangle = \delta_{k, 2^n l}$$

Donc pour k, l fixés et $l \neq 0$, en choisissant n assez grand, on a $\langle \varphi_k | \mathcal{L}^n \varphi_l \rangle = 0$. Le seul terme non nul pour tout $n \in \mathbb{N}$ est $\langle \varphi_{k=0} | \mathcal{L}^n \varphi_{l=0} \rangle = 1$. Par ailleurs on a $\int \varphi_k dx = \delta_{k,0}$. Donc, en posant $d\mu_{SRB} = dx$ (dans ce cas linéaire), on a bien la propriété de mélange exponentiel pour les fonction qui sont modes de Fourier. On déduit la même propriété pour toute fonction $u, v \in C^\infty(S^1)$, en décomposant u, v en modes de Fourier et utilisant le fait que les composantes de Fourier décroissent très vite. \square

5.6.2 Exemples numériques d'évolution de densité et de mesures d'équilibre

5.6.3 (*) Ergodicité

Théorème 5.6.5. *Une application C^∞ expansive $f : S^1 \rightarrow S^1$ définit une dynamique ergodique c'est à dire qu'il existe une mesure $d\mu_{SRB}$ sur S^1 telle que pour toutes fonctions $u, v \in C^\infty(S^1)$ on a*

$$\left| \frac{1}{n} \left(\sum_{m=0}^{n-1} C_{v,u}(m) \right) - \left(\int \bar{v} dx \right) \left(\int u d\mu_{SRB} \right) \right| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad (5.6.1)$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate (et plus faible) du mélange : on utilise le théorème de Césaro qui montre que si une suite a une limite $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l$ alors sa somme a la même limite : $\frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} u_m \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l$. \square

Remarque 5.6.6. La signification de la propriété d'ergodicité est que au sens des distributions, pour toute mesure initiale C^∞ de probabilité v , on a

$$\frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} (\mathcal{L}^*)^m v \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mu_{SRB} \quad : \text{ au sens des distributions}$$

On dit aussi que « la moyenne temporelle tends vers la mesure d'équilibre (ou une moyenne spatiale) ».

Interprétation de la mesure d'équilibre μ_{SRB} comme mesure naturelle : (réf : livre de Ruelle [35]).

Proposition 5.6.7. *Pour un point $x_0 \in S^1$, posons*

$$\mu_{x_0, n} := \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \delta_{f^m(x_0)}$$

qui est une mesure de probabilité portée par les n premiers points de la trajectoire issue de x_0 . Alors en tant que distribution $\mu_{x_0, n}(x) \in \mathcal{D}'(S_x^1 \times S_{x_0}^1)$ on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{x_0, n} = \mu_{SRB}(x) \otimes 1(x_0).$$

De façon équivalente, pour presque tout point x_0

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{x_0, n} = \mu_{SRB}.$$

Démonstration. On considère $\mu_{x_0, n}(x) \in \mathcal{D}'(S_x^1 \times S_{x_0}^1)$ comme une distribution en x et x_0 . Pour toute fonction $u \in C^\infty(S_x^1)$, $v \in C^\infty(S_{x_0}^1)$ (fonctions test), on a

$$\begin{aligned} \langle u \otimes v, \mu_{x_0, n} \rangle &= \langle v, \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} u(f^m(x_0)) \rangle \\ &= \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \int \overline{v(x_0)} u(f^m(x_0)) dx_0 = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \langle v, \mathcal{L}^m u \rangle = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} C_{v, u}(m) \end{aligned}$$

D'après (5.6.1), on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle u \otimes v, \mu_{x_0, n} \rangle = (\int \overline{v} dx_0) (\int u d\mu_{SRB}) = \langle u \otimes v, \mu_{SRB} \otimes 1 \rangle$. Cela signifie que au sens des distributions, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{x_0, n} = \mu_{SRB}(x) \otimes 1(x_0)$. \square

Chapitre 6

Dynamique déterministe hyperbolique et théorie ergodique

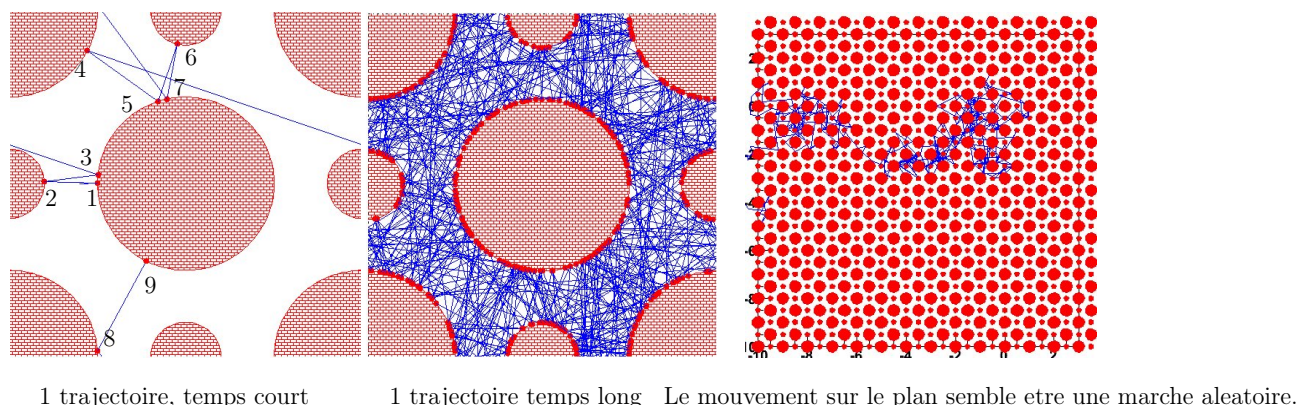
6.1 Introduction

Dans cette section on s'intéresse à un type de dynamique déterministe ayant la propriété de « **sensibilité aux conditions initiales** ». Nous verrons que cela implique un comportement apparent imprévisible des trajectoires, ce que l'on appelle « le chaos déterministe ». Le terme technique pour cette hypothèse de « sensibilité aux conditions initiales » est appelée « **Anosov** » ou « **uniformément hyperbolique** ».

La découverte de telles dynamiques chaotiques a commencé au XIXème siècle avec Hadamard et Poincaré, puis leur étude a progressé au XXème siècle avec Birkhoff, Anosov, Smale, Lorenz, Bowen, Ruelle etc.. et fait toujours l'objet de recherches en physique et en mathématiques.

L'hypothèse d'hyperbolicité uniforme que nous allons considérer est très forte. Elle garantit un comportement très chaotique que l'on peut étudier, c'est à dire que l'on peut montrer relativement facilement des propriétés de « chaos » comme le « mélange », « l'ergodicité », la « diffusion » (conséquence du Theorème Central Limite). Cependant la plupart des systèmes physiques réalistes ne sont pas totalement hyperboliques, mais le sont seulement dans certaines zones de l'espace des phases (ex : le flot de Lorenz). Cela peut suffir pour qu'ils possèdent des propriétés chaotiques manifestes, mais il est souvent difficile de le montrer (souvent on ne sais pas le faire).

Commençons par un exemple simple à expliquer (mais un peu difficile à étudier) que sont les billards dispersifs. Nous verrons ensuite qu'en régularisant les rebonds sur les bords on obtient un modèle mieux compris, mais plus abstrait, qui est le flot géodésique sur une variété à courbure négative. Pour montrer les techniques qui permettent de démontrer les propriétés de chaos, nous étudierons finalement l' « application du chat d'Arnold » ou « cat map » qui est un modèle jouet particulier mais où les propriétés de chaos sont vraiment simples à démontrer.



1 trajectoire, temps court 1 trajectoire temps long Le mouvement sur le plan semble être une marche aléatoire.

FIGURE 6.1.1 – (a) Premiers rebonds d’une trajectoire dans le billard de Sinaiï. (b) Une trajectoire avec de nombreux rebonds. (c) Cette même trajectoire représentée sur le plan \mathbb{R}^2 qui est le recouvrement de \mathbb{T}^2 (i.e. conditions de périodicité enlevées). On observe comme une « marche aléatoire » ou « mouvement Brownien ».

6.1.1 Billard dispersif de Sinaiï et instabilité hyperbolique

Le **billard de Sinaiï** est un carré avec conditions périodiques au bord (c’est donc un tore \mathbb{T}^2) et contenant des disques. Une bille évolue en ligne droite à vitesse constante et rebondit parfaitement sur le bord des disques. Voir figure 6.1.1. Elle a donc un comportement déterministe. Mais on observe que le comportement est imprévisible, “chaotique”. Pourquoi ?

L’explication heuristique est que les bords du billard sont convexes ce qui implique une « dispersion des trajectoires » après chaque rebond (on caractérisera cela par la sensibilité aux conditions initiales d’Anosov). Voir figure 6.1.2(a).

Après quelques rebonds seulement, les deux trajectoires initialement très proches peuvent avoir des évolutions très différentes (décorrélées). Sur la figure 6.1.2(b), on observe une bille (ou un nuage de billes indépendantes) avec une incertitude initiale en position de $\Delta y = 10^{-4}$. Cette incertitude croît exponentiellement et le comportement peut différer notablement après un temps très court (ici 6 rebonds).

La dynamique déterministe engendre donc du hasard. Cela est à l’origine du « chaos déterministe » et de la complexité dans les systèmes dynamiques, et plus généralement de la complexité en physique et dans la nature. Références : Ruelle “Hasard et chaos” [35][36]. Les vidéos de E. Ghys et al. sur le chaos [27].

Question (très actuelle) : Est-il possible de faire des prédictions sur l’évolution du système malgré ce hasard ? de comprendre les lois de ce hasard ?

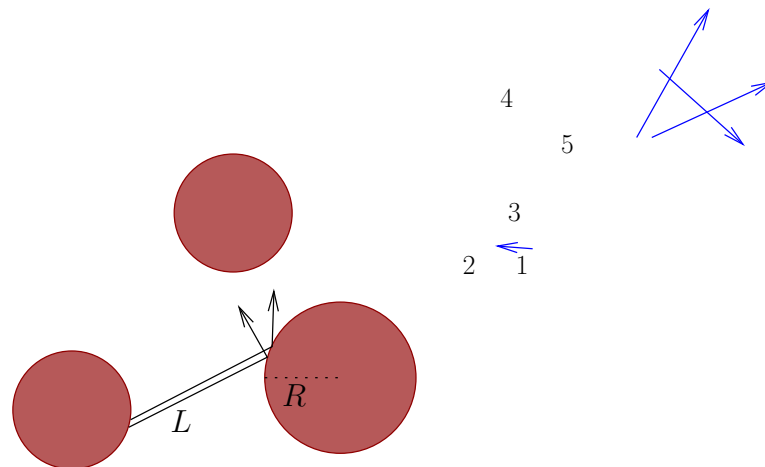


FIGURE 6.1.2 – (a) Billard dispersif. (b) nuage de billes indépendantes avec une incertitude initiale en position de $\Delta y = 10^{-4}$. Dans cet exemple, les différentes trajectoires deviennent « totalement décorrélées » après le 6ème rebond.

Approche probabiliste

Pour répondre à la question ci-dessus, il est nécessaire d’adopter une approche probabiliste. Voici l’idée. Sur la figure 6.1.3 observons $N = 10^4$ billes indépendantes avec des conditions initiales très proches $\Delta y = 10^{-4}$. La distribution des billes peut s’interpréter comme une distribution de probabilité d’une bille initiale. Cette distribution converge vers l’équilibre (distribution uniforme) et diffuse sur le plan (contenant le billard périodique). Pour cette distribution, on observe un comportement **prédictible** mais **irréversible**, puisque il y a un seul état final qui est « l’état d’équilibre ». Il y a donc une “**évolution effective** « prédictible »¹ pour la distribution de probabilité. On introduit la notion d’**entropie** pour caractériser cette perte d’information sur la position de la particule au cours du temps.

Remarque 6.1.1. Plus généralement, un **billard dispersif** est un ensemble d’obstacles lisses et convexes sur le tore \mathbb{T}^d plat de dimension d , placés de sorte que il existe une longueur $L > 0$ telle que toute trajectoire heurte transversalement un obstacle avant cette longueur $L > 0$.

6.1.2 Flot géodésique sur une surface à courbure négative

La dynamique en ligne droite dans un billard dispersif peut être considéré comme des trajectoires géodésiques sur une surface à courbure négative (cela signifie que les courbures principales sont opposées). Voir figure 6.1.4.

1. Le travail va donc porter à trouver les lois d’évolution pour cette distribution de probabilité. C’est un sujet actuel de recherche.

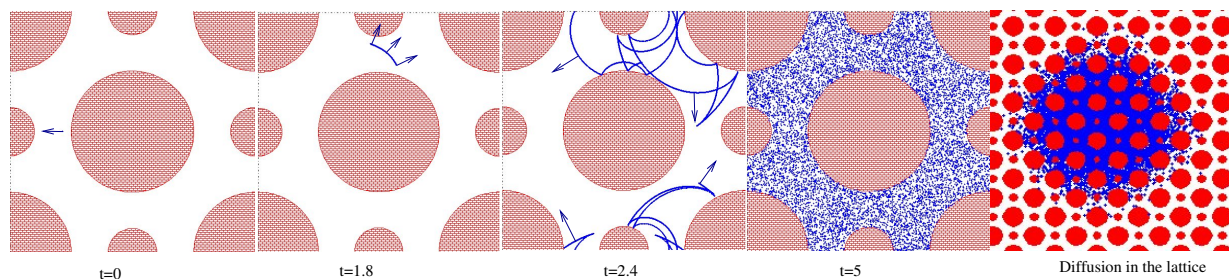


FIGURE 6.1.3 – Evolution d'un ensemble très localisé de conditions initiales ($\Delta y = 10^{-4}$). La distribution s'équidistribue sur le billard, converge vers « l'état d'équilibre ». Dans le réseau, elle diffuse (converge vers une distribution Gaussienne dont le rayon croît comme $r(t) \simeq D \cdot \sqrt{t}$ avec D appelé coefficient de diffusion). Cela explique l'aspect de marche aléatoire de la figure 6.1.1.

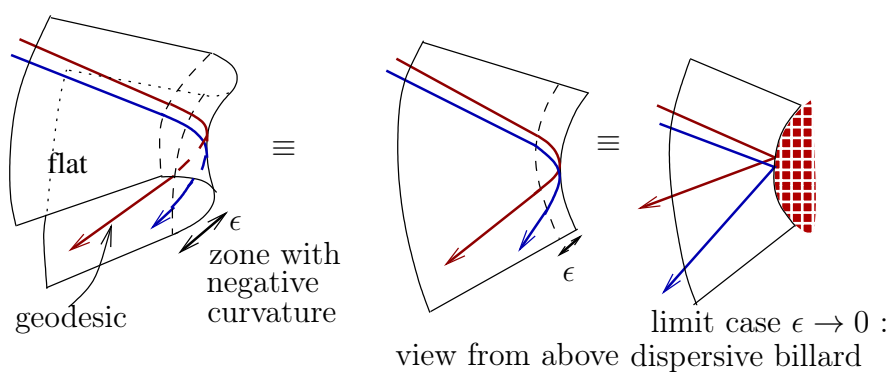


FIGURE 6.1.4 – Le flot dans un billard dispersif est un cas limite de flot sur une surface à courbure négative concentrée sur la ligne de rebond.

6.2 Instabilité hyperbolique d'Anosov

6.2.1 Espace des phases et couche d'énergie

Cas du flot géodésique sur une surface lisse : Nous avons vu dans la définition ?? que le flot géodésique sur une surface \mathcal{S} est un flot Hamiltonien. L'espace des phases est $(x, \xi) \in T^*\mathcal{S}$, c'est à dire qu'à chaque point $x \in \mathcal{S}$ il faut aussi considérer la variable impulsion $\xi \in T_x^*\mathcal{S} \equiv \mathbb{R}^2$. On a $\dim T^*\mathcal{S} = 4$. L'énergie $H(x, \xi) = \frac{1}{2} \|\xi\|_x^2$ est conservée. Par conséquent la particule évolue dans une sous variété (selon son énergie de départ $E > 0$) qui est

$$\Sigma_E := \left\{ (x, \xi) \in T^*\mathcal{S}, \quad E = \frac{1}{2} \|\xi\|_x^2 \right\}$$

appelée **couche d'énergie**. Σ_E est une variété compacte si \mathcal{S} est compacte et $\dim \Sigma_E = 3$.

Cas d'un billard dispersif : Le domaine spatial sera aussi noté $\mathcal{S} \subset \mathbb{T}^2$. L'énergie de la particule libre est $E = H(x, \xi) = \frac{1}{2} |\xi|^2$ est indépendant de x . On déduit que $v = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \xi} = \xi$ et $E = \frac{1}{2} |v|^2$, en particulier la norme de la vitesse est conservée. Un point de la couche d'énergie Σ_E est donc caractérisé par $x \in \mathcal{S}$ et la direction de la vitesse v . La difficulté cependant dans un billard dispersif est que la variété Σ_E et le flot ϕ_t sur Σ_E ne sont pas C^∞ partout. Sur une sous variété de Σ_E correspondant aux « rebonds rasants » ils sont continus mais non différentiables et cela rend leur étude mathématique plus difficile[8]. (On observe en effet des singularités dans la figure 6.1.3 à $t = 2.4$).

6.2.2 Définition de Flot Hyperbolique ou sensibilité aux conditions initiales.

La définition suivante due à Anosov caractérise précisément la propriété de « sensibilité aux conditions initiales ». Cette définition est très utile car on peut en tirer des conséquences qui démontre la « manifestation de chaos » appelé « mélange » (voir Section 6.3.1) et d'autre part cette définition se vérifie dans certains modèles comme le flot géodésique sur une variété compacte à courbure strictement négative ou les billards dispersifs (à ceci près que le flot du billard n'est pas lisse).

Pour appliquer la définition suivante au cas du flot géodésique discuté plus haut, penser que $M = \Sigma_E$ est la couche d'énergie de dimension 3 et que $x = (x, \xi)$.

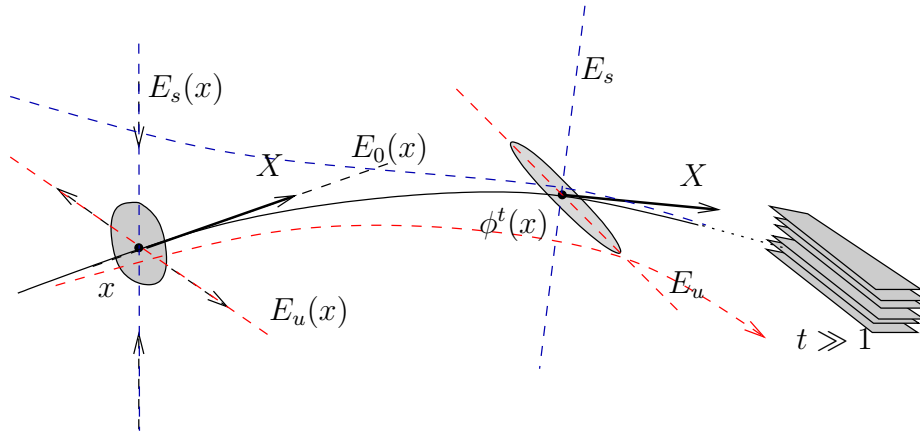


FIGURE 6.2.1 – Flot d’Anosov près d’une trajectoire quelconque (trait noir). Une trajectoire voisine (tirets) s’en écarte dans le passé et/ou dans le futur. Une distribution de points (nuage gris) est étirée dans la direction transverse E_u , contractée dans la direction E_s et pas déformée dans la direction neutre du flot E_0 .

Définition 6.2.1. Un flot $\phi_t, t \in \mathbb{R}$ généré par un champ de vecteurs v sur une variété différentiable compacte M est un **flot uniformément hyperbolique (ou d’Anosov)** si en tout point $x \in M$, l’espace tangent se décompose en

$$T_x M = E_0(x) \oplus E_u(x) \oplus E_s(x) \tag{6.2.1}$$

qui est une décomposition continue en x et invariante par le flot, avec $E_0(x) := \mathbb{R}v(x)$ (i.e. espace engendré par $v(x)$), et il existe une métrique $\|\cdot\|$ sur TM , un « **coefficient d’instabilité de Lyapounov** » $\lambda > 1, C > 0$, t.q.

$$\forall w \in E_u(x), \forall t \geq 0, \quad \|(D\phi_t)w\| \geq C\lambda^t \|w\| \tag{6.2.2}$$

$$\forall w \in E_s(x), \forall t \geq 0, \quad \|(D\phi_t)w\| \leq C\lambda^{-t} \|w\|$$

Autrement dit, E_0 est la direction du flot appelée « **direction neutre** », E_u est la direction vers des trajectoires voisines qui divergent dans le futur, appelée « **direction instable** » et E_s est la direction vers des trajectoires voisines qui convergent dans le futur (donc divergent dans le passé), « **direction stable** ». Voir figure 6.2.1. Eq. (6.2.2) signifie en gros que un petit écart à une trajectoire de référence sera amplifié exponentiellement avec le temps t comme

$$\Delta x(t) \geq \lambda^t \Delta x(0) = e^{t/\tau} \Delta x(0) \tag{6.2.3}$$

avec le temps caractéristique $\tau = 1/\log \lambda > 0$.

Théorème 6.2.2. (Anosov 1967) *Le flot géodésique sur la couche d'énergie Σ_E , $E > 0$, d'une variété à courbure sectionnelle < 0 est hyperbolique (ou Anosov).*

Mécanisme de l'instabilité d'Anosov pour un billard dispersif

Il n'est pas évident a priori de relier l'image 6.1.4 (flot représenté en x) et l'image 6.2.1 (flot représenté en $x = (x, \xi)$). Nous allons expliquer cette relation et donner une idée de la preuve (ou plutôt du mécanisme) du Théorème 6.2.2 en discutant le cas d'un billard dispersif (bien que le flot de celui-ci ne soit pas lisse). Remarquons que la dynamique dans un billard plan est une succession de propagations en ligne droite et de réflexions sur des obstacles. Concernant la propagation, voir figure 6.2.2(a), on considère une trajectoire de référence (c'est l'axe z) et on note x l'axe orthogonal, qui sert de « section de Poincaré » : une trajectoire voisine coupe cet axe à la position x et avec un angle i . Après une longueur parcourue L donnée, et au premier ordre en $x, i \ll 1$, les nouvelles valeurs (x', i') sont

$$\begin{pmatrix} x' \\ i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ i \end{pmatrix} + O((x, i)^2)$$

On considère maintenant la réflexion avec un angle d'incidence α sur une paroi ayant un rayon de courbure R au point de réflexion, voir figure 6.2.2(b). Avec les mêmes définitions de (x, i) que précédemment, au point de réflexion, au premier ordre, on trouve que $\begin{pmatrix} x' \\ i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ i \end{pmatrix}$ avec $A := \frac{2}{R \cos \alpha}$. Par composition des deux résultats, pour une propagation de longueur L suivie d'une réflexion (comme sur la figure 6.1.2), on déduit que la matrice de passage est le produit

$$M_{R,\alpha,L} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ A & LA + 1 \end{pmatrix} \quad (6.2.4)$$

Lors de l'évolution on a un produit de telles matrices mais avec des paramètres R, α, L qui changent : on a des intervalles de variations possibles $L_{\min} \leq L \leq L_{\max}$, $R_{\min} \leq R \leq R_{\max}$, $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ donc $A_{\min} = \frac{2}{R_{\max}} \leq A \leq A_{\max} = \infty$. On a $\det M_{R,\alpha,L} = 1$, $\text{Tr} M_{R,\alpha,L} = 2 + LA \geq 2 + L_{\min} A_{\min} > 2$. Par conséquent², $M_{R,\alpha,L}$ a deux valeurs propres réelles l, l^{-1} avec $l > 1$ appelé **coefficient d'instabilité de Lyapounov**. On dit que $M_{R,\alpha,L}$ est une **matrice hyperbolique**.

Pour un vecteur $\begin{pmatrix} x \\ i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, notons sa pente $p = \frac{i}{x} \in \overline{\mathbb{R}} \equiv \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ qui représente sa direction et notons $p' = [M_{R,\alpha,L}](p) = \frac{A+(LA+1)p}{1+Lp}$ l'action de $M_{R,\alpha,L}$ sur les directions. L'observation importante est que l'intervalle $p \in [0, +\infty]$ est envoyé sur l'intervalle

2. Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est une matrice avec $T = \text{Tr}(M) > 2$ et $\text{Det}(M) = 1$ alors ses valeurs propres sont $\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(T \pm \sqrt{T^2 - 4})$ vérifiant $0 < \lambda_- = \lambda_+^{-1} < 1 < \lambda_+$.

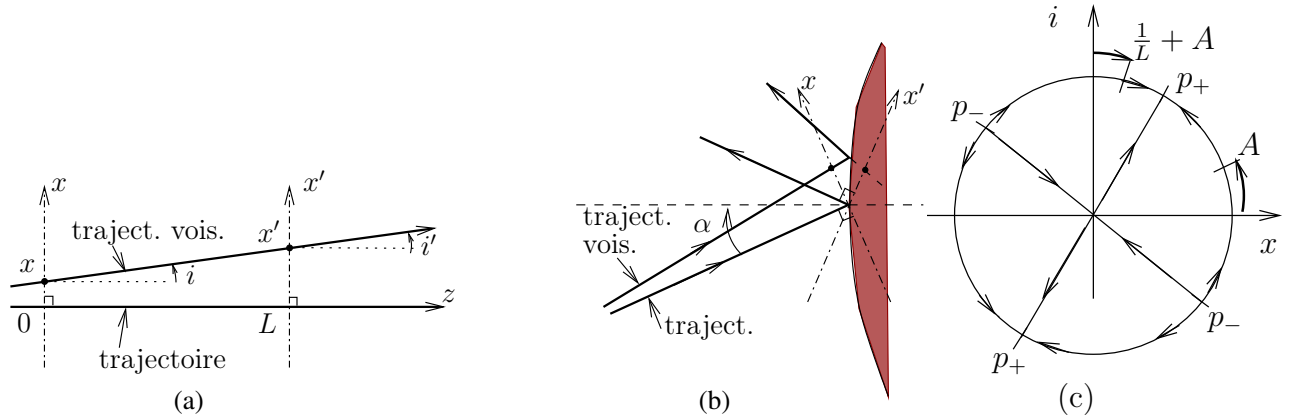


FIGURE 6.2.2 – (a) Section de Poincaré pour une propagation et (b) pour un rebond sur une paroi de rayon R . Une trajectoire voisine est repérée par la position x transverse et l'angle i . (c) dynamique hyperbolique de $p' = [M_{R,\alpha,L}](p)$ sur les directions $p = i/x \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$.

$p' \in [A_{\min}, +\infty]$ et $\frac{d[M_{R,\alpha,L}](p)}{dp} = \frac{1}{(1+Lp)^2} < 1$, autrement dit cet intervalle est strictement contracté, voir figure 6.2.2(c).

Considérons maintenant une suite de points $x_k = (x_k, y_k, \theta_k) \in M, k \in \mathbb{Z}$, sur une même trajectoire, telle que $x_{k+1} = \phi_{t_k}(x_k)$ soit une propagation suivit d'une réflexion comme précédemment. Alors la direction instable $E_u(x_0) \subset T_{x_0}M$ au point x_0 est donnée par l'opération suivante. Tout d'abord $E_u(x_0)$ est orthogonale à la direction de propagation $E_0(x_0)$, et en confondant $E_u(x_0)$ avec la pente p dans le plan (x, i) précédent, en utilisant la trajectoire dans le passé, on a

$$E_u(x_0) = \lim_{N \rightarrow +\infty} (M_{R,\alpha,L}(x_{-1}) \cdot (M_{R,\alpha,L}(x_{-2}) \dots (M_{R,\alpha,L}(x_{-N}) p_0 \quad (6.2.5)$$

où $p_0 \in (0, +\infty)$ est une direction initiale quelconque. Du fait de la contraction stricte, la convergence est exponentielle. De même, en utilisant les points x_k futurs on obtient

$$E_s(x_0) = \lim_{N \rightarrow +\infty} (M_{R,\alpha,L}^{-1}(x_1) \cdot (M_{R,\alpha,L}^{-1}(x_2) \dots (M_{R,\alpha,L}^{-1}(x_N) p_0 \quad (6.2.6)$$

partant d'une direction initiale $p_0 \in (-\infty, 0)$ quelconque. De plus on a l'estimation $\lambda^L \geq \frac{1}{2}l_{\min} \geq 1 + \frac{1}{2}L_{\min}A_{\min}$ soit $\lambda \geq (1 + \frac{1}{2}L_{\min}A_{\min})^{1/L_{\max}} > 1$.

On a ainsi identifié les directions stables et instables E_s, E_u qui entrent dans la décomposition (6.2.1).

Remarque 6.2.3.

- On aperçoit la difficulté dans le cas du billard dispersif qui est que pour $\alpha = \pi/2$ (rebond rasant), on a $A = A_{\max} = \infty$.
- Dans le cas du flot géodésique sur une variété lisse à courbure négative, il n'y a pas cette singularité ($A_{\max} < \infty$) et des expressions (6.2.5) et (6.2.6) on peut déduire que $x_0 \rightarrow E_{u,s}(x_0)$ sont des fonctions Hölder continues (mais pas C^2 en aucun point), tout comme la fonction de Weierstrass [15, chap.11].

Principe d'incertitude quantique et instabilités

Si x est la position et ξ l'impulsion, le principe d'incertitude en mécanique quantique exprime le produit des largeurs³

$$\Delta x \Delta \xi = \hbar. \quad (6.2.7)$$

Interprétation physique : ainsi diminuer Δx augmente $\Delta \xi$ et réciproquement. Rappelons que dans le cas d'une particule libre (3.4.1) on a $\xi = mv = m \frac{dx}{dt}$ qui est la vitesse. Eq.(6.2.7) donne $\Delta x \Delta v = \hbar/m$ qui s'appelle le **principe d'incertitude**. Par exemple pour un électron, $m = 9.10^{-31} \text{kg}$ donc $\hbar/m = 10^2 \text{cm}^2/\text{s}$ est assez important et les effets ondulatoires sont perceptibles à l'échelle humaine sauf que la « décohérence » perturbe cela (pour la lune $m = 7.10^{22} \text{kg}$ donnant $\hbar/m = 10^{-56} \text{m}^2/\text{s}$ qui est imperceptible).

Considérons un « objet quantique » dans un billard dispersif (e.g. une boule de loto qui rebondit dans la machine). Si $m \simeq 10 \text{g}$. alors $\Delta x \Delta v = \hbar/m \simeq 10^{-36} \text{m}^2/\text{s}$ est très petit. Un compromis pour minimiser chaque terme du produit est $\Delta x \simeq 10^{-18} m$ et $\Delta v \simeq 10^{-18} m/\text{s}$. Pour simplifier la discussion, supposons une amplification exponentielle des incertitudes avec le temps, comme (6.2.3), par le facteur $\Delta x(t) \simeq 10^{t/\tau} \Delta x(0)$ avec un temps caractéristique $\tau \sim 1 \text{s}$. Alors la taille de l'incertitude quantique devient $\Delta x(t) \simeq 1 m$ après $t \simeq 18 \text{s}$ seulement ! Cela montre que pour les phénomènes chaotiques, le « hasard quantique » bien que d'origine microscopique, a une influence à notre échelle macroscopique⁴.

6.3 Ergodicité et mélange

6.3.1 Un flot géodésique hyperbolique est mélangeant (et ergodique)

On a vu l'instabilité des trajectoires qui s'exprime par des matrices hyperboliques comme (6.2.4). Il faut aussi noter que la couche d'énergie Σ_E est compacte. La dynamique a donc pour effet d'« étirer » et « replier » les données initiales. Cette succession de processus est le plus efficace pour mélanger les données initiales comme le ferait un boulanger pour mélanger le beurre dans une pâte feuilletée. Avec ce mélange, tout ensemble de données initiales (suffisamment lisse) va s'équidistribuer et converger (au sens des distributions) vers une mesure d'équilibre. C'est cette propriété appelée « mélange » qui exprime le mieux les propriétés chaotiques de la dynamique comme le montre le théorème suivant et la figure 6.3.1.

3. Il est plus naturel d'écrire $\Delta x \Delta (\xi/\hbar) = 1$ puisque $\omega = \xi/\hbar$ est la fréquence spatiale.

4. Cependant l'onde quantique n'apparaît pas à notre échelle, car la décohérence (processus de mesure avec l'environnement) intervient bien avant.

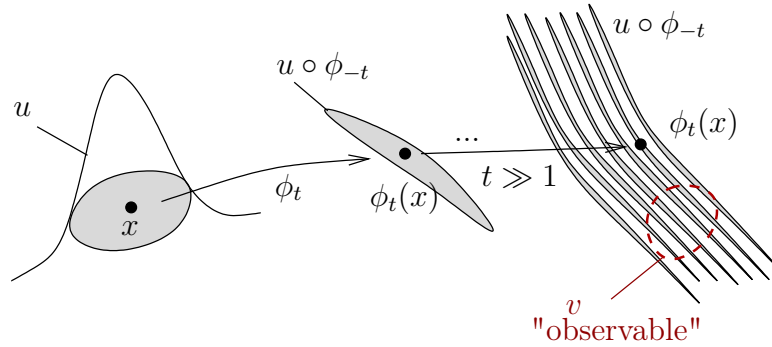


Figure 6.3.1 – Fonction de corrélation $C_{v,u}(t) = \int_M v.(u \circ \phi_{-t}) dx$ et mélange : $C_{v,u}(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\text{Vol}(M)} \int_M v dx \cdot \int_M u dx$.

Théorème 6.3.1. « Anosov » Un flot géodésique Anosov est **mélangeant** : $\forall u, v \in C^\infty(M)$, pour $t \rightarrow \infty$ on a

$$\left| \int_M v.(u \circ \phi_{-t}) dx - \frac{1}{\text{Vol}(M)} \left(\int_M v dx \right) \cdot \left(\int_M u dx \right) \right| \rightarrow 0 \quad (6.3.1)$$

Cela implique la propriété d'**ergodicité** : $\forall u, v \in C^\infty(M)$,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(\int_M v.(u \circ \phi_{-t}) dx \right) dt = \frac{1}{\text{Vol}(M)} \left(\int_M v dx \right) \cdot \left(\int_M u dx \right) \quad (6.3.2)$$

La preuve du mélange est ancienne (Anosov 1967 [2]). Sinai l'a montré pour les billards dispersifs. La preuve du mélange à taux exponentielle est récente [13, 30, 41]. En prenant la moyenne temporelle de la propriété de mélange (6.3.1) on déduit l'ergodicité (6.3.2) (avec le théorème de Cesàro).

Remarque 6.3.2. :

— Le terme

$$C_{v,u}(t) := \int_M v.(u \circ \phi_{-t}) dx = \langle v, \mathcal{L}^{*t}u \rangle_{L^2(M)}$$

dans (6.3.1) s'appelle **fonction de corrélation**. C'est simplement un « élément de matrice » de l'opérateur d'évolution \mathcal{L}^{*t} qui correspond à la fonction u évoluée par le flot : $\mathcal{L}^{*t}u = u \circ \phi_{-t}$ et testée sur une autre fonction (observable) v . (Dans certains ouvrages, cependant, on appelle fonction de corrélation toute l'expression $\int_M v.(u \circ \phi_{-t}) dx - \frac{1}{\text{Vol}(M)} \int v dx \cdot \int u dx$.)

- La propriété de « mélange » (6.3.1) signifie « perte d'information » car $t \rightarrow \infty$, $u \circ \phi_{-t}$ normalisé par le facteur $\frac{1}{\text{Vol}(M)} (\int u dx)$ converge (au sens des distributions) vers la mesure dx . L'ergodicité signifie que « la moyenne temporelle » de u i.e. $\frac{1}{T} \int_0^T u \circ \phi_{-t} dt$ normalisée par $\frac{1}{\text{Vol}(M)} (\int u dx)$ converge (au sens des distributions) vers la mesure dx . On dit que dx est la **mesure d'équilibre** ou **mesure de SRB** (Sinai-Ruelle-Bowen).

(*) **Remarques**

La propriété suivante est en fait une définition plus standard d'« ergodique ».

Proposition 6.3.3. *Le flot ϕ_t préservant la mesure dx est **ergodique** si et seulement si toute fonction L^2 stationnaire est constante (i.e. $u \in L^2(M)$, $u = \mathcal{L}^{*t}u, \forall t \Rightarrow u = \text{cste}$). De façon équivalente ssi tout ensemble mesurable $A \subset M$ tel que $\mathcal{L}^{*t}(A) = A$ (i.e. invariant) vérifie $\text{Vol}(A) = 0$ ou $\text{Vol}(A) = \text{Vol}(M)$.*

Démonstration. Considérons le sous espace des fonctions L^2 stationnaires :

$$\text{Inv} := \{u \in L^2(M), \mathcal{L}^{*t}u = u, \forall t \in \mathbb{R}\} \subset L^2(M)$$

Von Neumann (1932) a montré que [9, p.10] :

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{L}^{*t} dt$$

convergence fortement et que la limite P est le projecteur orthogonal sur Inv (c'est aussi le projecteur spectral de \mathcal{L}^{*t} sur la valeur propre 1, pour tout $t \in \mathbb{R}$). Ainsi

$$\text{Flot ergodique} \stackrel{(6.3.2)}{\Leftrightarrow} P = \langle \cdot, 1 \rangle \langle 1, \cdot \rangle \Leftrightarrow \text{Inv} = \{u = \text{cste}\}.$$

□

6.3.2 Modèle simple du « cat map » qui est mélangeant (et ergodique)

Le modèle simplifié suivant consiste à étudier la dynamique définie par une unique matrice hyperbolique et agissant sur le tore (qui est compact) afin d'avoir les processus « étirement » et « repliement » évoqués plus haut. Considérons la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.3.3)$$

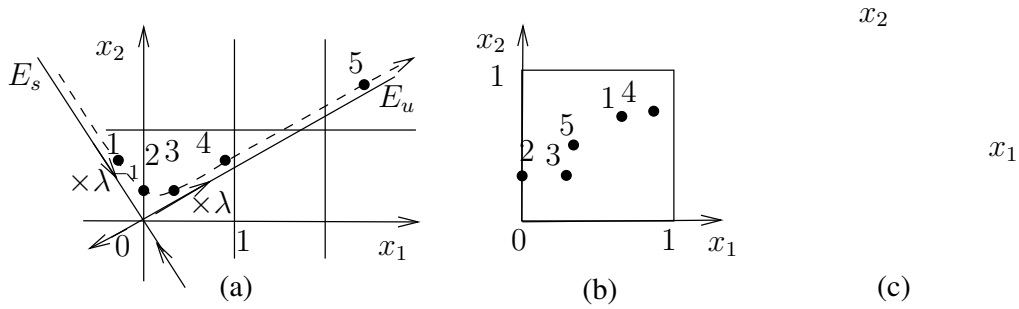


FIGURE 6.3.2 – (a) Trajectoire du point initial $(-0.3, 0.6)$ sous l’application f du « cat map », sur \mathbb{R}^2 (la trajectoire est sur une hyperbole). (b) Après la restriction modulo 1 sur \mathbb{T}^2 , presque toute trajectoire semble imprévisible, « chaotique ». (c) Les pentes des directions stables E_s et instables E_u sont irrationnelles et par conséquent ces droites sont denses sur \mathbb{T}^2 .

qui est « hyperbolique » car ses valeurs propres sont de module différent de 1 :

$$\lambda = \lambda_u = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \simeq 2.6 > 1, \quad \lambda_s = \lambda^{-1} < 1.$$

Les directions propres associées sont E_u, E_s introduites en (6.2.1).

La matrice M définit une dynamique sur \mathbb{R}^2 par $x \rightarrow Mx$. Elle définit⁵ aussi une dynamique sur le tore $\mathbb{T}^2 = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$:

$$f : \begin{cases} \mathbb{T}^2 := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 & \rightarrow \mathbb{T}^2 \\ x & \rightarrow Mx \pmod{\mathbb{Z}^2} \end{cases} \quad (6.3.4)$$

Voir figure 6.3.2.

Le théorème suivant que l’on va démontrer montre que la dynamique du « cat map » (6.3.4) est très chaotique :

Théorème 6.3.4. *Le « cat map » $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ est mélangant à taux super-exponentielle : $\forall \alpha > 0, \forall u, v \in C^\infty(M), \exists C > 0$, pour $n \rightarrow +\infty$,*

$$\left| \int_{\mathbb{T}^2} v \cdot (u \circ f^{-n}) dx - \int v dx \int u dx \right| \leq C e^{-\alpha n} \quad (6.3.5)$$

5. Du fait que la matrice M est à coefficient entiers, l’application f est bien défini : car si $n \in \mathbb{Z}^2$, $x \in \mathbb{R}^2$ alors

$$M(x + n) = Mx + \underbrace{Mn}_{\in \mathbb{Z}^2} = Mx \pmod{\mathbb{Z}^2}$$

De plus le fait que $\det(M)$, cela implique que f est inversible sur \mathbb{T}^2 et $f^{-1}(x) = M^{-1}x$ avec $M^{-1} \in SL_2(\mathbb{Z})$.

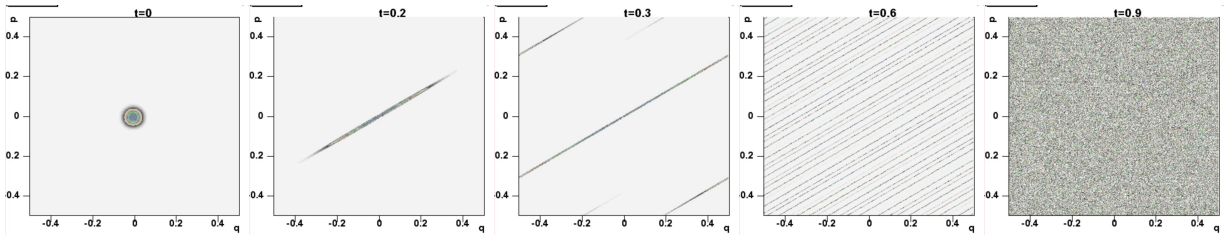


FIGURE 6.3.3 – « Mélange, chaos » dans le modèle du cat map classique : une distribution de points initialement concentrée près du point fixe instable $(0,0)$ se disperse selon la direction instable E_u et converge vers la « distribution d'équilibre ».

Démonstration. Soit $\alpha > 0$ et $k, l \in \mathbb{Z}^2$. Soit $\varphi_k(x) := \exp(i2\pi k \cdot x)$ un **mode de Fourier**. Alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^2} \overline{\varphi_l} \cdot (\varphi_k \circ f^{-n}) dx &= \int \exp(i2\pi (k \cdot M^{-n}x - l \cdot x)) dx \\ &= \int \exp(i2\pi ({}^t M^{-n}k - l) \cdot x) dx = \delta_{{}^t M^{-n}k=l} \end{aligned} \quad (6.3.6)$$

Si $k \neq 0$ alors $|{}^t M^{-n}k| \rightarrow \infty$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ car M est hyperbolique. Donc (6.3.6) devient nul pour n assez grand. Finalement une fonction lisse $u \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ a des coefficients de Fourier $(u_k)_k$ qui décroissent très vite : si $u = \sum_k u_k \varphi_k$ alors $\forall N, \exists C_N \forall k, |u_k| \leq \frac{C_N}{(|k|+1)^N}$. De même pour $v \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$. En utilisant (6.3.6) on a

$$\int_M v \cdot (u \circ f^{-n}) dx = \sum_k \overline{v_l} u_k \delta_{{}^t M^{-n}k=l}$$

Or $|{}^t M^{-n}k| \geq C\lambda^n$ croit exponentiellement donc avec $l = {}^t M^{-n}k$ et k fixé on a $|v_l| \leq \frac{C_N}{(|l|+1)^N} \leq \frac{C'_N}{\lambda^{nN}} = C'_N e^{-n(N \log \lambda)}$ pour tout N . On déduit (6.3.5). Le terme constant $\int v dx \int u dx = v_0 u_0$ provient des composantes $k = l = 0$ qui ne fuient pas à l'infini. \square

Remarque 6.3.5. la preuve ci-dessus (son idée) s'adapte bien au cas des flots Anosov mais en utilisant une décomposition de Fourier locale sur la variété. Pour cela on utilise l'analyse semi-classique [20, 21, 42].

6.4 Théorème central limite et diffusion

On discute maintenant l'observation sur la figure 6.1.1 qu'une distribution de points initialement très proches diffusent sur le plan \mathbb{R}^2 avec un certain coefficient de diffusion D que l'on cherche. Cela expliquerait l'apparence de mouvement brownien de la figure 6.1.1.

On note q_1 la première coordonnée d'une particule dans le billard et $q_1(t)$ sa position à un instant ultérieur $t \geq 0$. On souhaite montrer que pour toute distribution initiale lisse de points, $q_1(t)$ se distribue selon une Gaussienne de largeur $\sim D\sqrt{t}$.

Notons $x = (q, p) = (q_1, q_2, p_1, p_2) \in \Sigma$ un point de la couche d'énergie du billard et $x(t) = \phi^t(x)$ son évolution par le flot. Observons que $p_1 = \frac{dq_1}{dt}$ est la vitesse et donc

$$\int_0^t \frac{dq_1}{ds} ds = q_1(t) - q_1(x)$$

Ainsi

$$q_1(t) = q_1(x(t)) = q_1(x) + (S_t p_1)(x)$$

avec

$$(S_t p_1)(x) := \int_0^t p_1(\phi^s(x)) ds$$

qui est la somme temporelle de la fonction p_1 le long de la trajectoire, aussi appelée **somme de Birkhoff**. On souhaite donc montrer que pour une distribution initiale lisse et quelconque de points x , et pour un temps t assez long, la distribution des valeurs de $\frac{1}{\sqrt{t}}(S_t p_1)(x)$ est une Gaussienne de largeur D .

C'est ce que donne le théorème suivant si on prend la fonction $v(x) = p_1(x)$.

Théorème ([Chernov 90' and others] **Théorème central limite pour les flots hyperboliques**). *Si $v \in C^\infty(M)$ avec $\langle v \rangle_M := \int v(x) dx = 0$ (moyenne nulle), et*

$$(S_t v)(x) := \int_0^t v(\phi^s(x)) ds$$

sa moyenne de Birkhoff, alors $\forall \chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$\int_M \chi\left(\frac{1}{\sqrt{t}}(S_t v)(x)\right) dx \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} C \int_{\mathbb{R}} \chi(X) e^{-\frac{X^2}{2D}} dX, \quad C > 0, \quad (6.4.1)$$

avec $D = \langle v^2 \rangle_M + 2 \int_0^\infty \langle v \cdot v \circ \phi_t \rangle_M dt$ appelé coefficient de diffusion, avec $\langle a \rangle_M := \int_M a(x) dx$ pour la moyenne spatiale d'une fonction $a \in C^\infty(M)$.

— Dans la formule (6.4.1) il faut considérer χ comme une « fonction test » au sens des distributions. Eq.(6.4.1) signifie donc que $\frac{1}{\sqrt{t}}(S_t v)(x)$ se distribue selon une Gaussienne de largeur D , si x est distribué selon la mesure initiale dx . Penser par exemple le cas où χ est (ou approche) la fonction caractéristique d'un intervalle $[a, b]$.

Démonstration. à venir...

□

Chapitre 7

L'attracteur étrange de Lorenz

En 1963, Lorenz a établi un modèle atmosphérique très simplifié qui possède “une forte sensibilité aux conditions initiales”. Cette propriété explique le comportement “chaotique” des solutions du modèle. Nous décrivons l’obtention de ce modèle dans la Section 7.1. Ces équations de Lorenz sont aussi obtenues de façon plus rigoureuse dans un modèle mécanique appelé le “moulin de Lorenz” ou “fontaine turbulente”, présentée à la [cité des sciences de la Vilette](#) et décrit à la Section 7.2.

Les équations de Lorenz sont très simples en apparence, c’est un champ de vecteur dans \mathbb{R}^3 . Numériquement on observe que les trajectoires sont attirées vers un ensemble fractal et une fois proche de cet ensemble, elles ont un comportement chaotique. Cet attracteur s’appelle “l’attracteur étrange” de Lorenz. On étudie la dynamique de ce champ de vecteur en Section 7.3 et suivantes de ce chapitre.

7.1 Modèle de Lorenz pour l’hydrodynamique. Cellules de convection de Bénard

Dans cette Section, on part d’un modèle hydrodynamique simple pour obtenir le système dynamique de Lorenz (7.1.16).

7.1.1 Convection et hydrodynamique

Lorsqu’un fluide est dans le champ de pesanteur, si il est chauffé suffisamment en bas, ou refroidit en haut, on observe qu’il se développe des mouvements de **convection thermique** qui se structurent au départ en “cellules” de rotation ascendante/descendante. Le déclenchement de ce mouvement s’appelle l’**instabilité de Rayleigh (1916)-Bénard (1901)**. Si la différence de température entre le bas et le haut est au dessus d’un certain seuil, des mouvements “chaotiques, turbulents” apparaissent. Les vents dans l’atmosphère, les courants dans les océans, sont des conséquences de la convection thermique ou convection solutale (gradient de concentration de sel par ex. au lieu de gradient thermique). A plus petite échelle, la fumée de cigarette, le tirage d’une cheminée, les mouvements de l’eau

dans une casserole que l'on chauffe. A plus grande échelle, la convection dans le manteau terrestre qui est responsable de la dérive des continents; la convection du plasma dans le soleil.

Voir vidéo des [courants dans l'océan et vents dans l'atmosphère](#). Vidéo des [courants océaniques](#) entre 2005 et 2007 qui montrent des structures complexes.

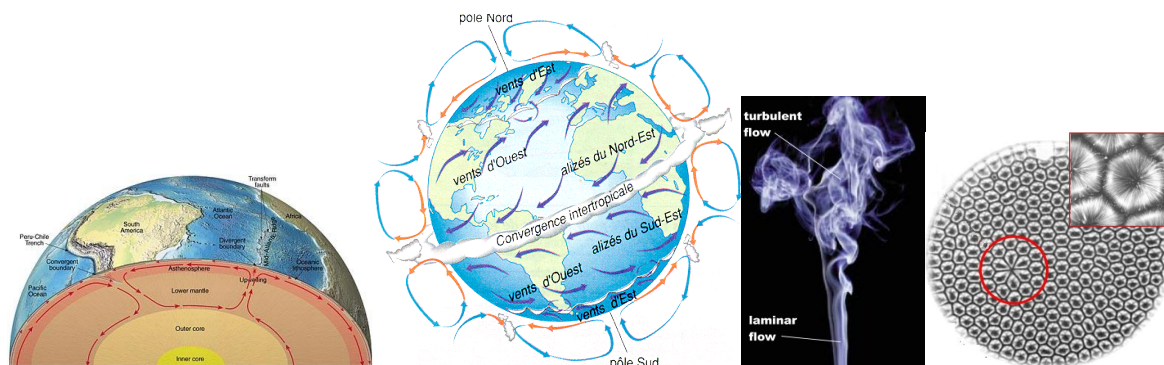


FIGURE 7.1.1 – Convection dans la Nature. Dans le cas de l’atmosphère, la rotation de la Terre induit une force de Coriolis qui joue un rôle important. Fumée de cigarette. Cellules de convection “de Bénard” dans un liquide.

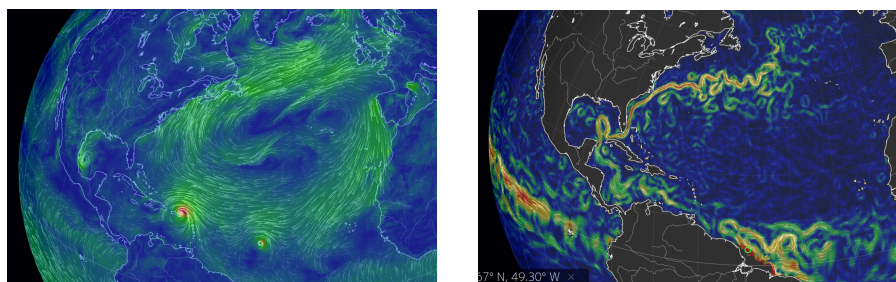


FIGURE 7.1.2 – D’après <https://earth.nullschool.net>. (a) Vent à la surface de l’océan atlantique nord, le 6/09/2017. On aperçoit l’ouragan IRMA. (b) courants à la surface de l’océan le même jour. Dans les zones rouges du gulf-stream, la vitesse atteint 1.5m/s.

Voir ces [expériences numériques](#), voir aussi [ici](#), ou [ici très artistique](#), avec le [code en C](#).

Remarques sur l’historique des équations de la mécanique des fluides

Réf : [14] p27.

Il était crucial d’étudier la mécanique des fluides. En 1748, Euler organise avec l’académie de Berlin un prix pour une étude de “la résistance qu’éprouvent les corps solides dans les fluides”. D’Alembert a rendu un mémoire d’une grande importance car il a été le premier à introduire les opérateurs à dérivées partielles. Il a proposé une équation, où apparaissait correctement de terme de transport, mais le terme de force de pression était incorrect. Euler a refusé ce manuscrit, mais a étudié le problème par lui même. Il a rédigé

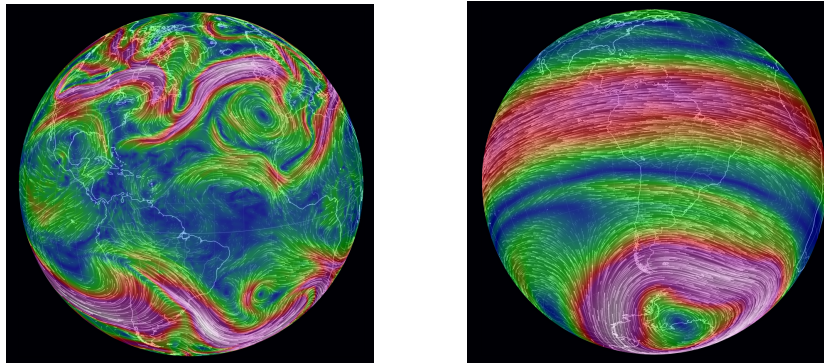


FIGURE 7.1.3 – D’après <https://earth.nullschool.net>. (a) Vent à altitude $h = 10\text{km}$ et (b) à $h = 25\text{km}$. Dans le violet, la vitesse atteint 250km/h .

un mémoire en 1757 avec les “équations de Euler des fluides”. En 1752, le prix a été décerné à un “étudiant de Euler” Jacob Adami. Le terme de forces de cisaillement ont été introduit par **Henri Navier 1823** et **George Gabriel Stokes**.

En 2000, il a été proposé un **prix** de $10^6\text{\$}$ pour toute personne qui **montrerait que les équations de Navier Stokes** en dimension 3, ont un comportement régulier et ne divergent pas en temps fini (ou le contraire). En janvier 2014, Mukhtarbay Otelbayev, (mathématicien kazakh) a écrit un article en russe répondant à cette question. Cela a beaucoup intéressé la communauté internationale. Il y avait une erreur. En 2014, Terence Tao a montré une **explosion des solutions** pour un modèle très proche. Le problème est toujours ouvert et beaucoup de chercheurs sont actifs.

7.1.2 Modèle simplifié de Rayleigh

Voir Figure 7.1.4. On considère un fluide dans une couche d’épaisseur h c’est à dire dans le domaine $(x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, h]$. On va supposer que les phénomènes sont indépendants de la variable y . Dans cette couche on veut étudier la dynamique du **champ de température** $T(x, z, t) \in \mathbb{R}$ et du **champ de vitesse** $\vec{v}(x, z, t) = (v_x, v_z) \in \mathbb{R}^2$.

Sur la surface inférieure $z = 0$, on impose à tout instant $t \in \mathbb{R}$, la valeur $T(x, z = 0, t) = T_0$ et sur la surface supérieure $z = h$, on impose $T(x, z = h, t) = T_0 - \delta T$ avec une différence de température $\delta T \in \mathbb{R}$ donnée.

Référence [29, p.69], [26] et plus mathématiques : [5], [31]. On utilise les coordonnées $(x, z) \in \mathbb{R}^2$ et $t \in \mathbb{R}$. Pour un fluide incompressible, on a

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = \partial_x v_x + \partial_z v_z = 0. \quad (7.1.1)$$

On va écrire l’équation de Navier Stokes qui découle de la loi de Newton et exprime que le fluide est soumis à son poids, aux forces de pression et aux forces de cisaillement. Si $\rho(x, z, t) \in \mathbb{R}$ est la densité (masse volumique), $\vec{g} = (0, -g) \in \mathbb{R}^2$ est l’accélération de la pesanteur ($g = 9.8\text{m/s}^2$), $p(x, z, t)$ est le champ de pression, $\mu > 0$ est la viscosité, les

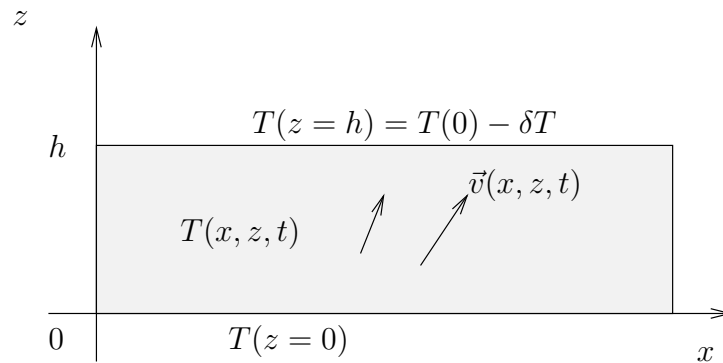


FIGURE 7.1.4 – Modèle de Rayleigh.

équations de Navier Stokes s'écrivent

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{v}}{dt} = \rho \vec{g} - \text{grad} p + \mu \Delta \vec{v}}, \quad (7.1.2)$$

où

$$\frac{D\vec{v}}{dt} := \frac{d}{dt} (\vec{v}(x(t), z(t), t)) = \partial_t \vec{v} + \vec{v} \cdot \text{grad}(\vec{v}) \quad (7.1.3)$$

est la "dérivée particulaire"¹, $\text{grad}(u) := (\partial_x u, \partial_z u)$ et $\Delta u := \partial_x^2 u + \partial_z^2 u$.

On va écrire l'équation de la chaleur (loi de Fourier) qui exprime que l'énergie thermique diffuse du chaud vers le froid. Si $\mathcal{D} > 0$ est le coefficient de diffusion thermique, l'équation de diffusion de la chaleur dans le fluide s'écrit :

$$\boxed{\frac{DT}{dt} = \mathcal{D} \Delta T}. \quad (7.1.4)$$

Dans la proposition suivante on reformule les équations de mouvement du fluide à l'aide de deux fonctions $\psi(x, z, t)$ et $\theta(x, z, t)$.

On introduit les variables sans dimension

$$x' = \frac{1}{h} x, \quad z' = \frac{1}{h} z, \quad t' = \frac{\mathcal{D}}{h^2} t,$$

mais on omettra la notation des ' dans la suite.

1. Précisément : $\frac{D\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{v}(x(t), z(t), t)) = \left(\frac{\partial v_j}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} \right)_j = \left(\frac{\partial v_j}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k} v_k \right)_j =: \left(\partial_t \vec{v} + \vec{v} \cdot \text{grad}(\vec{v}) \right)_j$

Proposition 7.1.1. “*Equations de Saltzmann (1962)*”. En posant

$$\vec{v} = (v_x, v_z) = (\partial_z \psi, -\partial_x \psi),$$

avec une **fonction courant** $\psi(x, z, t)$, et

$$T(x, z, t) = (T_0 - z\delta T) + \delta T \theta(x, z, t)$$

où $\theta(x, z, t)$ représente les fluctuations de températures par rapport au profil linéaire, les équations de mouvement de Navier-Stokes (7.1.2) et de la chaleur (7.1.4) sont équivalentes aux **équations de Saltzmann** :

$$\partial_t \Delta \psi + \{\Delta \psi, \psi\} - R\sigma \partial_x \theta - \sigma \Delta^2 \psi = 0. \quad (7.1.5)$$

$$\partial_t \theta - \{\psi, \theta\} + \partial_x \psi - \Delta \theta = 0. \quad (7.1.6)$$

avec le **nombre de Rayleigh** :

$$R := \frac{\alpha g h^3 \rho_0 \delta T}{\mu \mathcal{D}},$$

où $\rho_0 := \rho(T_0)$, $\alpha := -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{d\rho}{dT} \right) (T_0) > 0$ est le coefficient d'expansion thermique, et avec le **nombre de Prandtl**

$$\sigma := \frac{\mu}{\rho_0 \mathcal{D}},$$

Remarque 7.1.2. Voir Figure 7.1.5 et la preuve ci-dessous, pour la signification de la fonction courant ψ .

Démonstration. On va aussi décrire la variation de densité avec la température au premier ordre (de sa série de Taylor) avec $\rho_0 = \rho(T_0)$ et $\alpha = -\frac{1}{\rho(T_0)} \left(\frac{d\rho}{dT} \right) (T_0) > 0$ qui est le coefficient d'expansion thermique :

$$\rho(T) = \rho_0 (1 - \alpha(T - T_0)) \quad (7.1.7)$$

L'**approximation de Boussinesq** consiste à négliger la dépendance $\rho(T)$ dans le terme $\rho \frac{D\vec{v}}{dt}$ de (7.1.2), c'est à dire de le remplacer par $\rho_0 \frac{D\vec{v}}{dt}$. A propos de (7.1.7) qui semble contredire (7.1.1), car on dit que la densité varie avec T , mais que le fluide est incompressible, lire [5, p.34].

Situation du fluide au repos Lorsque le fluide est au repos, cela signifie que $\vec{v} = 0$. On suppose que le champ de température varie au premier ordre selon z comme :

$$T_{\text{repos}}(z) = T_0 - \left(\frac{z}{h} \right) \delta T \quad (7.1.8)$$

(de sorte que les conditions au bord sont satisfaites). Sa densité est donc

$$\rho_{\text{repos}}(T) \stackrel{(7.1.7)}{=} \rho_0 (1 - \alpha(T_{\text{repos}} - T_0)) \quad (7.1.9)$$

Alors

$$\begin{aligned} \vec{\text{grad}}(p_{\text{repos}}) &\stackrel{(7.1.2)}{=} \rho_{\text{repos}} \vec{g} \stackrel{(7.1.7)}{=} \rho_0 (1 - \alpha (T_{\text{repos}} - T_0)) \vec{g} \\ &\stackrel{(7.1.8)}{=} \rho_0 \left(1 + \frac{\alpha \delta T}{h} z \right) (-g) \vec{u}_z \end{aligned}$$

Donc

$$p_{\text{repos}}(z) = p_0 - g\rho_0 z - \frac{\rho_0 \alpha \delta T}{2h} z^2$$

qui décrit comment la pression décroît avec la hauteur z .

Equations sans dimension La première étape est d'écrire les équations précédentes avec des paramètres sans dimension, afin de simplifier autant que possible le problème au départ. La hauteur h est en mètres m . D'après (7.1.4), le coef \mathcal{D} est en m^2/s donc h^2/\mathcal{D} est en s . On remplace donc les variables (x, z, t) par les variables sans dimension² (x', z', t') :

$$t' := \left(\frac{\mathcal{D}}{h^2} \right) t, \quad x' := \frac{x}{h}, \quad z' := \frac{z}{h}.$$

Donc la vitesse sans dimension est

$$\vec{v}' := \frac{d(x', y', z')}{dt'} = \frac{1}{h} \left(\frac{h^2}{\mathcal{D}} \right) \frac{d(x, y, z)}{dt} = \left(\frac{h}{\mathcal{D}} \right) \vec{v}.$$

On remplace la pression p par un champ $\pi(x', z', t')$ sans dimension qui décrit les variation de p autour de l'équilibre, définit par :

$$p(x, z, t) = p_{\text{repos}}(z) + \frac{\rho_0 \mathcal{D}^2}{h^2} \pi(x', z', t').$$

La température δT est en K . On remplace le champ de température $T(x, z, t)$ par un champ $\theta(x', z', t')$ sans dimension qui décrit les variation de T autour de l'équilibre :

$$T(x, z, t) = T_{\text{repos}}(z) + (\delta T) \theta(x', z', t'). \quad (7.1.10)$$

Remarquer que $\rho \stackrel{(7.1.7)(7.1.9)}{=} \rho_{\text{repos}} - \rho_0 \alpha \delta T \theta$.

Dans la suite, **pour simplifier on n'écrit plus le signe '** sur les nouvelles variables. Après ces changements de variables, les équations (7.1.2) et (7.1.4) deviennent avec l'approximation de Boussinesq :

$$\partial_t \theta + \vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}(\theta) - v_z = \Delta \theta \quad (7.1.11)$$

$$\frac{D\vec{v}}{dt} = -R\sigma\theta\vec{u}_z - \vec{\text{grad}}\pi + \sigma\Delta\vec{v} \quad (7.1.12)$$

2. En d'autres termes, on dirait parfois de façon rapide et incorrecte que l'on choisit $h = 1$ et $\mathcal{D} = 1$.

avec le nombre de Prandtl

$$\sigma := \frac{\mu}{\rho_0 \mathcal{D}},$$

et le nombre de Rayleigh :

$$R := \frac{\alpha g h^3 \rho_0 \delta T}{\mu \mathcal{D}}.$$

Par exemple pour l'eau en conditions ordinaires, $\sigma \sim 7$.

L'équation (7.1.12) contient le terme $\vec{\text{grad}}\pi = (\partial_x \pi, \partial_z \pi)$. Pour l'éliminer on applique ∂_z à la première équation et $-\partial_x$ à la deuxième et on additionne. C'est l'opération de "rotationnel en 2D" d'un champ de vecteur : $\text{rot}(\vec{U}) := \partial_z U_x - \partial_x U_z$. On obtient

$$\frac{D(\text{rot}\vec{v})}{dt} = R\sigma \partial_x \theta + \sigma \Delta(\text{rot}\vec{v}). \quad (7.1.13)$$

Fonction courant, équations de Saltzman (1962) On considère maintenant les équations (7.1.13) et (7.1.11) portant sur les champ de vitesse $\vec{v}(x, z, t)$ et de température $\theta(x, z, t)$ sans dimension, La condition d'incompressibilité (7.1.1), $\text{div}\vec{v} = \partial_x v_x + \partial_z v_z = 0$ implique³ qu'il existe une fonction $\psi(x, z, t)$ appelée **fonction courant** telle que

$$\vec{v} = (v_x, v_z) = \text{grad}_{\text{symp}}(\psi) := (\partial_z \psi, -\partial_x \psi),$$

où l'opérateur $\text{grad}_{\text{symp}}(\psi) := (\partial_z \psi, -\partial_x \psi)$, est appelé **gradient symplectique** de la fonction ψ .

L'opérateur plus habituel $\text{grad}(\psi) = (\partial_x \psi, \partial_z \psi)$ est appelé gradient métrique. On rencontre aussi le gradient symplectique en mécanique analytique où le champ de vitesse dans l'espace des phases est $(\dot{q}, \dot{p}) = (\partial_p H, -\partial_q H) = \text{grad}_{\text{symp}}(H)$. Si $\partial_t H = 0$, on a la conservation de l'énergie $H(q(t), p(t)) = \text{cste}_t$. De même ici, $\vec{v} = \text{grad}_{\text{symp}}(\psi)$ et si $\partial_t \psi = 0$ alors les trajectoires du fluide sont sur les lignes de niveau de ψ . Voir Figure 7.1.5.

On a $\text{rot}(\vec{v}) = \partial_z v_x - \partial_x v_z = \Delta\psi$ donc

$$\frac{D(\text{rot}\vec{v})}{dt} \stackrel{(7.1.3)}{=} \partial_t(\Delta\psi) + \{\Delta\psi, \psi\}$$

où

$$\{A, B\} := \partial_x A \partial_z B - \partial_z A \partial_x B$$

est le **crochet de Poisson** des fonctions A, B . L'équation de Navier Stokes (7.1.13) et l'équation de la chaleur (7.1.11) deviennent

$$\partial_t \Delta\psi + \{\Delta\psi, \psi\} - R\sigma \partial_x \theta - \sigma \Delta^2 \psi = 0. \quad (7.1.14)$$

$$\partial_t \theta - \{\psi, \theta\} + \partial_x \psi - \Delta\theta = 0.$$

Ce sont les **équations de Saltzman** (1962) qu'a ensuite utilisé Lorenz dans son article. □

3. On vérifie aisément que $\text{div}(\text{grad}_{\text{symp}}(\psi)) = 0$. La réciproque s'appelle le **Lemme de Poincaré**

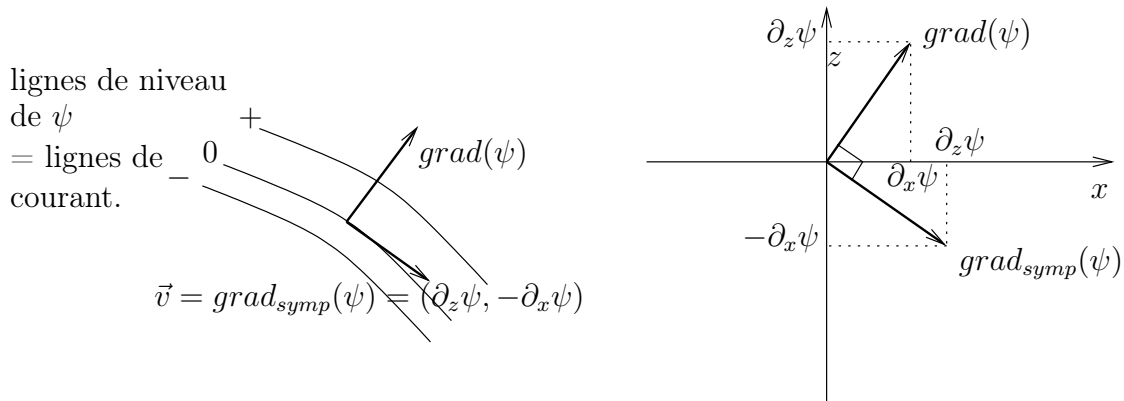


FIGURE 7.1.5 – Le champ de vitesse $\vec{v} = (-\partial_z \psi, \partial_x \psi)$ est tangent aux lignes de niveau de la fonction courant ψ .

7.1.3 Approximation de Lorenz sur quelques modes de Fourier. Équations de Lorenz.

Recherche d'une structure périodique émergente

On suppose à priori que le fluide a une structure périodique en x de période a . Cela signifie que les fonctions $\psi(x, z, t)$ et $\theta(x, z, t)$ sont périodiques en x de période a . On trouvera la valeur de a à la fin du calcul. Cette périodicité se justifie dans le cadre de l'étude de la morphogenèse, voir Chapitre 8. Voir Figure 7.1.6.

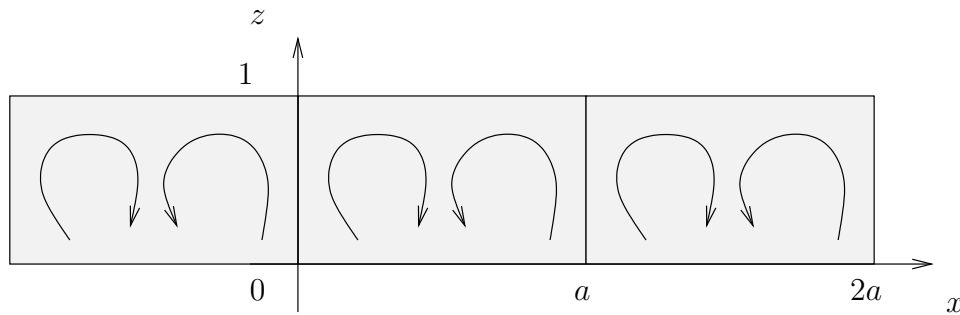


FIGURE 7.1.6 – Structure du fluide périodique en x .

On peut développer les fonctions ψ et θ en modes de Fourier selon x, z .

Lorenz a décidé de ne considérer que les trois modes de plus basse fréquence en posant :

$$\begin{aligned} \psi(x, z, t) &:= \tilde{X}(t) \sin(\pi z) \sin\left(2\pi \frac{x}{a}\right), \\ \theta(x, z, t) &:= \tilde{Y}(t) \sin(\pi z) \cos\left(2\pi \frac{x}{a}\right) - \tilde{Z}(t) \sin(2\pi z) \end{aligned} \quad (7.1.15)$$

7.1. MODÈLE DE LORENZ POUR L'HYDRODYNAMIQUE. CELLULES DE CONVECTION DE BE

où $\tilde{X}(t), \tilde{Y}(t), \tilde{Z}(t), a \in \mathbb{R}$ sont maintenant les inconnues du problème. Ce choix est compatible avec les conditions aux bords qui sont de température constante donc $\theta(z=0,1) = 0$ et vitesse verticale et force de cisaillement nulles $v_z(z=0,1) = \partial_x \psi(z=0,1) = 0$, $\partial_z v_x(z=0,1) = \partial_z^2 \psi(z=0,1) = 0$. Le choix de Lorenz n'est pas justifié, il n'est pas correct rigoureusement, et on discutera de cela en fin de Section. Remarquer que l'amplitude de ψ dépend du temps, mais pas ses lignes de niveaux qui sont les lignes de courant. Autrement dit avec cet ansatz, les trajectoires des particules du fluide sont des lignes fixes qui forment des cercles si $\tilde{X}(t) \neq 0$, mais la vitesse le long de ces lignes, et donc la position, dépend de $\tilde{X}(t)$.

Proposition 7.1.3. Avec l'ansatz de Lorenz (7.1.15) la période spatiale est

$$a = 2\sqrt{2} \sim 2.82 \dots,$$

les équations de mouvement du fluide (7.1.5) s'écrivent sous la forme suivante pour $(X(\tau), Y(\tau), Z(\tau)) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \frac{dX}{d\tau} &= \sigma(-X + Y) \\ \frac{dY}{d\tau} &= rX - Y - XZ \\ \frac{dZ}{d\tau} &= XY - bZ \end{aligned} \tag{7.1.16}$$

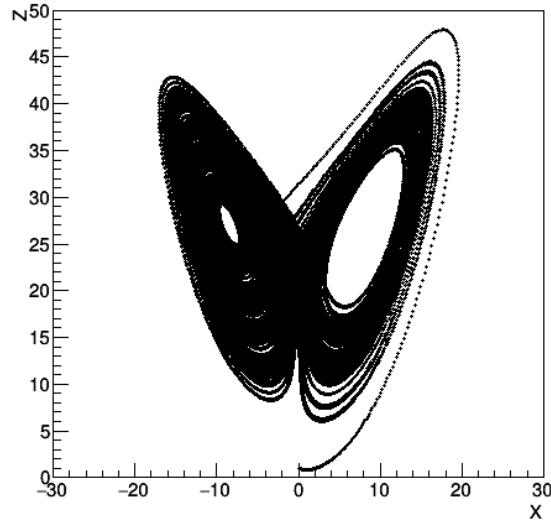
appelées **équations de Lorenz**, avec les paramètres

$$r = \frac{4R}{9\pi^4}, \quad b = \frac{8}{3}, \tag{7.1.17}$$

et le changement de variables $(t, \tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) \in \mathbb{R}^4 \Leftrightarrow (\tau, X, Y, Z) \in \mathbb{R}^4$ donné par

$$t = \frac{2}{3\pi^2}\tau, \quad \tilde{X} = 3X, \quad \tilde{Y} = \frac{\sqrt{2}}{\pi r}Y, \quad \tilde{Z} = \frac{1}{\pi r}Z,$$

Remarque 7.1.4. Dans son article de 1963, Lorenz a étudié ces équations pour les paramètres $\sigma = 10, r = 28, b = 8/3$ et a observé numériquement l'existence d'un "attracteur étrange". C'est ce qui va nous intéresser dans la suite.



Voir une **animation de la trajectoire** sur la [page web](#).

Démonstration. Avec l'ansatz (7.1.15), on veut résoudre les équations (7.1.5). On calcule $\Delta\psi = -\pi^2 \left(1 + \frac{4}{a^2}\right) \psi$ donc

$$\{\Delta\psi, \psi\} = 0 \quad (7.1.18)$$

et $\Delta^2\psi = \pi^4 \left(1 + \frac{4}{a^2}\right)^2 \psi$. Aussi

$$\partial_x \theta = - \left(\frac{2\pi}{a}\right) \tilde{Y} \sin(\pi z) \sin\left(2\pi \frac{x}{a}\right),$$

$$\partial_t \theta = \dot{\tilde{Y}} \sin(\pi z) \cos\left(2\pi \frac{x}{a}\right) - \dot{\tilde{Z}} \sin(2\pi z),$$

$$\{\psi, \theta\} = \left(\frac{2\pi}{a}\right) \frac{\pi}{a} \tilde{X} \tilde{Y} \sin(2\pi z) - \left(\frac{2\pi}{a}\right) 2\pi \tilde{X} \tilde{Y} \frac{1}{2} (\sin(3\pi z) - \sin(\pi z)) \cos\left(2\pi \frac{x}{a}\right).$$

Mais comme le mode de Fourier $\sin(3\pi z) \cos\left(2\pi \frac{x}{a}\right)$ n'est pas dans le choix de Lorenz, on décide de l'ignorer dans la suite. On a

$$\partial_x \psi = \left(\frac{2\pi}{a}\right) \tilde{X} \sin(\pi z) \cos\left(2\pi \frac{x}{a}\right)$$

$$\Delta\theta = -\pi^2 \left(1 + \frac{4}{a^2}\right) \tilde{Y} \sin(\pi z) \cos\left(2\pi \frac{x}{a}\right) + (2\pi)^2 \tilde{Z} \sin(2\pi z)$$

7.1. MODÈLE DE LORENZ POUR L'HYDRODYNAMIQUE. CELLULES DE CONVECTION DE BE

Les équations (7.1.5) donnent

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{X}}{d\tilde{t}} &= -\sigma\pi^2 \left(1 + \frac{4}{a^2}\right) \tilde{X} + \frac{2R\sigma}{a\pi \left(1 + \frac{4}{a^2}\right)} \tilde{Y} \\ \frac{d\tilde{Y}}{d\tilde{t}} &= \left(\frac{2\pi}{a}\right) \tilde{X} - \pi^2 \left(1 + \frac{4}{a^2}\right) \tilde{Y} - \frac{2\pi^2}{a} \tilde{X}\tilde{Z} \\ \frac{d\tilde{Z}}{d\tilde{t}} &= -(2\pi)^2 \tilde{Z} + \frac{\pi^2}{a} \tilde{X}\tilde{Y}\end{aligned}$$

Afin de simplifier cette expression on fait le changement d'échelle $(\tilde{t}, \tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) \Leftrightarrow (t, X, Y, Z)$ donné par :

$$\tilde{t} = \alpha t, \quad \tilde{X} = \beta X, \quad \tilde{Y} = \gamma Y, \quad \tilde{Z} = \delta Z,$$

avec des coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ que l'on recherche. On obtient les équations de Lorenz

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= \sigma(-X + Y) \\ \frac{dY}{dt} &= rX - Y - XZ \\ \frac{dZ}{dt} &= XY - bZ\end{aligned}\tag{7.1.19}$$

Avec

$$r := \frac{4R}{\pi^4 a^2 \left(1 + \frac{4}{a^2}\right)^3}, \quad b = \frac{4}{\left(1 + \frac{4}{a^2}\right)}, \quad \sigma$$

qui sont les 3 paramètres indépendants du modèle et

$$\alpha = \frac{1}{4\pi^2} b, \quad \beta = \frac{4a}{\sqrt{2}b}, \quad \delta = \frac{1}{\pi r}, \quad \gamma = \frac{\sqrt{2}}{\pi r}.$$

Choix de la longueur d'onde a On cherche la valeur de a telle que la solution du fluide au repos, $\vec{v} = 0$, $\theta = 0$ devienne instable pour la plus petite valeur de δT . Cela sera la "structure émergente". C'est équivalent à chercher a tel que le point fixe $X, Y, Z = 0, 0, 0$ devienne instable pour la plus petite valeur de r .

Pour répondre, les équations de Lorenz linéarisées en $0, 0, 0$ sont

$$\begin{pmatrix} \frac{dX}{dt} \\ \frac{dY}{dt} \\ \frac{dZ}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

On observe que $Z(t) = Z(0)e^{-bt}$ est stable. Les variables (X, Y) sont instables si et seulement si au moins une des valeurs propres λ_1, λ_2 de la sous matrice $M = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma \\ r & -1 \end{pmatrix}$

est positive. C'est équivalent à la condition $\det M = \lambda_1 \lambda_2 < 0$ (car $\text{Tr} M = \lambda_1 + \lambda_2 = -\sigma - 1 < 0$). Soit la condition

$$\sigma(1-r) < 0 \Leftrightarrow r > 1 \Leftrightarrow R > f(a) := \frac{\pi^4 a^2}{4} \left(1 + \frac{4}{a^2}\right)^3$$

On calcule que la fonction $f(a)$ admet un minimum en

$$a = 2\sqrt{2} \sim 2.82 \dots$$

qui est donc le seuil recherché. Cela donne les valeurs suivantes du modèle

$$\begin{aligned} r &= \frac{4R}{9\pi^4}, & b &= \frac{8}{3}, & \sigma, & & (7.1.20) \\ \alpha &= \frac{2}{3\pi^2}, & \beta &= 3, & \delta &= \frac{1}{\pi r}, & \gamma &= \frac{\sqrt{2}}{\pi r}. \end{aligned}$$

□

Remarque 7.1.5. Dans les équations de Lorenz (7.1.16), il y a deux “termes non linéaires” qui sont XY et XZ . Ils proviennent non pas du terme non linéaire $\vec{v} \cdot \text{grad} \vec{v}$ qui est au départ dans les équations de Navier Stokes et qui a disparu dans (7.1.18), mais du terme $\{\psi, \theta\}$ qui provient de $\vec{v} \cdot \text{grad} T$ dans l'équation de la chaleur (7.1.4).

On a vu que au seuil d'instabilité, on a $r = 1$ et l'approximation de Lorenz utilisant quelques modes de longueur d'onde a , (7.1.15) est justifiée, car les autres modes sont stables et donc s'amortissent. Au delà, si $r > 1$, cette approximation n'est plus justifiée. Il devrait apparaitre d'autres longueurs d'ondes et d'autres modes de Fourier dans le fluide. Des **expériences numériques** le montrent bien. Voir aussi **ici**, ou **ici très artistique**, avec le **code en C**.

7.1.4 De retour au mouvement du fluide

On étudiera en détail la dynamique du modèle de Lorenz (7.1.16). Pour le moment **observons** un comportement régulier ou chaotique selon le nombre de Reynolds r .

Les variables $X(t), Y(t), Z(t)$ des équations de Lorenz paramétrisent le champ de vitesse et de température d'après (7.1.15) et (7.1.10).

7.2 Le moulin de Lorenz

Référence : Livre de Sparrow, “Lorenz equation” page 194.

Dans cette Section on part d'un modèle mécanique simple pour obtenir les même équations de mouvement de Lorenz, mais qui auront bien sûr un autre sens physique.

C'est un dispositif physique imaginé par Malkus et Howard en 1973 suite à l'article de Lorenz 1963 qui au départ présentait une étude de la dynamique chaotique en hydrodynamique, mais avec de nombreuses approximations non justifiées et non correctes en fait

(Section 7.1). L'objectif de Malkus et Howard était d'obtenir ces équations à partir d'un modèle physique de façon correcte.

On considère une roue verticale (ou penchée) avec N gobelets percés uniformément répartis sur un cercle. Il y a un flux d'eau entrant constant en temps. Voir figure 7.2.1.

La question est de prédire la position $\theta_0(t)$ du gobelet 0? (ou sa vitesse angulaire $\omega(t) = \frac{d\theta_0}{dt}$)

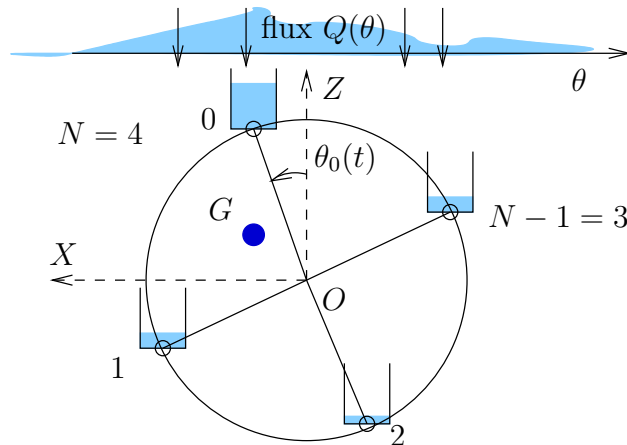


FIGURE 7.2.1 – Moulin de Lorenz

7.2.1 Modélisation physique et équations de Lorenz

Voir figure 7.2.1. Soit $N \geq 2$ le nombre de gobelets percés numérotés par $j = 0, \dots, N-1$ et disposés sur une roue de rayon R et sans masse. Le gobelet j est à la position angulaire

$$\theta_j(t) = \theta_0(t) + 2\pi \frac{j}{N}, \quad (7.2.1)$$

où $\theta_0(t)$ est inconnue mesurée depuis l'axe vertical. On note $m_j(t)$ la masse d'eau contenue dans le gobelet j à la date t . On note $Q(\theta)$ le flux d'eau entrant à la position θ (noter que $Q(\theta)$ est une fonction connue). $K > 0$ est le taux de fuite de chaque gobelet, c'est à dire que $Km_j(t)$ est le flux d'eau sortant du gobelet j à la date t . Chaque gobelet subit son poids (uniquement celui de l'eau qu'il contient). $\gamma > 0$ est le coefficient de frottement de la roue (donnant une force $-\gamma.v$ où $v = R\omega$ est la vitesse tangentielle et $\omega = \dot{\theta}_0$).

L'équation concernant l'évolution de la masse du gobelet j est

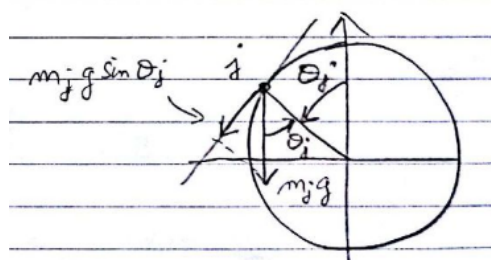
$$\frac{dm_j(t)}{dt} = Q(\theta_j(t)) - Km_j(t) \quad (7.2.2)$$

On pose

$$M(t) := \sum_{j=0}^{N-1} m_j(t)$$

qui est la **masse totale d'eau** dans les gobelets à la date t . L'**équation de mouvement de Newton pour la roue** est

$$\frac{d}{dt} \left(\underbrace{M(t) R\omega}_{\text{impulsion}} \right) = -\gamma R\omega + \sum_{j=0}^{N-1} \underbrace{m_j(t) g \sin \theta_j(t)}_{\text{composante tang. du poids}} \quad (7.2.3)$$



On introduit le **centre de masse** des N gobelets (ou barycentre) qui est le point G sur la figure 7.2.1 défini par

$$\vec{OG} = \frac{1}{M(t)} \sum_{j=0}^{N-1} m_j \vec{Oj}.$$

On note $(X_G(t), Z_G(t)) \in \mathbb{R}^2$ ses coordonnées sur les axes de la figure 7.2.1.

On note $\tilde{Q}_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} Q(\theta) d\theta \in \mathbb{C}$ les coefficients de Fourier de la fonction $Q(\theta)$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Inversement la fonction s'exprime à partir de ses coefficients de Fourier par

$$Q(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{Q}_k e^{ik\theta} \quad (7.2.4)$$

Pour la suite on fera les hypothèses suivantes (ce sont des "hypothèses techniques" afin de pouvoir faire les calculs).

Hypothèse 7.2.1. Concernant le flux d'eau entrant, on suppose $Q(-\theta) = Q(\theta)$ (fonction paire) donc

$$\tilde{Q}_{-k} = \tilde{Q}_k \in \mathbb{R}. \quad (7.2.5)$$

On supposera aussi que

$$\tilde{Q}_k = 0, \quad \text{pour } |k| \geq N-1. \quad (7.2.6)$$

autrement dit que seuls les petits modes de Fourier de $Q(\theta)$ sont non nuls^a.

a. Par exemple $Q(\theta) = \tilde{Q}_0 + \tilde{Q}_1 2 \cos \theta$ avec $\frac{1}{2} \tilde{Q}_0 \geq \tilde{Q}_1 > 0$.

La proposition suivante montre que la dynamique du moulin se réduit à un champ de vecteur dans \mathbb{R}^3 , c'est à dire trois variables couplées.

Proposition 7.2.2. *La masse totale devient rapidement constante : $M(t) = M + O(e^{-Kt})$ avec $M = \frac{N\tilde{Q}_0}{K}$. On introduit le changement de variables $(t, \omega(t), X_G(t), Z_G(t)) \Leftrightarrow (\tau, X(\tau), Y(\tau), Z(\tau))$:*

$$X(\tau) := \alpha\omega(t), \quad Y(\tau) := \beta X_G, \quad Z(\tau) := \lambda_1 Z_G + \lambda_2, \quad \tau := Kt,$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{K}, \quad \beta = \frac{gM}{K\gamma R^2}, \quad \lambda_1 = -\beta, \quad \lambda_2 = \frac{g\tilde{Q}_1}{RK^2\gamma}.$$

Alors, pour les temps $t \gg \frac{1}{K}$, les équations de mouvement (7.2.3) sont équivalentes aux "équations de Lorenz"

$$\begin{aligned} \frac{dX}{d\tau} &= \sigma(-X + Y), \\ \frac{dY}{d\tau} &= rX - Y - XZ, \\ \frac{dZ}{d\tau} &= XY - bZ \end{aligned} \tag{7.2.7}$$

avec

$$\sigma = \frac{\gamma}{KM}, \quad r = \lambda_2, \quad b = 1.$$

En effet, ces équations donnent $\omega(t) = KX(\tau)$. $\theta_0(t)$ se retrouve en intégrant $\omega(t) = \frac{d\theta_0(t)}{dt}$ et les masses $(m_j(t))_{j=1\dots N}$ se retrouvent en intégrant (7.2.2).

7.2.2 Preuve de la Proposition 7.2.2

Cette Section concerne la preuve de la Proposition 7.2.2.

Évolution de la masse totale $M(t)$ On a le résultat suivant :

Proposition 7.2.3. *La masse totale d'eau évolue d'après*

$$M(t) = (M(0) - M_\infty)e^{-Kt} + M_\infty$$

avec

$$M_\infty = \frac{N\tilde{Q}_0}{K},$$

et donc

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M(t) = M_\infty.$$

La convergence se fait avec le temps caractéristique $\tau = \frac{1}{K}$. Autrement dit pour $t \gg \frac{1}{K}$, la masse totale d'eau $M(t)$ dans les gobelets est quasi-constante.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= \sum_j \frac{dm_j}{dt} \stackrel{(7.2.2)}{=} \sum_j Q(\theta_j(t)) - Km_j(t) \\ &\stackrel{(7.2.4), (7.2.1)}{=} \left(\sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{Q}_k e^{ik(\theta_0(t) + 2\pi \frac{j}{N})} \right) - KM(t) \end{aligned}$$

or pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a

$$\sum_{j=0}^{N-1} e^{i2\pi jk/N} = N\delta_{k=0 \bmod N} \quad (7.2.8)$$

c'est à dire $= N$ si $k = \dots -N, 0, N, 2N, \dots$ et $= 0$ sinon (car c'est une série géométrique⁴).
Donc

$$\begin{aligned} \frac{dM(t)}{dt} &= N \sum_{k=0 \bmod N} \tilde{Q}_k e^{ik\theta_0(t)} - KM(t) \\ &\stackrel{(\text{??})}{=} N\tilde{Q}_0 - KM(t) \end{aligned}$$

On a obtenu une simple équation différentielle ordinaire à une variable que l'on va résoudre. C'est un champ de vecteur sur \mathbb{R} , ayant un point fixe en M_∞ donné par $\frac{dM}{dt} = 0$, soit

$$M_\infty = \frac{N\tilde{Q}_0}{K}.$$

Si on pose $\delta(t) := M(t) - M_\infty$ (changement de variable), on a

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{dM}{dt} = N\tilde{Q}_0 - KM = N\tilde{Q}_0 - K(\delta + M_\infty) = -K\delta(t)$$

dont la solution est

$$\delta(t) = \delta(0) e^{-Kt}$$

□

4.

Démonstration. Soit $S := \sum_{j=0}^{N-1} e^{i2\pi jk/N} = \sum_{j=0}^{N-1} (e^{i2\pi k/N})^j$ qui est une série géométrique. Si $e^{i2\pi k/N} = 1$ cad $k = 0 \bmod N$ alors $S = N$. Sinon, cad si $(e^{i2\pi k/N} - 1) \neq 0$ alors on a $e^{i2\pi k/N} S = \sum_{j=1}^N (e^{i2\pi k/N})^j$ donc

$$e^{i2\pi k/N} S - S = \left(e^{i2\pi k/N} \right)^N - \left(e^{i2\pi k/N} \right)^0 = e^{i2\pi k} - 1 = 0$$

et donc $S = 0$. Le résultat s'écrit donc $\sum_{j=0}^{N-1} e^{i2\pi jk/N} = N\delta_{k=0 \bmod N}$. □

Équations du mouvement D'après la proposition ??, pour des temps $t \gg \frac{1}{K}$ on considère que $M(t) \sim M_\infty$ est constant. Mais cela ne signifie pas que la masse $m_j(t)$ de chaque gobelet est constante. Au contraire la répartition de la masse totale fluctue, et c'est ce que l'on étudie dans la suite. Il sera utile d'introduire le centre de masse des N gobelets (ou barycentre) qui est le point G sur la figure 7.2.1 défini par

$$\vec{OG} = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{N-1} m_j \vec{Oj}.$$

Si on note (X_G, Z_G) ses coordonnées sur les axes de la figure 7.2.1, on a donc

$$X_G = \frac{1}{M} \sum_j m_j R \sin \theta_j \quad (7.2.9)$$

$$Z_G = \frac{1}{M} \sum_j m_j R \cos \theta_j \quad (7.2.10)$$

Proposition 7.2.4. *L'équation de Newton (7.2.3) donne les trois équations de mouvement*

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\gamma}{M_\infty} \omega(t) + \frac{g}{R^2} X_G(t) \quad (7.2.11)$$

$$\frac{dX_G(t)}{dt} = -K X_G(t) + \omega Z_G(t). \quad (7.2.12)$$

$$\frac{dZ_G(t)}{dt} = \frac{RN\tilde{Q}_1}{M} - K Z_G(t) - \omega X_G(t). \quad (7.2.13)$$

Ces trois équations (7.2.11), (7.2.12), (7.2.13) forment un système de O.D.E. pour les trois variables $(\omega(t), X_G(t), Z_G(t)) \in \mathbb{R}^3$, autrement dit définissent un champ de vecteur sur \mathbb{R}^3 que nous allons ensuite étudier. Toutes les variables dynamiques du problème en découlent, par exemple on déduit $\theta_0(t)$ en intégrant l'équation $\frac{d\theta_0}{dt} = \omega(t)$, on déduit $\theta_j(t)$ par (7.2.1) et $m_j(t)$ en intégrant l'équation (7.2.2).

Démonstration. Eq.(7.2.3) donne

$$\begin{aligned} M_\infty \frac{d\omega}{dt} &= -\gamma\omega + \frac{1}{R} \sum_{j=0}^{N-1} m_j(t) g \sin \theta_j(t) \\ &\stackrel{(7.2.9)}{=} -\gamma\omega + \frac{M_\infty g}{R^2} X_G \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\omega}{dt} = -\frac{\gamma}{M_\infty} \omega(t) + \frac{g}{R^2} X_G(t) \quad (7.2.14)$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}
\frac{dX_G(t)}{dt} &\stackrel{(7.2.9)}{=} \frac{1}{M} \sum_j \frac{dm_j}{dt} R \sin \theta_j + m_j R \frac{d\theta_j}{dt} \cos \theta_j \\
&\stackrel{(8.5.5)}{=} \frac{1}{M} \sum_j (Q(\theta_j) - K m_j) R \sin \theta_j + m_j R \omega \cos \theta_j \\
&\stackrel{(7.2.10)}{=} \frac{R}{M} \left(\sum_j Q(\theta_j) \sin \theta_j \right) - K X_G + \omega Z_G
\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}
\sum_j Q(\theta_j) \sin \theta_j &\stackrel{(7.2.4)}{=} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{Q}_k e^{ik\theta_j} \frac{(e^{i\theta_j} - e^{-i\theta_j})}{2i} \\
&\stackrel{(7.2.1)}{=} \frac{1}{2i} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{Q}_k \left(e^{i(k+1)(\theta_0 + 2\pi \frac{j}{N})} - e^{i(k-1)(\theta_0 + 2\pi \frac{j}{N})} \right) \\
&\stackrel{(7.2.8)}{=} \frac{1}{2i} \sum_{k+1=0 \bmod N} \tilde{Q}_k e^{i(k+1)(\theta_0 + 2\pi \frac{j}{N})} - \frac{1}{2i} \sum_{k-1=0 \bmod N} \tilde{Q}_k e^{i(k-1)(\theta_0 + 2\pi \frac{j}{N})} \\
&\stackrel{(??.)}{=} \frac{1}{2i} (\tilde{Q}_{-1} - \tilde{Q}_1) \\
&\stackrel{(??.)}{=} 0
\end{aligned}$$

donc

$$\frac{dX_G(t)}{dt} = -K X_G(t) + \omega Z_G(t). \tag{7.2.15}$$

De même on a

$$\begin{aligned}
\frac{dZ_G}{dt} &\stackrel{(7.2.10)}{=} \frac{1}{M} \sum_j \frac{dm_j}{dt} R \cos \theta_j - m_j R \frac{d\theta_j}{dt} \sin \theta_j \\
&\stackrel{(8.5.5)}{=} \frac{1}{M} \sum_j (Q(\theta_j) - K m_j) R \cos \theta_j - m_j R \omega \sin \theta_j \\
&\stackrel{(7.2.9)}{=} \frac{R}{M} \left(\sum_j Q(\theta_j) \cos \theta_j \right) - K Z_G - \omega X_G
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\sum_j Q(\theta_j) \cos \theta_j &\stackrel{(7.2.4)}{=} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{Q}_k e^{ik\theta_j} \frac{(e^{i\theta_j} + e^{-i\theta_j})}{2} \\
&\stackrel{(7.2.1)}{=} \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{Q}_k \left(e^{i(k+1)(\theta_0 + 2\pi \frac{j}{N})} + e^{i(k-1)(\theta_0 + 2\pi \frac{j}{N})} \right) \\
&\stackrel{(7.2.8)}{=} \frac{1}{2} \sum_{k+1=0 \bmod N} \tilde{Q}_k e^{i(k+1)(\theta_0 + 2\pi \frac{j}{N})} + \frac{1}{2} \sum_{k-1=0 \bmod N} \tilde{Q}_k e^{i(k-1)(\theta_0 + 2\pi \frac{j}{N})} \\
&\stackrel{(??.)}{=} \frac{N}{2} (\tilde{Q}_{-1} + \tilde{Q}_1) \\
&\stackrel{(??.)}{=} N\tilde{Q}_1
\end{aligned}$$

donc

$$\frac{dZ_G(t)}{dt} = \frac{RN\tilde{Q}_1}{M} - KZ_G(t) - \omega X_G(t). \quad (7.2.16)$$

□

Equations de Lorenz On va mettre les 3 équations de mouvement précédentes sous “forme normale” c’est à dire simplifier au maximum leur expression.

Proposition 7.2.5. Avec le changement de variables $(t, \omega(t), X_G(t), Z_G(t)) \Leftrightarrow (\tau, x(\tau), y(\tau), z(\tau))$ et une renormalisation du temps $\tau := Kt$ de la forme :

$$x(\tau) := \alpha\omega(t), \quad y(\tau) := \beta X_G, \quad z(\tau) := \lambda_1 Z_G + \lambda_2$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{K}, \quad \beta = \frac{gM}{K\gamma R^2}, \quad \lambda_1 = -\beta, \quad \lambda_2 = \frac{gN\tilde{Q}_1}{RK^2\gamma},$$

on obtient les “équations de Lorenz”

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{d\tau} &= \sigma(-x + y), \\
\frac{dy}{d\tau} &= rx - y - xz, \\
\frac{dz}{d\tau} &= xy - bz
\end{aligned}$$

avec

$$\sigma = \frac{\gamma}{KM}, \quad r = \lambda_2, \quad b = 1.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \alpha \frac{d\omega}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{\alpha}{K} \frac{d\omega}{dt} \\ &\stackrel{(\text{??})}{=} \frac{\alpha}{K} \left(-\frac{\gamma}{M_\infty} \omega + \frac{g}{R^2} X_G \right) = \frac{\alpha}{K} \left(-\frac{\gamma}{M\alpha} x + \frac{g}{R^2\beta} y \right) \\ &= -\frac{\gamma}{MK} x + \frac{\alpha g}{KR^2\beta} y = \sigma(-x + y)\end{aligned}$$

à condition que

$$\sigma = \frac{\gamma}{MK} = \frac{\alpha g}{KR^2\beta}$$

c'est à dire

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{R^2\gamma}{Mg}. \quad (7.2.17)$$

On a

$$\begin{aligned}\frac{dy}{d\tau} &= \frac{\beta}{K} \frac{dX_G}{dt} \stackrel{(\text{??})}{=} \frac{\beta}{K} (-KX_G + \omega Z_G) \\ &= \frac{\beta}{K} \left(-\frac{K}{\beta} y + \frac{x}{\alpha\lambda_1} (z - \lambda_2) \right) = -y + \frac{\beta}{K\alpha\lambda_1} xz - \frac{\beta\lambda_2}{K\alpha\lambda_1} x \\ &= rx - y - xz\end{aligned}$$

à condition que

$$\frac{\beta}{K\alpha\lambda_1} = -1 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} = -\frac{1}{K\lambda_1} \stackrel{(7.2.17)}{=} \frac{R^2\gamma}{Mg}$$

donc

$$\lambda_1 = -\frac{Mg}{KR^2\gamma}$$

et

$$r = -\frac{\beta\lambda_2}{K\alpha\lambda_1} = \lambda_2.$$

On a

$$\begin{aligned}\frac{dz}{d\tau} &= \frac{\lambda_1}{K} \frac{dZ_G}{dt} \stackrel{(\text{??})}{=} \frac{\lambda_1}{K} \left(\frac{RN\tilde{Q}_1}{M} - KZ_G - \omega X_G \right) \\ &= \frac{\lambda_1}{K} \left(\frac{RN\tilde{Q}_1}{M} - \frac{K}{\lambda_1} (z - \lambda_2) - \frac{1}{\alpha\beta} xy \right) \\ &= \frac{\lambda_1 RN\tilde{Q}_1}{KM} + \lambda_2 - z - \frac{\lambda_1}{K\alpha\beta} xy \\ &= -\frac{gN\tilde{Q}_1}{K^2R\gamma} + \lambda_2 - z + \frac{1}{K^2\alpha^2} xy \\ &= xy - bz\end{aligned}$$

à condition que

$$\lambda_2 = \frac{gN\tilde{Q}_1}{K^2R\gamma}, \quad b = 1, \quad \alpha = \frac{1}{K}.$$

□

7.3 Etude des équations de mouvement de Lorenz

On considère maintenant les **équations de Lorenz** obtenues dans un modèle hydrodynamique dans Eq.(7.1.16) et dans un modèle mécanique bien différent dans Eq.(7.2.7). Pour les variables $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \in \mathbb{R}^3$ et $t \in \mathbb{R}$, les équations de Lorenz sont :

$$\frac{dx_1}{dt} = \sigma(-x_1 + x_2), \quad (7.3.1)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = rx_1 - x_2 - x_1x_3, \quad (7.3.2)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_1x_2 - bx_3 \quad (7.3.3)$$

Elle dépendent de trois paramètres $\sigma, r, b > 0$ que l'on supposera positifs. Ces équations s'écrivent sous la forme

$$\frac{dx}{dt} = X(x) \quad (7.3.4)$$

et définissent un champ de vecteur sur l'espace $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ noté $X(x) = (X_1(x), X_2(x), X_3(x))$ avec les composantes $X_1(x) = \sigma(-x_1 + x_2)$, $X_2(x) = rx_1 - x_2 - x_1x_3$, $X_3(x) = x_1x_2 - bx_3$. Pour un point initial $x \in \mathbb{R}^3$ donné, on note $\phi^t(x) = x(t)$ la trajectoire issue de ce point au temps $t \in \mathbb{R}$. Ainsi

$$\phi^t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

est appelé le **flot** au temps $t \in \mathbb{R}$. L'expression du champ de vecteur $X(x)$ est connue, mais l'expression du flot $\phi^t(x)$ n'est pas connue. C'est l'objet de cette Section que d'étudier ce flot et ses propriétés.

Remarque 7.3.1. Les paramètres considérés par Lorenz dans son article de 1963 sont

$$\sigma = 10, \quad r = 28, \quad b = 8/3. \quad (7.3.5)$$

7.3.1 Points fixes et leur stabilité

On considère le champ de vecteur (7.3.1). On rappelle les définitions de la Section 2.2.

Proposition 7.3.2. *Il y a*

1. *un point fixe en*

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

En ce point, les valeurs propres du flot linéarisé sont

$$\lambda_{\pm} = \frac{T \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \lambda_3 = -b$$

avec $T = -(1 + \sigma)$, $D = \sigma(1 - r)$, $\Delta = T^2 - 4D = (1 - \sigma)^2 + 4\sigma r$. *Les vecteurs*

propres associés sont $U_{\pm} = \begin{pmatrix} T \pm \sqrt{\Delta} + 2 \\ 2r \\ 0 \end{pmatrix}$, $U_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

— *Pour* $0 < r < 1$, *on a* $\lambda_{\pm}, \lambda_3 < 0$ *donc* 0 *est un point fixe* **stable**.

— *Pour* $1 < r$, 0 *est un point fixe* **hyperbolique**, *avec*

— *une direction instable* $\text{Vect}(U_+)$ *de dimension* 1 *de valeur propres* $\lambda_+ > 0$

— *une direction stable* $\text{Vect}(U_-, U_3)$ *de dimension* 2 *de valeur propres* $\lambda_-, \lambda_3 < 0$.

Par exemple, pour les valeurs (7.3.5) cela donne

$$\lambda_+ = 11.83\dots > 0, \quad \lambda_- = -22.83\dots < 0, \quad \lambda_3 = -2.66\dots < 0$$

2. *Si* $r > 1$, *il y a deux autres points fixes*

$$x_1 = x_2 = \pm\sqrt{b(r-1)} = 6\sqrt{2} = 8.48\dots, \quad x_3 = r - 1 = 27$$

— *Pour* $r < r^* := \sigma \frac{\sigma+b+3}{\sigma-b-1}$ *ces points sont stables.*

— *Pour* $r > r^*$ *ces points sont hyperboliques avec une direction instable de dimension* 2 *et une direction stable de dimension* 1.

Par exemple, pour les valeurs (7.3.5) les valeurs propres du champ de vecteur linéarisé sont

$$\lambda_1 = -13.85\dots < 0, \quad \lambda_{\pm} = 0.0939\dots \pm i10.19\dots$$

Le fait que $\text{Re}(\lambda_{\pm}) > 0$ *et* $\text{Im}(\lambda_{\pm}) \neq 0$ *montre que ce point fixe est hyperbolique avec une direction instable en rotation de dimension deux, et une direction stable* λ_1 *de dimension* 1.

Démonstration.

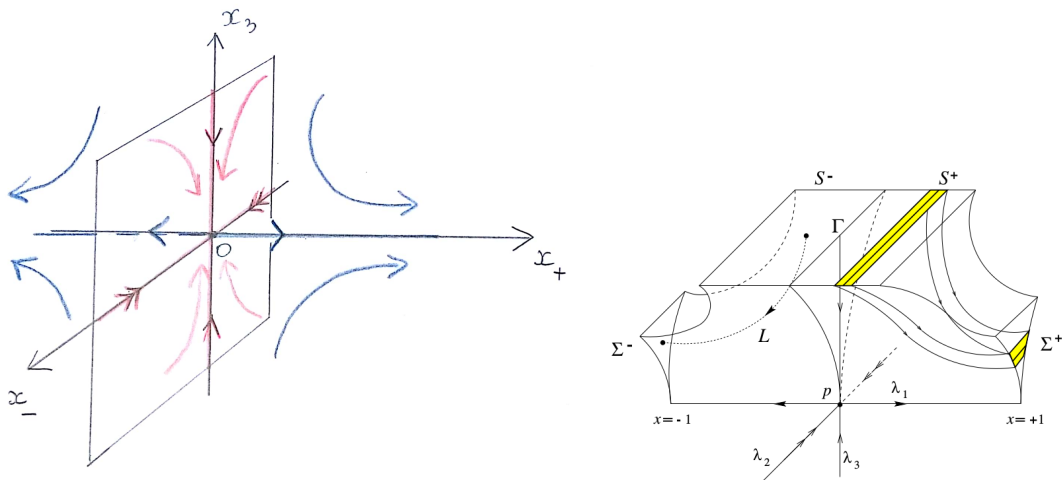


FIGURE 7.3.1 – Dynamique linéarisée au point fixe 0. Les axes x_{\pm} sont les axes des vecteurs propres U_{\pm} , combinaison linéaire des axes x_1, x_2 .

Recherche des points fixes : La condition que $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ est un point fixé est

$$0 = \frac{dx_1}{dt} = \sigma(-x_1 + x_2), \quad 0 = \frac{dx_2}{dt} = rx_1 - x_2 - xx_3, \quad 0 = \frac{dx_3}{dt} = x_1x_2 - bx_3$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ et } x_1(r - 1 - x_3) = 0 \text{ et } x_1^2 = bx_3$$

Cela donne $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Et si $r > 1$ il y a aussi deux autres points en $x_1 = x_2 = \pm\sqrt{b(r-1)}$, $x_3 = r-1$.

Stabilité du point fixe $(0, 0, 0)$. Concernant le point $(0, 0, 0)$, l'équation linéarisée s'obtient en éliminant les termes quadratiques de (7.3.1). En ce point, le flot linéarisé s'écrit donc

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

avec une matrice M :

$$M = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

On a évidemment la valeur propre $\lambda_3 = -b < 0$ avec le vecteur propre $U_3 = (0, 0, 1)$. On considère la sous matrice 2×2 qui est $\tilde{M} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma \\ r & -1 \end{pmatrix} = ANA^{-1}$ et que l'on diagonalise. D'après (A.1.5) on a les valeurs propres $N = \text{Diag}(\lambda_+, \lambda_-)$ avec

$$\lambda_+ = \frac{T + \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \lambda_- = \frac{T - \sqrt{\Delta}}{2}$$

$T = \lambda_+ + \lambda_- = -(1 + \sigma)$, $D = \lambda_+ \lambda_- = \sigma(1 - r)$, $\Delta = T^2 - 4D = (1 - \sigma)^2 + 4\sigma r$. On a les vecteurs propres associés

$$U_{\pm} = \begin{pmatrix} T \pm \sqrt{\Delta} + 2 \\ 2r \end{pmatrix}$$

donnant

$$A = (U_+, U_-).$$

- Si $0 < r < 1$ alors $D > 0$ donc $\lambda_- < \lambda_+ < 0$. Le point $(0, 0, 0)$ est stable.
- Si $r > 1$ alors $\lambda_-, \lambda_3 < 0 < \lambda_+$. Le point $(0, 0, 0)$ est instable. La direction instable est $\text{Vect}(U_+)$ de dimension 1.

Stabilité des points fixes (x_1, x_2, x_3) , $x_1 = x_2 = \pm\sqrt{b(r-1)}$, $x_3 = r - 1$. Supposons $r > 1$. La linéarisation du champ de vecteur donne la matrice

$$M = \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1,2,3} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - x_3 & -1 & -x_1 \\ x_2 & x_1 & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & \mp x_1 \\ x_1 & x_1 & -b \end{pmatrix}$$

Le polynome caractéristique est ⁵

$$P(\lambda) := \det(\lambda \text{Id} - M) = \lambda^3 + \lambda^2(b + \sigma + 1) + \lambda(x_1^2 + b\sigma + b) + 2\sigma x_1^2.$$

Supposons que $\omega \in \mathbb{R}$. On veut résoudre $P(i\omega) = 0$ qui correspond à un changement de stabilité :

$$\begin{aligned} P(i\omega) = 0 &\Leftrightarrow -i\omega^3 - \omega^2(b + \sigma + 1) + i\omega(x_1^2 + b\sigma + b) + 2\sigma x_1^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow -\omega^3 + \omega(x_1^2 + b\sigma + b) = 0 \text{ et } -\omega^2(b + \sigma + 1) + 2\sigma x_1^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \omega^2 = x_1^2 + b\sigma + b = \frac{2\sigma x_1^2}{b + \sigma + 1} \\ &\Leftrightarrow x_1^2 = \frac{b(\sigma + 1)(\sigma + b + 1)}{(\sigma - b - 1)} \\ &\Leftrightarrow r = \sigma \frac{\sigma + b + 3}{\sigma - b - 1}. \end{aligned}$$

Pour les valeurs (7.3.5) les valeurs propres sont (trouvées avec xcas) :

$$\lambda_1 = -13.85 \dots < 0, \quad \lambda_{\pm} = 0.0939 \dots \pm i10.19 \dots$$

□

5. Dans xcas, écrire $M := [[-s, s, 0], [1, -1, -x], [x, x, -b]]$; $\det(1-M)$;

7.3.2 Variétés stables et instables du point fixe 0

D'après la proposition 7.3.2, pour $r > 1$, la direction instable du point fixe 0 est de dimension 1. La direction stable est de dimension 2.

Remarque 7.3.3. On a vu que la direction $(0, 0, 1)$ est vecteur propre du flot linéarisé au point fixé $(0, 0, 0)$ avec la valeur propre $\lambda_3 = -b < 0$. Si les équations de Lorenz étaient strictement linéaires cela signifierait que tous les points de la forme $x = (0, 0, x_3)$ ont pour évolution $x(t) = (0, 0, x_3 e^{-bt})$ qui converge vers 0 pour $t \rightarrow +\infty$. Mais les équations de Lorenz ne sont pas linéaires, et des petites corrections font que le champ de vecteur ne laisse pas invariant l'axe $(0, 0, x_3)$ et que $x(t)$ ne converge pas vers 0. On s'intéresse cependant à l'ensemble des points qui convergent vers 0 dans le passé ou dans le futur appelées variétés stables et instables.

Rappel de la Section 2.2.5 :

Définition 7.3.4. La variété stable $\mathcal{W}_{stable}(0)$ et instable $\mathcal{W}_{instable}(0)$ du point fixe 0 sont définies par

$$\mathcal{W}_{stable}(0) := \left\{ x \text{ t.q. } \phi^t(x) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \right\}$$

$$\mathcal{W}_{instable}(0) := \left\{ x \text{ t.q. } \phi^t(x) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0 \right\}$$

Proposition 7.3.5. $\mathcal{W}_s(0)$ est une surface lisse (dimension 2) dans \mathbb{R}^3 tangente au plan de direction stable au point 0. $\mathcal{W}_i(0)$ est une courbe lisse (dimension 1) dans \mathbb{R}^3 tangente à la droite de direction instable au point 0.

Cependant parmi tous les points de \mathbb{R}^3 , les points des variétés stables et instables sont exceptionnels. Nous allons nous intéresser à l'ensemble des points de \mathbb{R}^3 maintenant.

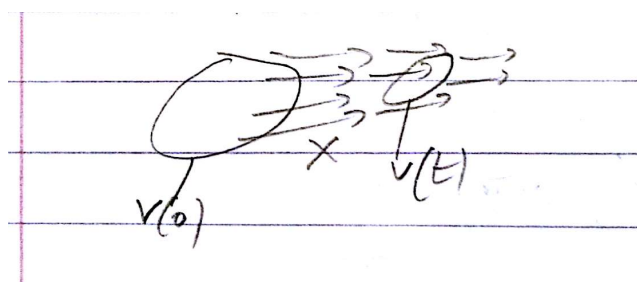
— Pour une étude approfondie, voir l'article : “[A survey of methods for computing \(un\)stable manifolds of vector fields](#)” 2004 et “[LORENZ-LIKE ATTRACTORS](#)” 2007, de M. J. PACIFICO.

7.3.3 Contraction du flot de Lorenz et existence d'un attracteur

On rappelle la propriété 2.2.4 générale concernant les flots générés par un champ de vecteur X : Si $U \subset \mathbb{R}^m$ est un ensemble de points et $U(t) = \phi^t(U)$ est l'ensemble de points transportés par le flot alors

$$\left(\frac{d\text{Vol}(U(t))}{dt} \right)_{t=0} = \int_U (\text{div}X)(x) dx.$$

En particulier si $(\text{div}X)(x) = 0$ pour tout x , on dit que le flot est **conservatif** car il conserve tous les volumes. Si $\text{div}X(x) < 0, \forall x$, on dit que le flot est **dissipatif** car les volumes diminuent au cours du temps. Si $\text{div}X(x) > 0, \forall x$, on dit que le flot est **expansif** car les volumes augmentent au cours du temps.



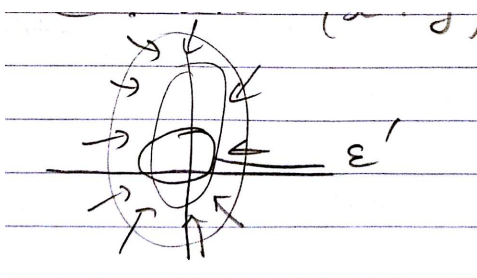
Proposition 7.3.6. *Le flot de Lorenz est partout dissipatif.*

Démonstration. On calcul

$$\operatorname{div} X = \frac{\partial X_{x_1}}{\partial x} + \frac{\partial X_{x_2}}{\partial x_2} + \frac{\partial X_{x_3}}{\partial x_3} = -\sigma - 1 - b < 0$$

□

Proposition 7.3.7. *Il existe un ellipsoïde \mathcal{E} autour de 0 tel que partant de n'importe quelle condition initiale $x(0) \in \mathbb{R}^3$, la trajectoire $x(t)$ entre dans \mathcal{E} et y reste pour toujours.*



Démonstration. Soit la fonction

$$E(x_1, x_2, x_3) = rx_1^2 + \sigma x_2^2 + \sigma(x_3 - 2r)^2$$

dont les lignes de niveau sont des ellipsoïdes emboîtés. On calcule

$$\frac{dE}{dt} = -2r\sigma(x_1^2 + x_2^2) - 2\sigma b(x_3 - r)^2 + 2\sigma br^2$$

donc si

$$2r\sigma(x_1^2 + x_2^2) + 2\sigma b(x_3 - r)^2 > 2\sigma br^2 \quad \text{extérieur ellipsoïde } \mathcal{E}$$

alors

$$\frac{dE}{dt} < 0$$

□

Corollaire 7.3.8. Si $t_2 > t_1 > 0$ alors

$$\phi^{t_2}(\mathcal{E}) \subsetneq \phi^{t_1}(\mathcal{E}) \subsetneq \mathcal{E}$$

c'est à dire que $(\phi^t(\mathcal{E}))_{t \geq 0}$ est une suite d'ensembles strictement inclus les uns dans les autres.

Démonstration. Si $A \subsetneq B$ alors $\phi^t(A) \subsetneq \phi^t(B)$. On a vu que pour $t > 0$ petit, $\phi^t(\mathcal{E}) \subsetneq \mathcal{E}$, alors $\phi^{2t}(\mathcal{E}) \subsetneq \phi^t(\mathcal{E}) \subsetneq \mathcal{E}$ etc... \square

Grace à la propriété précédente, on peut définir l'attracteur de Lorenz comme étant l'ensemble limite $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi^t(\mathcal{E})$. Précisément :

Définition 7.3.9. L'attracteur (étrange) de Lorenz du flot ϕ^t est

$$\mathcal{A} := \{x \in \mathbb{R}^3, \text{ t.q. } x \in \phi^t(\mathcal{E}), \forall t \geq 0\}.$$

Question 7.3.10. à quoi ressemble l'attracteur \mathcal{A} ? est-ce un point isolé attracteur? un cycle limite (orbite périodique) ou autre?

Dans la suite nous allons expliquer la réponse suivante : non, c'est plus compliqué, il est de mesure nulle, c'est une "fractale" en forme de papillon, de "dimension 2.04...". Il contient le point fixe 0 et plein d'autres orbites qui sont en correspondance avec le modèle $x \rightarrow 2x \bmod 1$ (d'après Tucker 2001).

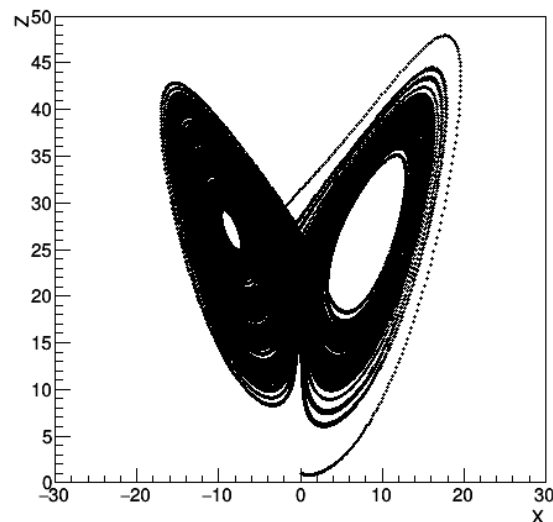


FIGURE 7.3.2 – "Attracteur de Lorenz" : trajectoire partant d'un point initial $x \in \mathbb{R}^3$.

7.3.4 Modèle géométrique du flot de Lorenz

C'est une étude d'après Guckenheimer 1979, et qui a été utilisée ensuite. On considère dans la suite le paramètre $r > r^*$. On va étudier l'attracteur \mathcal{A} .

Référence : “**LORENZ-LIKE ATTRACTORS**” 2007, de M. J. PACIFICO, page 23.

On utilise des coordonnées $(x_+, x_-, x_3) \in \mathbb{R}^3$ telles que

1. Près du point fixe 0, les coordonnées correspondent aux axes propres du point fixe $(0, 0, 0)$, où (x_+, x_-) sont des combinaisons linéaires des coordonnées (x_1, x_2) de départ.
2. Dans l'ellipsoïde \mathcal{E} , la surface $x_+ = 0$ coïncide avec la variété stable $W_s(0)$.

Proposition 7.3.11. *Il existe une valeur X_3 , et $C > 0$ telle que si on considère les rectangles*

$$S_- := \{-C < x_+ < 0, \quad |x_-| < C, \quad x_3 = X_3\}$$

$$S_+ := \{0 < x_+ < C, \quad |x_-| < C, \quad x_3 = X_3\}$$

$$S_0 := \{x_+ = 0, \quad |x_-| < C, \quad x_3 = X_3\}$$

et l'on pose $S := S_+ \cup S_- \cup S_0$ alors pour tout point $x = (x_+, x_-, x_3) \in S_+$ il existe $t > 0$ tel que $P(x) := \phi^t(x) \in S$. De même $\forall x \in S_-, \exists t > 0$ t.q. $P(x) := \phi^t(x) \in S$. Cela définit une application

$$P : S_+ \cup S_- \rightarrow S$$

appelées **application de Poincaré**. Les images $P(S_+)$ et $P(S_-)$ sont incluses dans S et sont disjointes et disposées selon la figure 7.3.3.

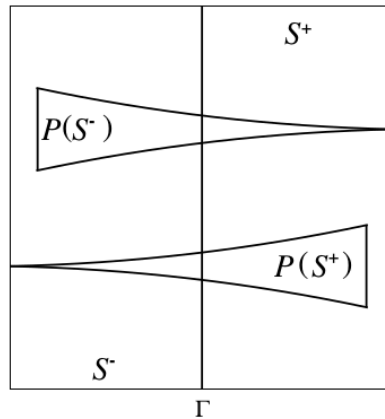
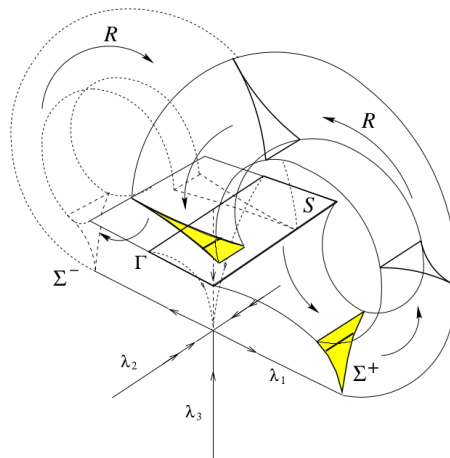


FIGURE 7.3.3 – Application de Poincaré

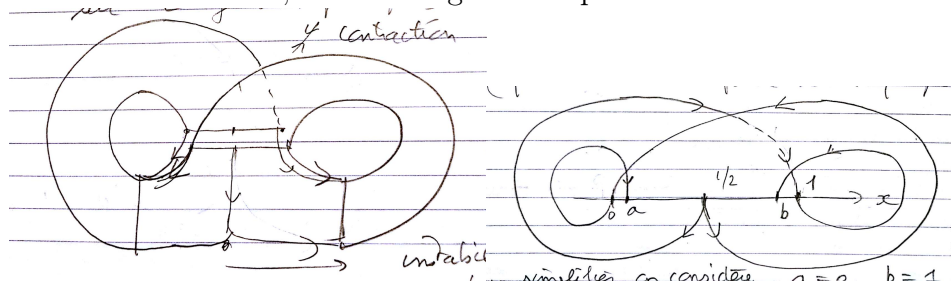
Remarque 7.3.12. Si on s'approche de la ligne S_0 , la trajectoire s'approche du point fixe 0 et le temps de retour diverge.

Voici le comportement du flot entre ces sections :



Si on écrit le champ de vecteur $\frac{dx}{dt} = V(x)$, avec $x = (x_+, x_-, x_3)$ et des composantes $V(x) = (V_+, V_-, V_3)$, on peut supposer de plus que dans la zone jaune de la figure précédente, les composantes $V_+(x)$ et $V_3(x)$ ne dépendent pas de x_- . Comme représenté sur le schéma, cela implique que les segments $(x_+, x_3) = \text{cte}$ sont préservés. On dit que le champ de vecteur $V(x)$ est une extension d'un **semi-flot** sur (x_+, x_3) .

Comme l'axe x_- contracte très fortement, on déduit que \mathcal{A} est un cantor dyadique, une assemblée d'une infinité de feuilles serrées regroupées sur deux feuilles principales. Il y a repliement et étirement, les deux ingrédients pour avoir du chaos.



Application de Lorenz

On considère donc l'évolution des coordonnées (x_+, x_3) dans la zone du semi-flot et en particulier sur la Section de Poincaré S . On considère maintenant seulement la variable $x_+ \in [-C, C]$ sur la Section de Poincaré S . Cela définit une application

$$f : x_+ \in [-C, C] \rightarrow f(x_+) \in [-C, C]$$

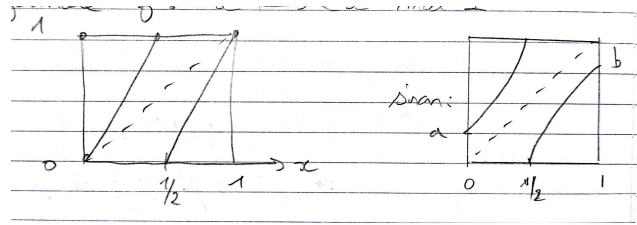
appelée **application de Lorenz**.

- f est une fonction croissante, **expansive**, c'est à dire qu'il existe $\lambda > 1$, appelé **coefficient d'expansion minimal** ou **coefficient de Lyapounov minimal**, tel que pour tout x_+ , $f'(x_+) > \lambda$.

— Il existe $-C < a < 0$ et $0 < b < C$ tels que

$$f([-C, 0]) = [a, C], \quad f([0, C]) = [-C, b].$$

Voir figure.



Remarque 7.3.13. à chaque retour (ou itération) les écarts infinitésimaux sont multipliés par un facteur $f'(x_+) > \lambda > 1$. Donc après n itérations, le facteur est supérieur à $\lambda^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ qui diverge exponentiellement vite. C'est la “**sensibilité aux conditions initiales**”.

Remarque 7.3.14. Cette application f est décrit le comportement du flot de Lorenz de façon exacte dans un voisinage de l'attracteur \mathcal{A} et pour la variable x_+ , mais on a perdu l'information sur le temps entre deux retours et sur le comportement de la variable x_- (qui contracte). En particulier, le temps de retour diverge lorsque $x_+ \rightarrow 0$.

— Voir vidéo sur la sensibilité aux conditions initiales.

7.3.5 Modèle linéaire simplifié

Cette Section est à part de l'étude de la dynamique de Lorenz.

Dans la Section précédente, on a vu que la dynamique du flot de Lorenz se “réduit” à la dynamique de l'application de Lorenz f qui est une application expansive. Pour simplifier, dans cette Section on étudie la dynamique d'une autre application expansive, similaire mais plus simple :

$$f : x \in [0, 1] \rightarrow \{2x\}, \quad \in [0, 1]$$

où $\{x\} \in [0, 1]$ signifie la partie fractionnaire de $x \in \mathbb{R}$.

Par exemple partant du point initial $x_0 = 0.3$,

$$x_0 = 0.3 \xrightarrow{f} 0.6 \xrightarrow{f} 0.2 \xrightarrow{f} 0.4 \xrightarrow{f} 0.8 \xrightarrow{f} 0.6 \xrightarrow{f} \text{etc}$$

qui est une orbite périodique de période 4. Pour ce modèle linéaire, il est approprié de considérer la notation du point $x \in [0, 1]$ en base 2. On rappelle que $x \in [0, 1]$ s'écrit ⁶

$$x = \sum_{k \geq 1} b_k 2^{-k} \text{ avec } b_k \in \{0, 1\}$$

6. De la même façon que en base 10, on écrit $x \in [0, 1]$:

$$x = \sum_{k \geq 1} b_k 10^{-k} \text{ avec } b_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$$

On dit que $0.b_1b_2b_3\dots$ est l'écriture de x en base 2. Les coefficients $b_k, k \geq 1$ s'appellent les "bits" et pour les trouver on fait l'itération $b_k = [2x_{k-1}]$ (partie entière) et

$$x_k = 2x_{k-1} - b_k = \{2x_{k-1}\} = f(x_{k-1}),$$

ce qui utilise l'application $f(x) = \{2x\}$.

Par exemple

$$x_0 = (0.3)_{base10} = (0.010011\underline{0011}\dots)_{base2}$$

où 0011 signifie que cette séquence se répète ensuite de façon périodique. Avec cette écriture, l'application f est simplement le décalage à gauche, en ne gardant que la partie fractionnaire :

$$\begin{aligned} x_0 = 0.010011\underline{0011} &\xrightarrow{f} 0.10011\underline{0011} \xrightarrow{f} 0.0011\underline{0011} \\ &\xrightarrow{f} 0.011\underline{0011} \xrightarrow{f} 0.11\underline{0011} \xrightarrow{f} 0.1\underline{0011} \xrightarrow{f} etc \end{aligned}$$

Remarque 7.3.15. En notation base 2, et pour l'application $f(x) = \{2x\}$, toutes les suites de 0 et 1 sont permises. La plupart de ces suites ne sont pas périodiques. Avec une application ayant des paramètres $a \neq 0, b \neq 1$ il y aurait des suites de 0, 1 non permises, c'est à dire des contraintes sur les "mots". Cette description de la dynamique par des mots s'appelle "dynamique symbolique". Voir [6].

7.3.6 Cantor et dimension fractale

Cette Section est à part de l'étude de la dynamique de Lorenz.

On a vu dans la figure 7.3.3 que l'application de Poincaré P transforme le rectangle S en deux domaines. Si on itère cette application cela crée une fractale qui est l'attracteur \mathcal{A} . Voici la définition générale d'une fractale de la dimension fractale (de Minkowski ou Box-dimension) d'un ensemble de points \mathcal{A} . On considère ensuite un exemple très simple qui est l'ensemble de Cantor.

Dimension fractale

Dans le cas d'une courbe lisse on souhaite avoir une dimension $d = 1$, dans le cas d'une surface lisse on souhaite $d = 2$, etc.. Remarquer que si une surface S (dimension $d = 2$) est recouverte de disques de rayon ϵ , alors il faut $\mathcal{N}_\epsilon \sim \frac{|S|}{\pi\epsilon^2}$ disques pour la recouvrir. Plus généralement pour un espace lisse E de dimension $d \in \mathbb{N}$ il faut $\mathcal{N}_\epsilon = \frac{C}{\epsilon^d}$ boules de rayon ϵ pour le recouvrir, où $C > 0$ est une constante indépendante de ϵ . Cela donne

$$\log \mathcal{N}_\epsilon = \log C + d \log (1/\epsilon)$$

$$\Rightarrow \quad d = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{N}_\epsilon}{\log (1/\epsilon)}$$

On prendra cette formule comme définition de "dimension" pour un ensemble de points quelconques.

Définition 7.3.16. Soit $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble de points. Soit $\epsilon > 0$ et \mathcal{N}_ϵ le nombre minimal de boules (ou boites) de rayon ϵ qui recouvrent \mathcal{A} . On pose

$$\dim_M(\mathcal{A}) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\log \mathcal{N}(\epsilon)}{\log(1/\epsilon)} \right).$$

Si la limite existe, on dit que \mathcal{A} est une **fractale de dimension fractale de Minkowski** ou "**Box counting dimension**" $\dim_M(\mathcal{A})$.

Dans le cas de l'attracteur de Lorenz, on mesure numériquement que $\dim \mathcal{A} = 2.04\dots$ (la valeur change avec paramètres r, b, σ).

Exemple de calcul de dimension fractale, ensemble de Cantor dyadique.

On va construire un ensemble fractale F et calculer sa dimension. Voir figure 7.3.4. On considère l'intervalle $E_0 = [0, 1]$ que l'on divise en trois parties égales 1, 2, 3 de largeur $1/3$ chacune. On définit E_1 comme étant l'union des deux parties 1, 3. Chaque segment est redivisé en 3 parties égales et E_2 est formé de 2^2 intervalles (le 1 et 3 de chaque) de largeur $1/3^2$. Etc, E_n est formé de $\mathcal{N} = 2^n$ intervalles de largeur $\epsilon = 1/3^n$. Ces ensembles E_n sont contenus les uns dans les autres et on appelle F l'ensemble limite, appelé ensemble de Cantor :

$$F = \bigcap_{n \geq 0} E_n := \{x \in [0, 1], \quad \text{t.q. } \forall n, x \in E_n\} \quad : \text{ensemble de Cantor}$$

L'ensemble F est de mesure nulle et sa dimension fractale est

$$\begin{aligned} \dim F &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\log \mathcal{N}(\epsilon)}{\log(1/\epsilon)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\log \mathcal{N}_n}{\log(1/\epsilon_n)} \right) = \frac{\log(2^n)}{\log(3^n)} \\ &= \frac{\log(2)}{\log(3)} \sim 0.63\dots \end{aligned}$$

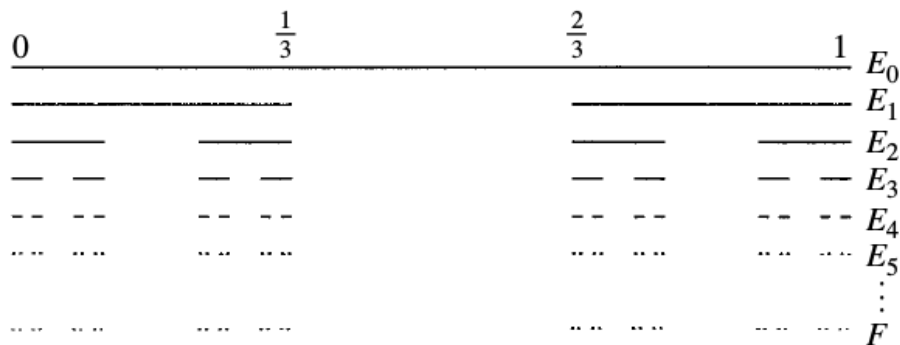


FIGURE 7.3.4 – Ensemble de Cantor

Exercice 7.3.17. « Dimension fractale »

On rappelle que par définition, si $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble de points, soit \mathcal{N}_ϵ le nombre minimal de boules (ou boîtes) de rayon $\epsilon > 0$ qui recouvrent \mathcal{A} . La **dimension fractale de Minkowski** de \mathcal{A} est

$$\dim_M(\mathcal{A}) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\log \mathcal{N}(\epsilon)}{\log(1/\epsilon)} \right)$$

1) Ensemble de Cantor : On considère l'intervalle $E_0 = [0, 1]$ que l'on divise en trois parties égales 1, 2, 3 de largeur $1/3$ chacune. On définit E_1 comme étant l'union des deux parties 1, 3. Chaque segment est redivisé en 3 parties égales et E_2 est formé de 2^2 intervalles (le 1 et 3 de chaque) de largeur $1/3^2$. Etc, E_n est formé de $\mathcal{N} = 2^n$ intervalles de largeur $\epsilon = 1/3^n$. Ces ensembles E_n sont contenus les uns dans les autres et on appelle F l'ensemble limite, appelé ensemble de Cantor. Calculer $\dim_M(F)$.

2) Fractale A La figure 7.3.6 (A) montre une fractale F et son « générateur » en bas à gauche. La construction itérative est la suivante : au départ E_0 est le générateur. Pour l'étape suivante E_1 on remplace chaque segment par une copie miniature du générateur. Calculer $\dim_M(F)$ de l'ensemble limite.

3) Une fractale arborescente B : La figure 7.3.6 (B) montre une fractale F et son « générateur » en bas à gauche. La construction itérative est la suivante : au départ E_0 est le générateur. Pour l'étape suivante E_1 on remplace chaque segment par une copie miniature du générateur. Calculer $\dim_M(F)$ de l'ensemble limite.

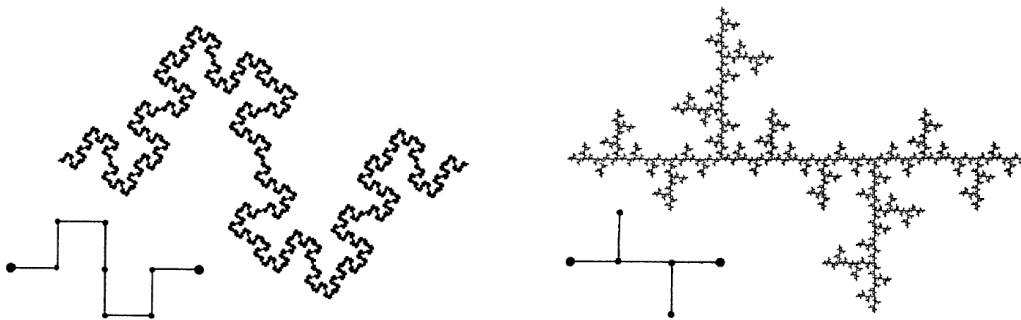


FIGURE 7.3.6 – (A) Fractale A. (B) Fractale arborescente B.

Exercice 7.3.18. "Dynamique chaotique de Rössler"

En 1976, E.Rössler a proposé le modèle suivant qui décrit l'évolution de trois variables $x(t), y(t), z(t) \in \mathbb{R}$ en fonction du temps $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y(t) - z(t) \\ \frac{dy}{dt} = x(t) + ay(t) \\ \frac{dz}{dt} = b + (x(t) - c)z(t) \end{cases} \quad (7.3.6)$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ sont des paramètres fixés. Ces équations se rencontrent en chimie pour décrire l'évolution de la concentration de certains composés dans une réaction spécifique. Ce modèle est aussi intéressant par lui-même car il possède un attracteur étrange chaotique comme le modèle de Lorenz, en étant plus simple par certains aspects.

1. Préciser si le système dynamique (7.3.6) est : (a) à temps continu ou temps discret ? (b) déterministe ou non déterministe ? (c) linéaire ou non linéaire ? (d) Conservatif, expansif ou dissipatif ?
2. Trouver le nombre de points fixes du système (7.3.6) et leur position (x, y, z) en fonction des paramètres a, b, c .
3. La figure (a) suivante montre l'attracteur \mathcal{A} du système (7.3.6) pour les paramètres $a = b = 0.2$, $c = 5.7$ obtenu par simulation numérique. Le schéma (b) qui suit montre que les trajectoires tournent autour d'un point fixe instable dans une "bande". La partie intérieure de cette bande appelée "bande normale" reste dans le plan horizontal, s'étire en largeur, fait un tour puis se place dessous. La partie extérieure appelée "bande de Moebius" fait aussi un tour en s'étirant, mais s'élève et se retourne, avant de se placer dessus. Etc.

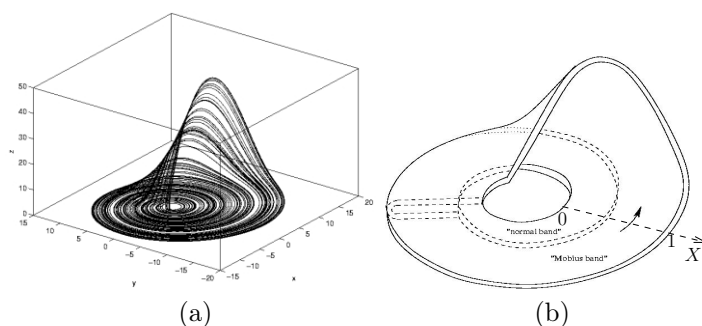


FIGURE 7.3.7

Dans ce mécanisme, on suppose que les deux bandes sont remplies de trajectoires de façon dense et reviennent contractées en épaisseur d'un facteur $\epsilon < 0.5$. Rappeler la définition de la dimension fractale d'un ensemble de points. Calculer la dimension fractale de l'attracteur $\dim \mathcal{A}$ en fonction de ϵ . Application numérique : calculer $\dim \mathcal{A}$ si $\epsilon = 1/16$?

4. On appelle $X \in [0, 1]$ la position transverse d'une trajectoire lorsqu'elle traverse l'axe X de la figure (b). On note $f : X_n \rightarrow X_{n+1} = f(X_n)$ l'application de retour de Poincaré après un tour. En observant la figure (b), tracer l'allure du graphe de la fonction $Y = f(X)$.
5. On souhaite simplifier le modèle.
 - (a) Pour approcher la fonction $f(X)$ avec $X \in [0, 1]$, quelle fonction proposez vous parmi les fonctions f_1 et f_2 suivantes ?

$$f_1(X) = \begin{cases} 2X & \text{si } X < 1/2 \\ 2X - 1 & \text{si } X > 1/2 \end{cases}, \quad f_2(X) = \begin{cases} 2X & \text{si } X < 1/2 \\ 2 - 2X & \text{si } X > 1/2 \end{cases}$$

- (b) Pour les fonctions $f = f_1$ puis $f = f_2$, décrire précisément la valeur en temps long $n \gg 1$ du système dynamique $X_{n+1} = f(X_n)$ à partir de la valeur initiale X_0 est écrit en base 2, c'est à dire $X_0 = 0, b_0 b_1 b_2 b_3 \dots$ avec des bits $b_j \in \{0, 1\}$.

- (c) Soit $\delta \ll 1$ l'incertitude sur X_0 à la date $n = 0$. Après quel temps $n(\delta)$ cette petite incertitude $\delta \ll 1$ rend la prévision impossible ?

7.4 Mesure d'équilibre de Sinaiï-Ruelle-Bowen (SRB, 1976). Ergodicité.

Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ un point initial et

$$\phi^t(x) \quad : \text{point } x \text{ évolué à la date } t \text{ par le flot } \phi^t.$$

A cause de la sensibilité aux conditions initiales, on constate que pour un point initial x générique, la trajectoire $(\phi^t(x))_{t \in \mathbb{R}}$ semble imprévisible, mais que la figure générale de la trajectoire $\cup_{t \geq 0} \{\phi^t(x)\}$ est prévisible : c'est un "papillon" qui dépend peu du choix de x . Voir figure 7.3.2. Pour certains points initiaux particuliers, la figure de la trajectoire est différente. Par exemple pour $x = 0$, $\phi^t(0) = 0$ est un point fixe. On va rendre cette prédiction quantitative.

Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction considérée comme "observable". Par exemple soit $\mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^3$ une zone compacte et $\varphi_{\mathcal{Z}}$ la fonction caractéristique de \mathcal{Z} (ou indicatrice) définie par

$$\varphi_{\mathcal{Z}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathcal{Z} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathcal{Z} \end{cases}$$

Remarquer que $\frac{1}{T} \int_0^T \varphi_{\mathcal{Z}}(\phi^t(x)) dt \in [0, 1]$ est la proportion de temps passé dans la zone \mathcal{Z} pour la trajectoire $(\phi^t(x))_{t \in [0, T]}$.

Théorème 7.4.1. "*Ergodicité du flot de Lorenz*". (Metzger 2000, Tucher 2000) Pour presque toutes les conditions initiales x on a la limite suivante^a

$$\mu_{SRB} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \int_0^T \delta_{\phi^t(x)} dt \right) \quad (7.4.1)$$

qui est appelée la **mesure d'équilibre de Sinaiï-Ruelle-Bowen**. On dit que le **flot de Lorenz** ϕ^t est ergodique pour la mesure μ_{SRB} .

a. où $\delta_{\phi^t(x)}$ est la mesure de Dirac définie par $\delta_{\phi^t(x)}(\varphi) = \varphi(\phi^t(x))$ pour une fonction $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Remarque 7.4.2.

- Eq.(7.4.1) signifie que pour toute fonction $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ appelée "observable",

$$\mu_{SRB}(\varphi) := \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \int_0^T \varphi(\phi^t(x)) dt \right) \quad (7.4.2)$$

est convergente et indépendante de x (pour presque tout x).

- μ_{SRB} est une mesure de probabilité sur l'espace des phases \mathbb{R}^3 car elle est positive et prenant $\varphi = \mathbf{1}$ alors $\mu_{SRB}(\mathbf{1}) = 1$.

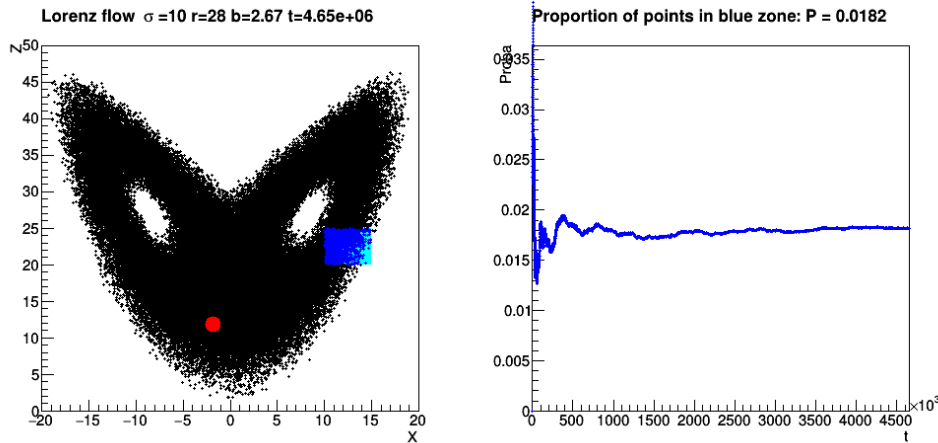


FIGURE 7.4.1 – A gauche mesure de SRB $\mu_{SRB} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \int_0^T \delta_{\phi^t(x)} dt \right)$ sur l'attracteur de Lorenz. A droite $P_{\mathcal{Z}}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \varphi_{\mathcal{Z}}(\phi^{t'}(x)) dt'$ pour la fonction caractéristique $\varphi_{\mathcal{Z}}$ de la zone bleue \mathcal{Z} . On observe la convergence vers $\mu_{SRB}(\varphi_{\mathcal{Z}})$. Voir [vidéo](#).

- Dans le cas d'une fonction caractéristique $\varphi_{\mathcal{Z}}$, la valeur $\mu_{SRB}(\varphi_{\mathcal{Z}}) \in [0, 1]$ s'interprète comme la "probabilité" de trouver le point $\phi^t(x)$ dans la zone \mathcal{Z} , si on considère la trajectoire dans son ensemble.
- En théorie des systèmes dynamiques, une question importante est de montrer qu'un système dynamique donné possède (ou pas) une mesure SRB (ou plusieurs), de les calculer et estimer la vitesse de convergence vers l'équilibre.
- La mesure μ_{SRB} est supportée sur l'attracteur étrange \mathcal{A} . Cela signifie que si le support de l'observable φ est disjoint de \mathcal{A} alors $\mu_{SRB}(\varphi) = 0$. On peut même définir **l'attracteur \mathcal{A} comme le support de la mesure μ_{SRB}** .
- Voir [vidéo](#) sur le calcul de la probabilité de présence, ergodicité. (avec carré bleu avec musique).

On va reformuler le Théorème 7.4.1. Commençons par remarquer que d'après la théorie de la mesure (ou théorie des distributions), si une fonction est constante $f(x) = C$ pour presque tout point $x \in \mathbb{R}^3$, cela signifie que

$$\forall \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3), \quad \int \psi(x) f(x) dx = C \int \psi(x) dx.$$

Ainsi (7.4.2) se réécrit sans mentionner le "presque tout point" de la façon suivante

$$\forall \varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3), \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\psi(x)} \varphi(\phi^t(x)) dx dt \right) = \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\psi(x)} dx \mu_{SRB}(\varphi). \quad (7.4.3)$$

(on a écrit $\overline{\psi(x)}$ au lieu de $\psi(x)$, pour une raison pratique qui va apparaître).

Pour les notations, il est intéressant d'utiliser l'**opérateur de transfert** \mathcal{L}^t associé à

la dynamique de Lorenz et défini pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$\mathcal{L}^t : \begin{cases} C_0^\infty(\mathbb{R}^3) & \rightarrow C_0^\infty(\mathbb{R}^3) \\ \varphi & \rightarrow (\mathcal{L}^t \varphi)(x) := \varphi(\phi^t(x)) \end{cases}$$

On pense que la fonction φ est une observable et que $(\mathcal{L}^t \varphi)(x) = \varphi(\phi^t(x))$ décrit l'évolution de l'observable le long de la trajectoire. On introduit aussi le produit scalaire sur $L^2(\mathbb{R}^3)$:

$$\langle \psi | \varphi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3)} := \int \overline{\psi(x)} \varphi(x) dx$$

Alors (7.4.3) se ré-écrit :

$$\forall \varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3), \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \int_0^T \langle \psi | \mathcal{L}^t \varphi \rangle dt \right) = \langle \psi | 1 \rangle_{L^2} \langle \mu_{SRB} | \varphi \rangle_{L^2}. \quad (7.4.4)$$

On observe que ψ, φ sont comme des “éléments de matrices” quelconques. De façon plus concise et équivalente, le Théorème 7.4.1 peut donc s'écrire :

Théorème 7.4.3. “Ergodicité du flot de Lorenz”. (Metzger 2000, Tucher 2000) On a la convergence suivante au sens des distributions ^a

$$\lim_{T \rightarrow \infty}^* \left(\frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{L}^t dt \right) = |1\rangle \langle \mu_{SRB} | \cdot \rangle_{L^2} \quad (7.4.5)$$

a. où $\lim_{T \rightarrow \infty}^*$ signifie (7.4.4), et appelée la limite au “sens faible” ou “au sens des distributions”.

Voir la Section ?? qui définit l'opérateur de transfert dans un cas général et donne le sens probabiliste de son adjoint $(\mathcal{L}^t)^*$ (appelé **opérateur de Perron Frobenius**). Ici on rappelle juste que $(\mathcal{L}^t)^*$ est défini par $\langle u, (\mathcal{L}^t)^* v \rangle_{L^2} := \langle \mathcal{L}^t u, v \rangle_{L^2}$, $u, v \in C_0^\infty(M)$ et donné par $((\mathcal{L}^t)^* v)(y) = \det(D\phi^{-t}(y)) \cdot v(\phi^{-t}(y))$, et que $(\mathcal{L}^t)^* \delta_x = \delta_{\phi^t(x)}$. Ainsi $(\mathcal{L}^t)^*$ propage les distributions de probabilité par le flot.

7.5 Mélange

Remarque 7.5.1. La propriété (7.4.5) d'ergodicité que l'on vient de voir est importante, connue pour beaucoup de systèmes dynamiques, mais ne révèle pas le comportement “chaotique”. On connaît en effet des dynamiques ergodiques comme les rotations irrationnelles du cercle (voir TD) qui n'ont pas de sensibilité aux conditions initiales. Dans cette Section on montre une propriété plus forte appelée “**mélange**” et qui correspond vraiment au **comportement chaotique** que l'on souhaite exprimer.

— Voir [vidéo](#) sur le mélange.

Théorème 7.5.2. “Mélange du flot de Lorenz”. (Luzzatto, Melbourne, Paccaut, 2004, 2014) Pour le flot de Lorenz, toute distribution initiale de probabilité $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ (vérifiant $\int \psi dx = 1$) transportée par le flot ϕ^t évolue vers la mesure d'équilibre μ_{SRB} pour $t \rightarrow \infty$. On dit que la dynamique sur l'attracteur de Lorenz est **mélangeante**.

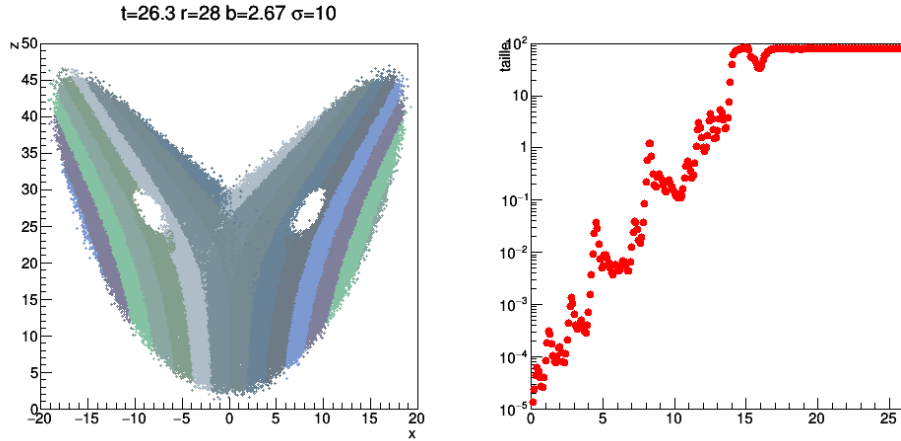


FIGURE 7.5.1 – A $t = 0$ on est parti d’une distribution de $5 \cdot 10^5$ points concentrés dans une région de diamètre $\delta(0) = 10^{-5}$. A la date $t = 26$ on observe à gauche que la distribution converge vers la mesure de SRB μ_{SRB} sur l’attracteur. Cela montre la propriété de **mélange**. La figure de droite montre que le diamètre $\delta(t)$ augmente exponentiellement jusqu’à atteindre la taille de l’attracteur. Voir [vidéo](#).

Remarque 7.5.3.

1. Comme tout état initial converge vers la mesure d’équilibre, ce résultat montre qu’il y a une perte totale de l’information sur l’état initial.
2. Il est important dans le théorème de supposer que ψ est lisse (ou “suffisamment régulier”) car la distribution de Dirac δ_x évolue comme $\delta_{\phi^t(x)}$ d’après (??) et ne converge donc pas en général.

Pour exprimer la propriété de mélange, on va utiliser l’opérateur de transfert \mathcal{L}^t comme dans le théorème 7.4.3. Reformulation de la propriété :

Théorème 7.5.4. “*Mélange du flot de Lorenz*”. (Luzzatto, Melbourne, Paccaut, 2004, 2014)

$$\lim_{t \rightarrow \infty}^* \mathcal{L}^t = |1\rangle \langle \mu_{SRB} | \cdot \rangle_{L^2} \quad (7.5.1)$$

Remarque 7.5.5. La convergence (7.5.1) est au sens des distributions et signifie précisément que

$$\forall \varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \psi | \mathcal{L}^t \varphi \rangle = \langle \psi | 1 \rangle_{L^2} \langle \mu_{SRB} | \varphi \rangle_{L^2}. \quad (7.5.2)$$

Démonstration. (de la reformulation). Le théorème 7.5.2 dit que si $\int \psi dx = \langle 1 | \psi \rangle_{L^2} = 1$ alors $(\mathcal{L}^t)^* \psi \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mu_{SRB}$. De façon équivalente,

$$\begin{aligned} \forall \psi, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3), \quad & \langle \varphi | (\mathcal{L}^t)^* \psi \rangle \rightarrow \langle \varphi | \mu_{SRB} \rangle \langle 1 | \psi \rangle \\ \Leftrightarrow \forall \psi, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3), \quad & \langle \psi | \mathcal{L}^t \varphi \rangle \rightarrow \langle \psi | 1 \rangle \langle \mu_{SRB} | \varphi \rangle \\ \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{L}^t = & |1\rangle \langle \mu_{SRB} | \cdot \rangle_{L^2} \end{aligned}$$

□

Remarque 7.5.6. La propriété de mélange (7.5.1) implique la propriété d'ergodicité (7.4.5) d'après le **Théorème de Césaro**. Mais il y a des systèmes dynamiques qui sont ergodique et non mélangeant, comme la rotation sur le cercle d'un angle irrationnel.

7.6 Théorème central limite

Dans cette section on présente une autre propriété du flot de Lorenz qui exprime un comportement “très chaotique”. Nous commençons pas présenter ce résultat pour le processus aléatoire de “pile ou face”.

7.6.1 Processus aléatoire de “pile ou face” et théorème central limite

A chaque instant $t \geq 1$ on tire une pièce donnant le résultat $\varphi_t = +1$ ou $\varphi_t = -1$ chacun avec probabilité $1/2$ et indépendamment des résultats précédents. (Ce sont des variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées). On considère une date ultérieure $T \geq 1$ et la somme des résultats :

$$(S\varphi)(T) := \sum_{t=1}^T \varphi_t$$

qui correspond à une “**marche aléatoire**” sur le réseau \mathbb{Z} , ou “**mouvement Brownien**”.

En général, la moyenne d'une grandeur $a(\varphi)$ est définie par $\langle a \rangle := \mathbb{E}(a) := \sum_{\varphi=\pm 1} a(\varphi) p(\varphi)$ avec $p(\varphi) = 1/2$ ici.

En moyenne on a $\langle \varphi_t \rangle = 0$ donc

$$\langle S\varphi(T) \rangle = \sum_{t=1}^T \langle \varphi_t \rangle = 0$$

Question 7.6.1. Comment se distribue les résultats $S\varphi(T)$ pour $T \gg 1$? Voir figure 7.6.1.

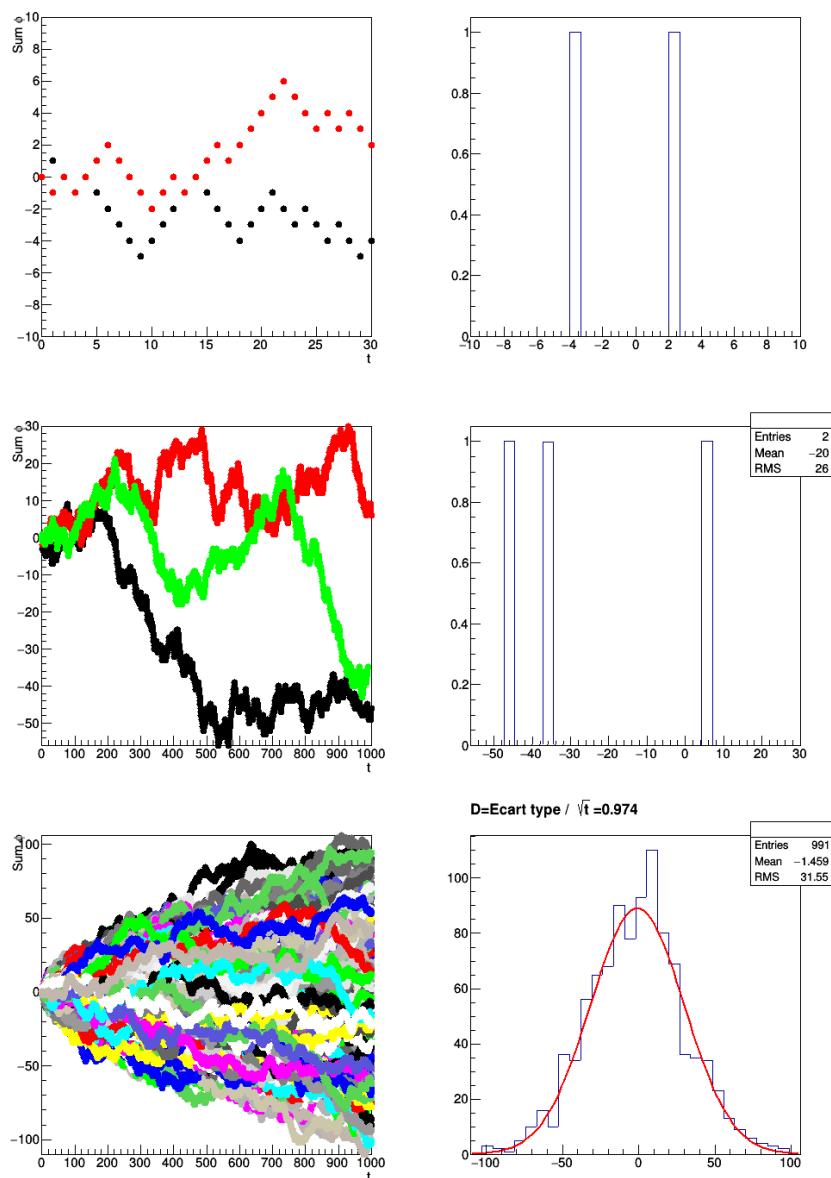


FIGURE 7.6.1 – Pour **Pile ou Face**. A gauche représentation de $(S\varphi)(t) := \sum_{t'=1}^t \varphi_{t'}$ où $\varphi_{t'} = \pm 1$ sont aléatoires, pour deux séries différentes, puis $N = 991$ séries différentes en bas. A droite, c'est l'histogramme de $(S\varphi)(t)$ à $t = 30$, puis $t = 1000$. On observe que la distribution converge vers une Gaussienne pour $N \rightarrow \infty$, avec un coefficient de diffusion $D = 1$. Voir [vidéo](#).

La réponse pour une suite de variables aléatoires stationnaire (appelé **processus stochastique stationnaire**) est la suivante si on considère les données à "l'échelle \sqrt{T} " :

Théorème 7.6.2. “*Théorème central limite pour une suite de variables aléatoires* $(\varphi_t)_t$ ” La distribution des valeurs $\frac{1}{\sqrt{T}}(S\varphi)(T)$ converge vers la distribution Gaussienne $G_D(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}}e^{-\frac{X^2}{2D}}$ de variance

$$D = \langle \varphi^2 \rangle + 2 \sum_{t \geq 1} \underbrace{\langle \varphi_0 \varphi_t \rangle}_{\text{fonction de corrélation}} \quad : \text{coefficient de diffusion}$$

Dans le cas de pile/face décrit plus haut, on a $\varphi_t^2 = 1$ donc $\langle \varphi^2 \rangle = 1$ et $\varphi_0 \varphi_t = -1, +1$ donc $\langle \varphi_0 \varphi_t \rangle = 0$, et le coefficient de diffusion est $D = 1$.

Remarque 7.6.3. Ce résultat montre que le mouvement Brownien (ou la marche aléatoire) $(S\varphi)(T)$ a une dispersion Gaussienne de largeur \sqrt{DT} .

— Voir [vidéo](#) sur pile/face. On observe la loi Gaussienne avec $D = 1$.

Voici une reformulation en termes plus précis du Théorème 7.6.2. Si $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_T)$ est une suite d'événements (où $\varphi_t = \pm 1$), sa probabilité est $p(\varphi) := p(\varphi_1) p(\varphi_2) \dots p(\varphi_T) = \left(\frac{1}{2}\right)^T$. Il y a 2^T suites possibles toutes équiprobables.

A la date T , on considère la distribution des données (peigne de Dirac) pondérées de la probabilité $p(\varphi)$:

$$\mathcal{D}_T(X) := \sum_{\varphi=(\varphi_1, \dots, \varphi_T)} p(\varphi) \delta\left(X - \frac{1}{\sqrt{T}}S\varphi\right)$$

Théorème 7.6.4. “*Théorème central limite pour une suite de variables aléatoires* $(\varphi_t)_t$ ”. La distribution de données \mathcal{D}_T converge vers la loi Gaussienne $G_D(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}}e^{-\frac{X^2}{2D}}$, avec $D = 1$:

$$\lim_{T \rightarrow \infty}^* \mathcal{D}_T = G_D \quad (7.6.1)$$

C'est une convergence au sens des distributions (“sens faible”). Si $\psi(X)$ est une fonction test, on a $\langle \psi, \mathcal{D}_T \rangle = \sum_{\varphi=(\varphi_1, \dots, \varphi_T)} \psi\left(\frac{1}{\sqrt{T}}S\varphi\right) p(\varphi)$. Donc (7.6.1) signifie précisément que

$$\forall \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad \langle \psi, \mathcal{D}_T \rangle \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \langle \psi, G_D \rangle$$

$$\Leftrightarrow \forall \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad \sum_{\varphi=(\varphi_1, \dots, \varphi_T)} \psi\left(\frac{1}{\sqrt{T}}S\varphi\right) p(\varphi) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \int \psi(X) G_D(X) dX.$$

La preuve de ce Théorème est faite en TD.

7.6.2 Théorème central limite pour le flot de Lorenz

Considérons maintenant le flot de Lorenz ϕ^t sur \mathbb{R}^3 qui est une “loi déterministe” et non pas une loi aléatoire. Que signifie le théorème central limite dans ce cas ? Voir figure 7.6.2.

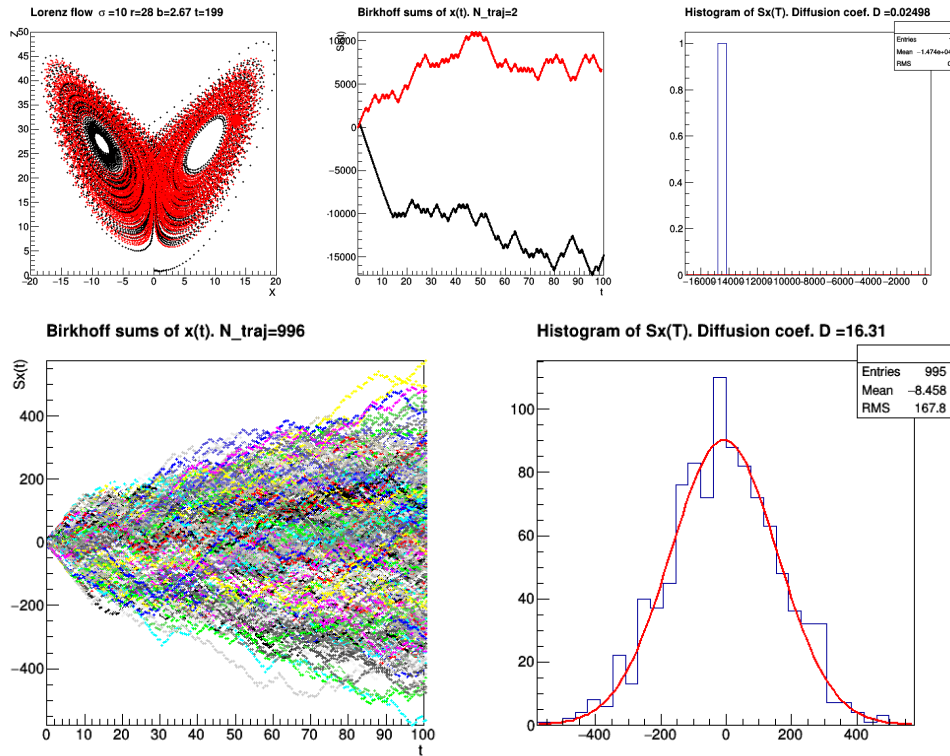


FIGURE 7.6.2 – Pour le **flot de Lorenz**. En haut à gauche, on suit une trajectoire $\phi^t(x)$. On mesure et on somme la valeur de la composante x_1 : $(Sx_1)_t(x) := \int_0^t x_1(\phi^s(x)) ds$, représentée en haut, centre pour deux trajectoires et en bas-gauche pour $N = 995$ trajectoires. En bas à droite, on observe que la distribution des $(Sx_1)_t(x)$ pour $t = 100$, converge vers une Gaussienne pour $N \rightarrow \infty$, avec un coefficient de diffusion $D = 16.31$. Voir [vidéo](#).

On considère des points initiaux $x \in \mathcal{A}$ sur l'attracteur \mathcal{A} distribués avec la loi de probabilité qui est la mesure d'équilibre de SRB μ_{SRB} .

$$\mathcal{D}_T(X) := \sum_{\varphi=(\varphi_1, \dots, \varphi_T)} p(\varphi) \delta \left(X - \frac{1}{\sqrt{T}} S\varphi \right)$$

La “moyenne spatiale” d'une fonction $a \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ est définie par

$$\langle a \rangle_{\mu_{SRB}} := \int_{\mathbb{R}^3} a(x) d\mu_{SRB}(x)$$

Par exemple la fonction $\varphi(x) = x_1$ (première coordonnée du point x) est de moyenne nulle sur l'attracteur, $\langle x_1 \rangle_{\mu_{SRB}} = 0$ pour des raisons de symétrie. On observe que $x_1(t) = \varphi(\phi^t(x))$ est une fonction qui semble aléatoire alternant entre valeurs positives et négatives comme une série de pile/face (il y a cependant des fort effets de mémoire). Le résultat suivant appelé “théorème central limite” montre que l'on a un phénomène de diffusion :

Théorème 7.6.5. “*Théorème central limite pour le flot de Lorenz*”. (Aranjo, Melbourne, Varandas, 2015) Si $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ est une “observable” telle que $\langle \varphi \rangle_{\mu_{SRB}} = 0$. Soit $t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3$ et la “somme de Birkhoff”

$$(S\varphi)_t(x) := \int_0^t \varphi(\phi^s(x)) ds.$$

Si la condition initiale x est distribuée selon la mesure de probabilité μ_{SRB} alors les valeurs $\frac{1}{\sqrt{t}}(S\varphi)_t(x)$ sont distribuées pour $t \rightarrow \infty$ selon la loi Gaussienne $G_D(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} e^{-\frac{X^2}{2D}}$ de variance

$$D = \langle \varphi^2 \rangle_{\mu_{SRB}} + 2 \int_0^\infty \underbrace{\langle \varphi \cdot \varphi(\phi_t) \rangle_{\mu_{SRB}}}_{\text{fonction de corrélation}} : \text{coefficient de diffusion.}$$

Autrement dit, si on considère la distributions des données

$$\mathcal{D}_t(X) := \int \delta\left(X - \frac{1}{\sqrt{t}}(S\varphi)_t(x)\right) d\mu_{SRB}(x),$$

on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty}^* \mathcal{D}_t = G_D \tag{7.6.2}$$

— (7.6.2) signifie

$$\forall \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad \langle \psi, \mathcal{D}_t \rangle \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \langle \psi, G_D \rangle$$

$$\Leftrightarrow \forall \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad \int \psi\left(\frac{1}{\sqrt{t}}(S\varphi)_t(x)\right) d\mu_{SRB}(x) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \int \psi(X) G_D(X) dX$$

— Voir [vidéo](#). sur TCL pour Lorenz.

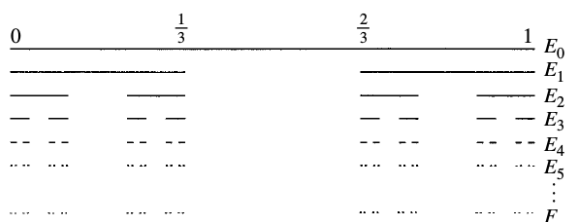


FIGURE 7.3.5 – Ensemble de Cantor

Chapitre 8

Dynamique de champs et morphogénèse

Dans ce chapitre on étudie un système dynamique de dimension infinie. L'état d'un tel système est décrit à une date t par une fonction $u(x)$ aussi appelée "champs". La variable d'espace est $x \in \mathbb{R}^d$ et pour simplifier notre étude sera essentiellement en dimension $d = 1$. Cette fonction u peut avoir plusieurs composantes (et éventuellement avoir une interprétation géométrique comme la section d'un espace fibré).

Article de A. Turing 1952 : La morphogénèse signifie "formation des structures et formes". L'article fondateur est celui de A. Turing en 1952. En Section 8.2 on présentera un modèle spatial de type "réaction-diffusion" issu de l'article de Turing. Le but de Turing était de comprendre la croissance des cellules dans les organismes vivants. En 1995, Kondo et al. publient un [article](#) montrant la pertinence de ce modèle pour les couleurs sur le poisson "angelfish". Voir figure 8.0.1.

Références :

- Livre de Cross et al. [\[10\]](#)
- Livre de C. Misbah "Dynamiques complexes et morphogénèse"
- Page web de [Arnd Scheel](#).

8.1 Modèle à une dimension et une composante

Pour commencer nous considérons un modèle assez simple en dimension spatiale $d = 1$ qui à une composante, c'est à dire que le champ est $u(x, t) \in \mathbb{R}$. Le but est de montrer la démarche pour l'étude linéaire des instabilités et la formation de motif dans ce cadre simple.

8.1.1 Modèle de Swift-Hohenberg

Ce modèle à une dimension concerne une fonction $u(x, t) \in \mathbb{R}$ sur le domaine $x \in \mathbb{R}$ et le temps $t \in \mathbb{R}$. On connaît les valeurs $u(x, t = 0)$ pour tout x et son évolution est régit

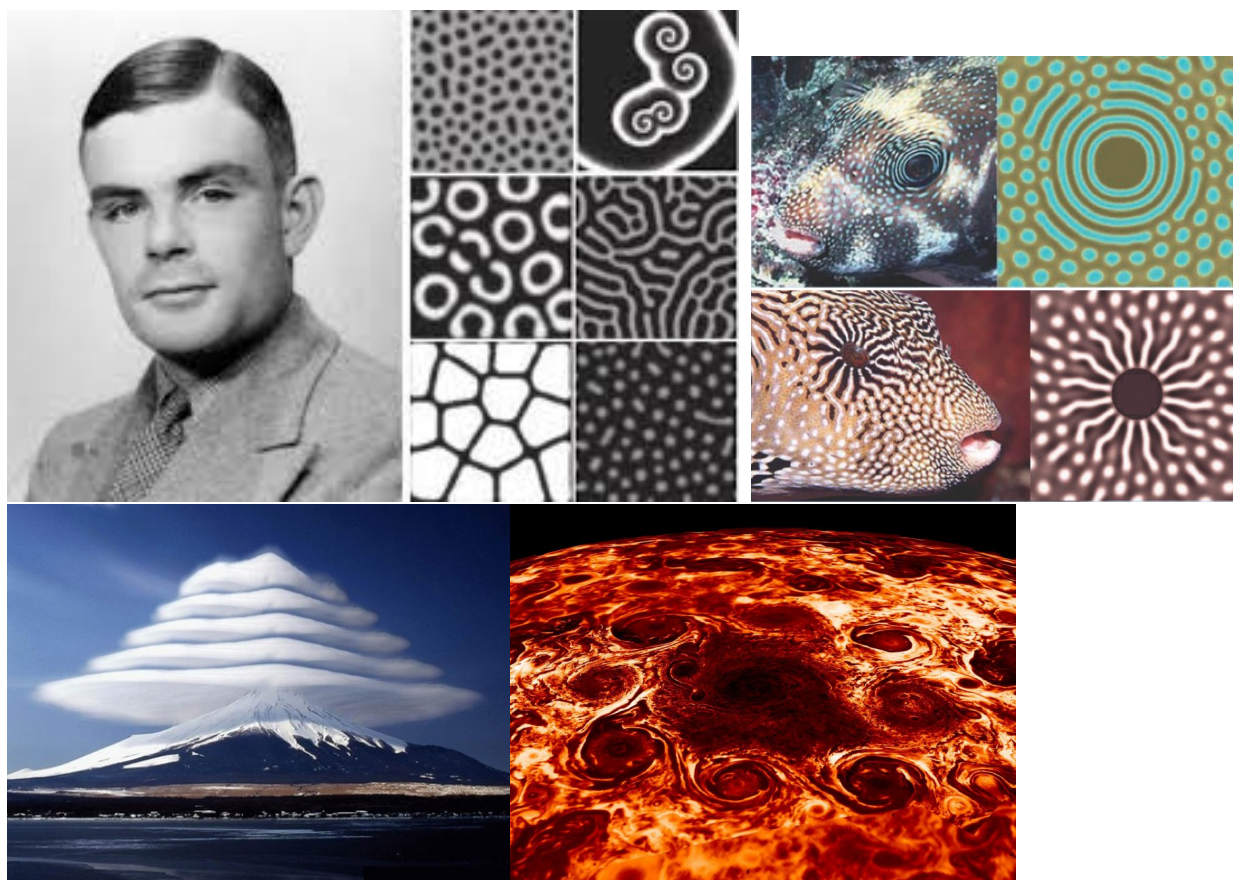


FIGURE 8.0.1 – (a) Turing et formes appelées “motifs”. (b) motifs sur le poisson modélisés par le modèle de réaction - diffusion. (c) motif de nuages (d) structure de cyclones au pôle nord de Jupiter.

par l'équation de Swift-Hohenberg :

$$\boxed{(\partial_t u)(x, t) = ru(x, t) - (\partial_x^2 + 1)^2 u(x, t) - (u(x, t))^3} \quad (8.1.1)$$

avec le paramètre $r \in \mathbb{R}$. Mathématiquement c'est une équation différentielle aux dérivées partielles non linéaire (EDP non linéaire).

Ce modèle permet entre autre de décrire l'expérience des **Rouleaux de Rayleigh-Bénard** ou les **ondes gravitaire de capillarité**. Voir [10] chap.2.

8.1.2 Analyse de la stabilité d'une solution homogène stationnaire

Recherche d'une solution homogène stationnaire

On cherche une solution homogène stationnaire $u(x, t) = p$ avec $p \in \mathbb{R}$ fixé. L'équation (8.1.1) donne

$$\begin{aligned} 0 &= rp - p - p^3 \\ \Leftrightarrow 0 &= p((r-1) - p^2) \\ \Leftrightarrow p &= 0 \quad \text{ou } p = \pm\sqrt{r-1} \text{ si } r \geq 1. \end{aligned}$$

Dans la suite on s'intéresse à la solution trouvée $p = 0$ (il y en a deux autres), c'est à dire au champ $u(x, t) = 0$ qui est solution de (8.1.1).

Linéarisation du système près de la solution homogène et stationnaire

On va étudier la stabilité de la solution $p = 0$ vis à vis des petites perturbations v . Supposons donc

$$u(x, t) = p + v(x, t) = v(x, t)$$

avec une petite perturbation $|v(x, t)| \ll 1$. On a donc

$$v^3 \ll v^2 \ll v \ll 1$$

c'est à dire que l'on peut négliger les termes de degré supérieurs à 1. L'équation (8.1.1), en négligeant le terme v^3 , donne :

$$\boxed{\partial_t v = rv - (\partial_x^2 + 1)^2 v} \quad (8.1.2)$$

Résolution du système linéarisé

Mathématiquement (8.1.2) est une équation différentielle aux dérivées partielles linéaire à coefficients constants. Il est donc possible de la résoudre par l'analyse de Fourier. Pour cela, on pose :

$$\tilde{v}(\xi, \omega) := \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2} \int e^{-i\xi x - i\omega t} v(x, t) dx dt \in \mathbb{C} \quad : \text{ transformée de Fourier}$$

avec la fréquence spatiale $\xi \in \mathbb{R}$ (ou vecteur d'onde réel) et fréquence temporelle $\omega \in \mathbb{C}$ (possiblement complexe). Inversement

$$v(x, t) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2} \int e^{i\xi x + i\omega t} \tilde{v}(\xi, \omega) d\xi d\omega \in \mathbb{C} \quad : \text{ transformée de Fourier inverse} \quad (8.1.3)$$

qui exprime $v(x, t)$ comme superposition de modes de Fourier (ou ondes planes) $e^{i\xi x + i\omega t}$ avec des amplitudes $\tilde{v}(\xi, \omega) \in \mathbb{C}$. Le **théorème de Fourier** dit que toute fonction v

peut s'écrire sous cette forme et de façon unique. L'intérêt de cette décomposition est que les opérateurs de dérivées agissent de façon très simple (car les variables x, t sont dans l'exponentielle) :

$$\partial_t v = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2} \int e^{i\xi x + i\omega t} (i\omega) \tilde{v}(\xi, \omega) d\xi d\omega, \quad \partial_x v = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2} \int e^{i\xi x + i\omega t} (i\xi) \tilde{v}(\xi, \omega) d\xi d\omega.$$

Ainsi (8.1.2) s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2} \int e^{i\xi x + i\omega t} (i\omega \tilde{v}(\xi, \omega)) d\xi d\omega &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2} \int e^{i\xi x + i\omega t} r \tilde{v}(\xi, \omega) d\xi d\omega \\ &\quad - \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2} \int e^{i\xi x + i\omega t} ((i\xi)^2 + 1)^2 \tilde{v}(\xi, \omega) d\xi d\omega \\ \Leftrightarrow \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2} \int e^{i\xi x + i\omega t} (i\omega - r + ((i\xi)^2 + 1)^2) \tilde{v}(\xi, \omega) d\xi d\omega &= 0 \end{aligned}$$

et d'après l'unicité de la décomposition de Fourier cela est équivalent à

$$(i\omega - r + ((i\xi)^2 + 1)^2) \tilde{v}(\xi, \omega) = 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Posons $\sigma = i\omega \in \mathbb{C}$. Alors si $\tilde{v}(\xi, \omega) \neq 0$, c'est équivalent à

$$\boxed{\sigma(\xi) := i\omega = r - (1 - \xi^2)^2}. \quad (8.1.4)$$

Cette relation entre ω et ξ s'appelle une **relation de dispersion**.

Pour exprimer le résultat, rappelons que $v(x, t = 0) =$ est supposé connu. Cela s'exprime par

$$\begin{aligned} v(x, t = 0) &\stackrel{(8.1.3)}{=} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2} \int e^{i\xi x} \tilde{v}(\xi, \omega) d\xi d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{i\xi x} \tilde{v}_0(\xi) d\xi \end{aligned}$$

avec sa transformée de Fourier $\tilde{v}_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\xi x} v(x, t = 0) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \tilde{v}(\xi, \omega) d\omega$ aussi connue. Alors

$$v(x, t) \stackrel{(8.1.3, 8.1.4)}{=} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2} \int e^{i\xi x + i\omega t} \tilde{v}(\xi, \omega) \delta(i\omega - \sigma(\xi)) d\xi d\omega \quad (8.1.5)$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2} \int e^{i\xi x + \sigma(\xi)t} \tilde{v}(\xi, \omega) d\xi \quad (8.1.6)$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})} \int e^{\sigma(\xi)t} e^{i\xi x} \tilde{v}(\xi) d\xi \quad (8.1.7)$$

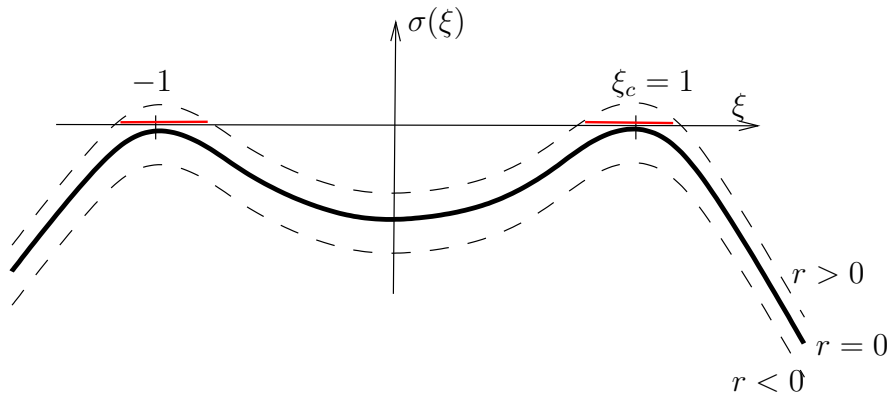
(Rem : la contrainte (8.1.4) qui relie ω à ξ a fait disparaître l'intégrale sur ω).

Diagramme de stabilité et croissance d'un motif

On discute maintenant le comportement à temps long dans l'expression (??). D'après (??), pour chaque terme ξ , on a $\sigma(\xi) \in \mathbb{R}$ (réel) et

$$e^{\sigma(\xi)t} \begin{array}{l} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty \text{ si } \sigma(\xi) > 0 \quad : \text{ instabilité} \\ \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \text{ si } \sigma(\xi) < 0 \quad : \text{ stabilité} \end{array}$$

Par conséquent le **mode** $\xi \in \mathbb{R}$ est **stable** si et seulement si $\sigma(\xi) < 0$. Utilisant (??) on trace la courbe $\sigma \in \mathbb{R}$ en fonction $\xi \in \mathbb{R}$, pour différents paramètres $r \in \mathbb{R}$.



Il apparaît que :

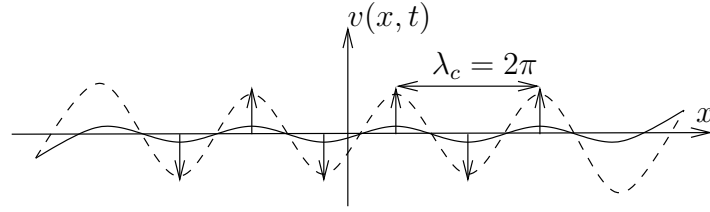
- Pour $r < 0$ tous les modes $\xi \in \mathbb{R}$ sont stables (car $\sigma(\xi) < 0$).
- Pour $r = 0$, il apparaît deux modes instables $\xi = \pm 1$. On dit que $r = 0$ est le **seuil d'instabilité**.
- Pour $0 < r \ll 1$, les modes modes instables ξ sont dans un petit intervalle (rouge) autour de $\xi_c = \pm 1$.

Ainsi pour $r = 0$ (ou $0 < r \ll 1$ plutôt), les modes $\xi = \pm \xi_c$ avec $\xi_c = 1$, vont croître et les autres décroître. Comme l'onde $v(x, t = 0)$ initiale est réelle on a $\tilde{v}(-\xi) = \overline{\tilde{v}(\xi)}$. On notera $\tilde{v}(\xi) = |\tilde{v}(\xi)| e^{i \arg(\tilde{v}(\xi))} \in \mathbb{C}$. On a $\sigma(-\xi_c) = \sigma(\xi_c) > 0$ au seuil. Eq. (??) donne (en ne gardant que les modes $\pm \xi_c$)

$$\begin{aligned} v(x, t) &\sim \frac{1}{(\sqrt{2\pi})} e^{\sigma(\xi_c)t} e^{i\xi_c x} \tilde{v}(\xi_c) + \frac{1}{(\sqrt{2\pi})} e^{\sigma(-\xi_c)t} e^{-i\xi_c x} \tilde{v}(-\xi_c) \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})} e^{\sigma(\xi_c)t} |\tilde{v}(\xi_c)| (e^{i(\xi_c x + \arg(\tilde{v}(\xi_c)))} + e^{-i(\xi_c x + \arg(\tilde{v}(\xi_c)))}) \\ &= A(t) \cos(\xi_c x + \arg(\tilde{v}(\xi_c))) \end{aligned} \quad (8.1.8)$$

avec l'amplitude $A(t) = \frac{2}{(\sqrt{2\pi})} |\tilde{v}(\xi_c)| e^{\sigma(\xi_c)t}$ qui diverge car $\sigma(\xi_c) > 0$ pour le vecteur d'onde $\xi_c = 1$.

On a donc montré que, partant de la solution stationnaire et homogène $u = 0$, si $0 < r \ll 1$, cette solution est instable, et en présence de petites fluctuations $v(x, t)$, un **motif périodique apparaît et s'amplifie**, de longueur d'onde $\lambda_c = \frac{2\pi}{\xi_c} = 2\pi$.



Brisure spontanée de symétrie : Dans la solution (8.1.8) qui apparaît, la phase $\varphi = \arg(\tilde{v}(\xi_c))$ (qui détermine la position du maximum de l'onde) dépend de la condition initiale. A priori toutes les phases $\varphi \in S^1$ sont possibles. On ne peut pas prédire cette phase si on ne connaît pas précisément la condition initiale. Ce phénomène s'appelle **brisure spontanée de symétrie** en physique¹.

8.1.3 Stabilité du motif. Etude non linéaire.

L'analyse précédente a montré qu'un motif $v(x, t)$ s'amplifie si $0 < r \ll 1$. Cependant on a fait l'hypothèse que $|v| \ll 1$ et on a négligé les termes non linéaires. Si $|v(x, t)|$ augmente, les termes non linéaires vont jouer un rôle et éventuellement stabiliser le motif. Pour faire cette étude prenons la solution trouvée (8.1.8), $u = A \cos(x)$, dans le cadre linéaire, supposons que l'amplitude se stabilise vers une valeur $A \in \mathbb{R}$ que l'on recherche. (Pour simplifier on considère la phase $\varphi = 0$. Elle ne joue pas de rôle). L'équation de départ (8.1.1) donne alors pour $u = A \cos(x)$:

$$\partial_t u = ru - (\partial_x^2 + 1)^2 u - u^3$$

$$\Leftrightarrow 0 = rA \cos(x) - (\partial_x^2 + 1)^2 A \cos(x) - (A \cos(x))^3, \quad \forall x$$

On développe $(\partial_x^2 + 1)^2 = 1 + 2\partial_x^2 + \partial_x^4$ et on utilise $(\cos x)^3 = \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos(3x)$ donnant

$$\begin{aligned} 0 &= rA \cos x - A \cos x + 2A \cos x - A \cos x - A^3 \left(\frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos(3x) \right) \\ &= \left(rA - \frac{3}{4}A^3 \right) \cos x - A^3 \frac{1}{4} \cos(3x), \quad \forall x \end{aligned} \quad (8.1.9)$$

D'après l'unicité de la décomposition en série de Fourier, le premier terme donne

$$rA - \frac{3}{4}A^3 = A \left(r - \frac{3}{4}A^2 \right) = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ ou } A = \sqrt{\frac{4}{3}r},$$

La solution $A = 0$ ne nous intéresse pas (car c'est la solution instable), on garde la solution stable

$$A = \sqrt{\frac{4}{3}r}$$

1. Il est similaire à la situation plus simple d'une particule immobile à un maximum de potentiel $V(x)$ en dimension $d = 1$ et qu'une petite fluctuation en position peut faire basculer vers la droite ou la gauche.

On a donc montré que le motif de la figure précédente se stabilise à cette amplitude.

Remarque 8.1.1. Le deuxième terme de (8.1.9) impose $A = 0$. Pour justifier que l'on garde la solution $A = \sqrt{\frac{4}{3}r}$, il faut remarquer dans ce calcul que partant de l'expression $u = A \cos(x)$ de fréquence $\xi = 1$, le terme non linéaire u^3 a fait apparaître $\cos(3x)$ de fréquence $\xi = 3$. Cela s'appelle **l'harmonique 3**. Il est donc judicieux de partir plutôt d'une expression contenant cette harmonique (et par récurrence, on trouvera toutes les autres harmoniques). Un calcul plus complet suppose donc

$$u(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n \cos(nx)$$

et l'on cherche par récurrence les amplitudes A_n . On retrouvera $A_1 = \sqrt{\frac{4}{3}r}$, et $|A_n| \ll A_1$ pour $n \neq 1$ qui sont des "corrections".

8.1.4 Simulation numérique

Voir [Simulations numériques](#) pour différents paramètres $r = 0.2, 1, 3$.

8.2 Modèle de réaction-diffusion à deux composantes

On présente maintenant un modèle toujours en dimension d'espace $d = 1$ (il se généralise en dimension $d \geq 1$), mais a deux composantes u_1, u_2 . Cela complique l'étude par rapport au cas précédent. Cependant il n'y aura pas de termes ∂_x^4 mais seulement des termes ∂_x^2 dit de "diffusion". Pour cette raison on appelle ce modèle "**réaction-diffusion**". Ce modèle a été introduit par A. Turing en 1952. La démarche suivie est la même que pour le modèle précédent.

8.2.1 Modèle

Les inconnues sont

$$u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t)) \in \mathbb{R}^2$$

Remarque 8.2.1. On peut penser à $u_1(x, t), u_2(x, t)$ comme les concentrations de deux produits A, B au point $x \in \mathbb{R}$ et à l'instant $t \in \mathbb{R}$.

On suppose que l'on connaît la loi d'évolution qui est une équation différentielle aux dérivées partielles non linéaire (EDP non linéaire) :

$$\boxed{\begin{cases} \partial_t u_1 &= f_1(u_1, u_2) + D_1 \partial_x^2 u_1, \\ \partial_t u_2 &= f_2(u_1, u_2) + D_2 \partial_x^2 u_2, \end{cases}} \quad (8.2.1)$$

où $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sont des "fonctions de réaction" (non linéaires en générale) et $D_1, D_2 \geq 0$ sont des coefficients de diffusion.

Pour simplifier, on notera la matrice de diffusion :

$$\mathbb{D} := \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix},$$

et $f(u) = \begin{pmatrix} f_1(u) \\ f_2(u) \end{pmatrix}$, ainsi l'équation d'évolution (8.2.1) s'écrit :

$$\partial_t u = f(u) + \mathbb{D} \partial_x^2 u. \quad (8.2.2)$$

Remarque 8.2.2. Si on suppose $u(t)$ indépendant de x (c'est à dire homogène) alors on a système dynamique sur \mathbb{R}^2 qui est

$$\partial_t u = f(u) \quad (8.2.3)$$

donc vraiment plus simple à étudier. Si $u(t, x)$ dépend de x , la diffusion \mathbb{D} "couplent localement" les différentes dynamiques.

Exemple 8.2.3. Le modèle de Gray-Scott :

C'est l'équation (8.2.1) avec les fonctions de degré 2 données par :

$$\begin{cases} f_1(u_1, u_2) &= -(a+b)u_1 + u_1^2 u_2 \\ f_2(u_1, u_2) &= a(1-u_2) - u_1^2 u_2 \end{cases} \quad (8.2.4)$$

avec les paramètres $a, b > 0$ et en dimension $d = 2$. Voir [videos ici](#).

Exemple 8.2.4. Le modèle du Brusselator ([10, p.105]). Inventé à Bruxelles pour modéliser la réaction chimique de [Belousov Jabotinski](#).

$$\begin{cases} f_1(u_1, u_2) &= a - (b+1)u_1 + u_1^2 u_2 \\ f_2(u_1, u_2) &= bu_1 - u_1^2 u_2 \end{cases} \quad (8.2.5)$$

8.2.2 Interprétation des équations du modèle de Gray Scott

On note u_1, u_2 les concentrations de composés notés A, B dans une solution chimique unidimensionnelle. L'équation (8.2.1) avec (8.2.4), contient plusieurs termes que l'on interprète individuellement

— ajout de composé B au taux $a(1-u_2)$: c'est modélisé par le terme :

$$\partial_t u_2 = a(1-u_2).$$

— Réaction chimique :



c'est à dire que si 2 A et 1 B sont en présence alors B est transformé en A . C'est modélisé par les termes

$$\partial_t u_1 = +u_1^2 u_2, \quad \partial_t u_2 = -u_1^2 u_2.$$

en effet, $u_1^2 u_2$ est proportionnel à la probabilité de rencontre de A, A, B dans un élément d'espace.

- perte du composé A au taux $(a + b) u_1$, modélisé par le terme

$$\partial_t u_1 = -(a + b) u_1.$$

- Diffusion spatiale des composés : modélisé par

$$\partial_t u_1 = D_1 \partial_x u_1, \quad \partial_t u_2 = D_2 \partial_x u_2$$

c'est l'équation de la diffusion (ou **équation de la chaleur**) de J. Fourier, qui a tendance à uniformiser les valeurs de u_1, u_2 .

8.2.3 Analyse de la stabilité d'une solution homogène stationnaire

d'après Turing 1952 [43], et d'après [10, chap.3].

Recherche d'une solution homogène stationnaire

On suppose

$$u(x, t) = (p_1, p_2) = p \in \mathbb{R}^2$$

solution de (8.2.2). C'est à dire que on la suppose de valeur constante, indépendante de x (homogène) et de t (stationnaire).

Eq(8.2.2) donne :

$$\boxed{0 = f(p)}. \quad (8.2.6)$$

Cette équation signifie que p est point fixe du système dynamique homogène (8.2.3), mais n'est pas simple à résoudre en général.

Exemple 8.2.5. Pour le **modèle du Brusselator** (8.2.5) cela donne

$$p_1 = a, \quad p_2 = \frac{b}{a}. \quad (8.2.7)$$

Démonstration. On a d'après (8.2.5)

$$\begin{aligned} 0 = f(p) &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = a - (b + 1)p_1 + p_1^2 p_2 \\ 0 = bp_1 - p_1^2 p_2 = p_1(b - p_1 p_2) \end{cases} \\ \Leftrightarrow p_2 = \frac{b}{p_1}, & \quad 0 = a - (b + 1)p_1 + bp_1 = a - p_1 \Leftrightarrow p_1 = a, \quad p_2 = \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

□

Linéarisation du système près de la solution homogène et stationnaire

On pose

$$\boxed{u(x, t) = p + v(x, t)}$$

avec $v = (v_1, v_2)$ que l'on suppose petit : $|v| \ll 1$ et avec p solution de (8.2.6), $f(p) = 0$. On connaît p et $v(x, t = 0)$ et on cherche $v(x, t)$ pour tout $x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$.

Alors (8.2.2) s'écrit au premier ordre en v :

$$\boxed{\partial_t v = \mathbb{A}v + \mathbb{D}\partial_x^2 v} \quad (8.2.8)$$

avec

$$\mathbb{A} := Df_p = \begin{pmatrix} \partial_{u_1} f_1 & \partial_{u_2} f_1 \\ \partial_{u_1} f_2 & \partial_{u_2} f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

la différentielle de f en p . Noter que (8.2.8) est une PDE linéaire à coef. constants.

Démonstration. Eq.(8.2.2) est :

$$\partial_t u = f(u) + \mathbb{D}\partial_x^2 u.$$

Notons $u = p + v$, alors d'après le développement de Taylor à l'ordre 1 :

$$f(u) = f(p + v) = f(p) + Df_p \cdot v + O(v^2) = Df_p \cdot v + O(v^2).$$

et $\partial_x^2 u = \partial_x^2 v$. On déduit (8.2.8). \square

Exemple 8.2.6. Pour le modèle du Brusselator (8.2.5) et avec (8.2.7) cela donne

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &:= Df_p = \begin{pmatrix} \partial_{u_1} f_1 & \partial_{u_2} f_1 \\ \partial_{u_1} f_2 & \partial_{u_2} f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -(b+1) + 2p_1 p_2 & p_1^2 \\ b - 2p_1 p_2 & -p_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-1 & a^2 \\ -b & -a^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8.2.9)$$

Résolution du système linéarisé

Eq.(8.2.8) est une EDP linéaire à coefs constants en x, t , donc soluble par transformée de Fourier.

On pose :

$$\tilde{v}(\xi, \omega) := \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2} \int e^{-i\xi x - i\omega t} v(x, t) dx dt \in \mathbb{C}^2 \quad : \text{transformée de Fourier}$$

avec la fréquence spatiale $\xi \in \mathbb{R}$ (ou vecteur d'onde) et fréquence temporelle $\omega \in \mathbb{R}$. Inversement

$$v(x, t) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2} \int e^{i\xi x + i\omega t} \tilde{v}(\xi, \omega) d\xi d\omega \in \mathbb{C}^2 \quad : \text{transformée de Fourier inverse} \quad (8.2.10)$$

qui exprime $v(x, t)$ comme superposition de modes de Fourier (ou ondes planes) $e^{i\xi x + i\omega t}$. Alors (8.2.8) s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2} \int e^{i\xi x + i\omega t} (i\omega \tilde{v}(\xi, \omega)) d\xi d\omega &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2} \int e^{i\xi x + i\omega t} \mathbb{A} \tilde{v}(\xi, \omega) d\xi d\omega \\ &+ \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2} \int e^{i\xi x + i\omega t} (-\xi^2) \mathbb{D} \tilde{v}(\xi, \omega) d\xi d\omega \end{aligned}$$

Comme la décomposition de Fourier est unique on identifie les termes devant $e^{i\xi x + i\omega t}$ et on obtient $i\omega \tilde{v} = \mathbb{A} \tilde{v} - \xi^2 \mathbb{D} \tilde{v}$ soit

$$\boxed{\mathbb{A}_\xi \tilde{v} = \sigma \tilde{v}} \quad (8.2.11)$$

avec

$$\sigma := i\omega \in \mathbb{C},$$

$$\mathbb{A}_\xi := \mathbb{A} - \xi^2 \mathbb{D} \quad : \text{matrice } 2 \times 2 \quad (8.2.12)$$

Etant donné une fréquence spatiale $\xi \in \mathbb{R}$ (i.e. un mode de Fourier), l'équation (8.2.11) est une "équation aux valeurs propres" de la matrice \mathbb{A}_ξ donnant 2 valeurs propres $\sigma_\pm(\xi) = i\omega_\pm$ qui sont les fréquences temporelles de ce mode de Fourier et deux vecteurs propres associés $\tilde{v}_\pm(\xi) \in \mathbb{R}^2$ qui sont les amplitudes des deux composantes.

D'après la formule générale sur les valeurs propres d'une matrice 2×2 , (A.1.4), on a

$$\sigma_\pm(\xi) = i\omega_\pm = \frac{1}{2} \left(\text{Tr}(\mathbb{A}_\xi) \pm \sqrt{\Delta} \right) \in \mathbb{C} \quad (8.2.13)$$

avec

$$\Delta := (\text{Tr}(\mathbb{A}_\xi))^2 - 4\det(\mathbb{A}_\xi). \quad (8.2.14)$$

Et rappelons que

$$\sigma_+ + \sigma_- = \text{Tr}(\mathbb{A}_\xi), \quad \sigma_+ \sigma_- = \det(\mathbb{A}_\xi). \quad (8.2.15)$$

Remarque 8.2.7. La relation (8.2.13) entre les fréquences ω et ξ est souvent appelée **relation de dispersion** en physique.

En reprenant (8.2.10) on a obtenu que l'onde $v(x, t)$ évolue selon

$$v(x, t) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2} \sum_{+,-} \int e^{\sigma_\pm(\xi)t} e^{i\xi x} \tilde{v}_\pm(\xi) d\xi \quad (8.2.16)$$

avec $v(x, t=0)$ supposé connu qui détermine les vecteurs propres $\tilde{v}_\pm(\xi)$. (Rem : la contrainte (8.2.11) qui relie ω à ξ a fait disparaître l'intégrale sur ω au profit d'une somme sur \pm).

Diagramme de stabilité

On discute maintenant le comportement à temps long dans l'expression (8.2.16). Pour chaque terme ξ , on a

$$e^{\sigma_{\pm}(\xi)t} = \underbrace{e^{\operatorname{Re}(\sigma_{\pm}(\xi))t}}_{\text{module}} \underbrace{e^{i\operatorname{Im}(\sigma_{\pm}(\xi))t}}_{\text{oscillant}}$$

donc

$$\begin{aligned} |e^{\sigma_{\pm}(\xi)t}| = e^{\operatorname{Re}(\sigma_{\pm}(\xi))t} &\xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty \text{ si } \operatorname{Re}(\sigma_{\pm}(\xi)) > 0 && : \text{ instabilité} \\ &\xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \text{ si } \operatorname{Re}(\sigma_{\pm}(\xi)) < 0 && : \text{ stabilité} \end{aligned}$$

Par conséquent le mode $\xi \in \mathbb{R}$ est stable si $\sigma_+(\xi) < 0$ et $\sigma_-(\xi) < 0$. Comme $\sigma_{\pm}(\xi)$ sont les valeurs propres de la matrice \mathbb{A}_{ξ} , cette propriété peut être donnée par la matrice \mathbb{A}_{ξ} directement :

Lemme 8.2.8. *Le mode de Fourier $\xi \in \mathbb{R}$ est **stable** (c'est à dire que $\sigma_+(\xi) < 0$ et $\sigma_-(\xi) < 0$) si et seulement si la matrice \mathbb{A}_{ξ} vérifie :*

$$\operatorname{Tr}(\mathbb{A}_{\xi}) < 0 \text{ et } \det(\mathbb{A}_{\xi}) > 0. \quad (8.2.17)$$

*Par ailleurs le mode est **oscillant** si et seulement si $\Delta < 0$ (défini en (8.2.14)).*

Remarque 8.2.9. De façon équivalente le mode ξ est **instable** si $\operatorname{Tr}(\mathbb{A}_{\xi}) < 0$ ou $\det(\mathbb{A}_{\xi}) > 0$.

Cela se résume avec le diagramme de stabilité de la figure 8.2.1.

Démonstration. On utilise l'expression (8.2.15) des valeurs propres. Il faut étudier les différents cas et sous cas :

- Si $\Delta > 0$ alors on a deux valeurs propres réelles $\sigma_- < \sigma_+$,
 - Si $\det(\mathbb{A}_{\xi}) = \sigma_- \sigma_+ < 0$ alors $\sigma_- < 0 < \sigma_+$ on a donc *instabilité*.
 - Si $\det(\mathbb{A}_{\xi}) = \sigma_- \sigma_+ > 0$,
 - Si $\operatorname{Tr}(\mathbb{A}_{\xi}) = \sigma_+ + \sigma_- > 0$ alors $0 < \sigma_- < \sigma_+$ donc *instabilité*.
 - Si $\operatorname{Tr}(\mathbb{A}_{\xi}) = \sigma_+ + \sigma_- < 0$ alors $\sigma_- < \sigma_+ < 0$ donc *stabilité*.
- Si $\Delta < 0$ alors on a deux valeurs propres complexes conjuguées $\sigma_{\pm} = R \pm iI$ avec $R = \operatorname{Re}(\sigma_{\pm})$, $I = \operatorname{Im}(\sigma_{\pm}) \in \mathbb{R}$. Il y a des oscillations. On a $\det(\mathbb{A}_{\xi}) = \sigma_- \sigma_+ = R^2 + I^2 > 0$ et $\operatorname{Tr}(\mathbb{A}_{\xi}) = \sigma_+ + \sigma_- = 2R$ donc
 - Si $\operatorname{Tr}(\mathbb{A}_{\xi}) = \sigma_+ + \sigma_- = 2R < 0$ on a *stabilité*.
 - Si $\operatorname{Tr}(\mathbb{A}_{\xi}) = \sigma_+ + \sigma_- = 2R > 0$ on a *instabilité*.

□

Le résultat suivant de A. Turing (1952) nous informe sur le seuil d'instabilité, c'est à dire lorsque tous les modes ξ sont stables sauf un seul mode ξ_c qui est à la limite de l'instabilité.

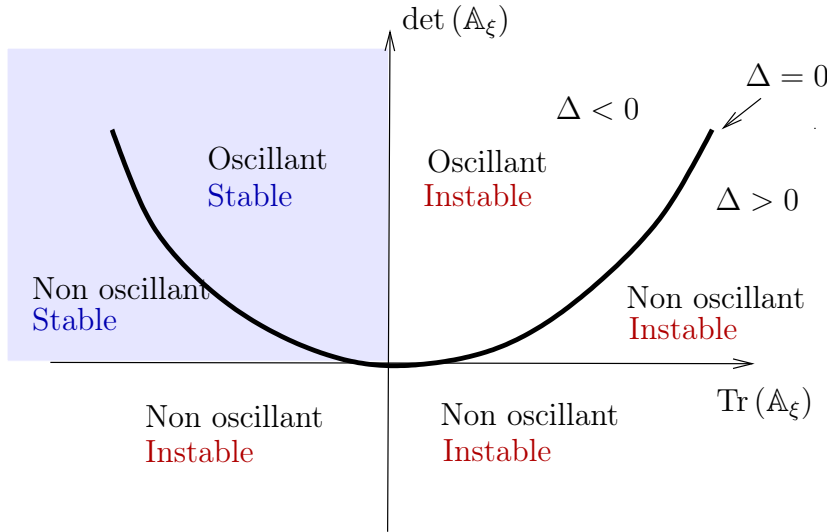


FIGURE 8.2.1 – Diagramme de Stabilité du mode de Fourier $\xi \in \mathbb{R}$. La courbe $\Delta = (\text{Tr}(\mathbb{A}_\xi))^2 - 4\det(\mathbb{A}_\xi) = 0$ est une parabole d'équation $\det(\mathbb{A}_\xi) = \frac{1}{4}(\text{Tr}(\mathbb{A}_\xi))^2$.

Théorème 8.2.10 (“Théorème de Turing sur le seuil d’instabilité” (1952)). *Supposons que la solution homogène et stationnaire p , eq.(8.2.6), soit stable en l’absence de diffusion (i.e. si $D_1, D_2 = 0$). D’après le Lemma 8.2.8, cela revient à supposer que*

$$\text{Tr}(\mathbb{A}) < 0 \text{ et } \det(\mathbb{A}) > 0.$$

avec $\mathbb{A} = \mathbb{A}_{\xi=0} = Df_p = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Posons $D_2 = \mu D_1$ avec $\mu > 0$ qui mesure le rapport des coefs de diffusions. Alors il y a des modes ξ instables si et seulement si

$$\mu a_{11} + a_{22} - 2\sqrt{\mu}\sqrt{\det(\mathbb{A})} > 0 \quad (8.2.18)$$

(qui est une équation du 2nd degré en $\sqrt{\mu}$). Cette condition n’est pas vérifiée pour $D_2 = D_1$. Si $a_{11} > 0$ cette condition est vérifiée pour $\mu > 1$ assez grand (et alors $a_{22} < 0$). Au seuil d’instabilité, on a l’égalité et il y a un seul mode instable dont la fréquence spatiale ξ_c et la longueur d’onde λ_c de l’instabilité sont

$$\xi_c = \pm \left(\frac{\det(\mathbb{A})}{D_1 D_2} \right)^{1/4}, \quad \lambda_c = \frac{2\pi}{\xi_c}. \quad (8.2.19)$$

Remarque 8.2.11.

- $a_{11} > 0$ signifie que u_1 est un “activateur” de lui même car cela correspond au terme $\partial_t v_1 = a_{11} v_1 + \dots$

- $a_{22} < 0$ signifie que u_2 est un “inhibiteur” de lui même car cela correspond au terme $\partial_t v_2 = a_{22}v_2 + \dots$

Démonstration. D’après le Lemma 8.2.8, on suppose $\text{Tr}(\mathbb{A}) < 0$ et $\det(\mathbb{A}) > 0$. Pour avoir instabilité du mode ξ , il faut $\text{Tr}(\mathbb{A}_\xi) > 0$ ou $\det(\mathbb{A}_\xi) < 0$. Or $\text{Tr}(\mathbb{A}_\xi) \stackrel{(8.2.12)}{=} \text{Tr}(\mathbb{A}) - \xi^2 \text{Tr}(\mathbb{D}) < 0$ donc on cherche seulement $\det(\mathbb{A}_\xi) < 0$. On a le polynôme du second degré en ξ^2 :

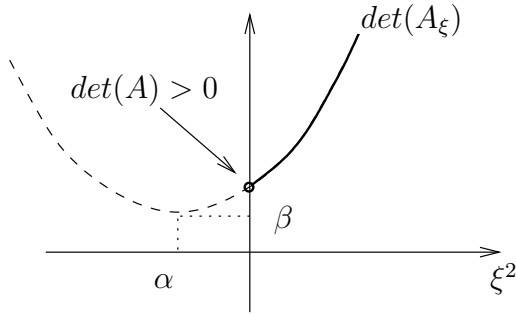
$$\det(\mathbb{A}_\xi) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \xi^2 D_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \xi^2 D_2 \end{pmatrix} \quad (8.2.20)$$

$$\begin{aligned} &= (\xi^2)^2 D_1 D_2 - \xi^2 (D_1 a_{22} + D_2 a_{11}) + \det \mathbb{A} & (8.2.21) \\ &= D_1 D_2 (\xi^2 - \alpha)^2 + \beta \end{aligned}$$

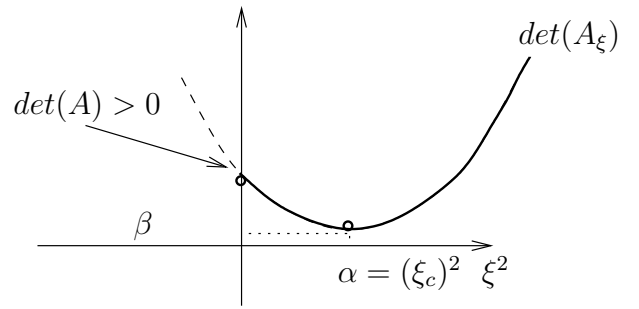
avec

$$\alpha = \frac{1}{2D_1 D_2} (D_1 a_{22} + D_2 a_{11}) = \frac{1}{2\mu D_1} (a_{22} + \mu a_{11})$$

et $\beta = \det \mathbb{A} - D_1 D_2 \alpha^2$. On veut $\det(\mathbb{A}_\xi) < 0$ sachant que $\det(\mathbb{A}_{\xi=0}) > 0$.



Cas $\alpha < 0$.



Cas $\alpha > 0$.

Si $\alpha < 0$, on voit sur la figure, que l’on a toujours $\det(\mathbb{A}_\xi) > 0$. Si $\alpha > 0$, il est possible d’avoir $\det(\mathbb{A}_\xi) < 0$ et le critère du seuil d’instabilité $\det(\mathbb{A}_{\xi_c}) = 0$ donne $\beta = 0$ et $\xi_c^2 = \alpha$. Cela donne, en posant $D_2 = \mu D_1$,

$$\begin{aligned} \exists \xi, \det(\mathbb{A}_\xi) < 0 &\Leftrightarrow \beta < 0 \Leftrightarrow \det \mathbb{A} < D_1 D_2 \alpha^2 \Leftrightarrow \sqrt{\det \mathbb{A}} < \sqrt{D_1 D_2} \alpha \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{D_1 D_2 \det(\mathbb{A})} < D_1 a_{22} + D_2 a_{11} \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{\mu \det(\mathbb{A})} < a_{22} + \mu a_{11} \\ &\Leftrightarrow P(\sqrt{\mu}) > 0 \end{aligned}$$

avec

$$P(\sqrt{\mu}) = a_{11} (\sqrt{\mu})^2 - 2\sqrt{\det(\mathbb{A})} \sqrt{\mu} + a_{22}$$

qui est un polynôme du second degré en $\sqrt{\mu}$. On a obtenu (8.2.18). Pour le cas $\mu = 1$ on a la valeur $P(1) = \text{Tr}(\mathbb{A}) - 2\sqrt{\det \mathbb{A}} < 0$. La condition n’est donc pas satisfaite. Au contraire, Si $a_{11} > 0$ alors $P(\sqrt{\mu}) > 0$ pour μ assez grand. Il y a donc une valeur intermédiaire (le seuil d’instabilité) pour lequel on a l’égalité $P(\mu) = 0$ qui se résoud donnant :

$$\sqrt{\mu} = \frac{1}{a_{11}} \left(\sqrt{\det \mathbb{A}} + \sqrt{\det \mathbb{A} - a_{11}a_{22}} \right)$$

Au seuil d'instabilité, on a $\beta = 0$ et alors

$$\xi_c^2 = \alpha = \frac{\sqrt{\det \mathbb{A}}}{\sqrt{D_1 D_2}}$$

qui donne (8.2.19). □

Remarque 8.2.12.

- Le mode instable v de fréquence ξ_c va croître et son comportement va sortir de l'hypothèse $|v| \ll 1$. Pour poursuivre l'étude il faut tenir compte des non linéarité qui limitent éventuellement sa croissance. Cela nécessite d'autres techniques, voir Section @@. L'instabilité de Turing est similaire à la bifurcation fourche supercritique.
- A priori l'instabilité de Turing peut paraître surprenante car sans diffusion on a supposé que le mode est stable. Or la diffusion est aussi un mécanisme stabilisateur en général. D'un point de vue mathématique, le mécanisme d'instabilité de Turing est simplement que l'on a la matrice

$$\mathbb{A}_\xi = \mathbb{A} + \xi^2 (-\mathbb{D})$$

composée des matrices \mathbb{A} , $(-\mathbb{D})$ qui ont chacune des valeurs propres réelles négatives, et donc donnant de la stabilité lorsqu'elles interviennent seules, mais **ces matrices ne commutent pas** et il est possible que la matrice composée \mathbb{A}_ξ ait des valeurs propres positives impliquant de l'instabilité (et c'est en effet ce que l'on a montré dans le Thm 8.2.10).

Exemple 8.2.13. Le Brusselator

On suppose le mode $\xi = 0$ stable. D'après (8.2.17) et (8.2.9) qui est $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} b-1 & a^2 \\ -b & -a^2 \end{pmatrix}$, cela donne

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\mathbb{A}) &= b-1-a^2 < 0 \text{ et } \det(\mathbb{A}) = a^2 > 0 \\ \Leftrightarrow b &< a^2 + 1 \end{aligned}$$

Question : à D_1, a, b fixés, posant $D_2 = \mu D_1$ avec $\mu \geq 1$, pour quelles valeurs de $\mu \geq 1$ a-t-on apparition d'une instabilité? et quelle est la fréquence spatiale ξ_c de cette instabilité?

Réponse : d'après le critère de Turing (8.2.18) il faut :

$$\mu a_{11} + a_{22} - 2\sqrt{\mu} \sqrt{\det(\mathbb{A})} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{\mu})^2 (1 - b) + 2|a|\sqrt{\mu} + a^2 = 0$$

qui est une équation du second degré en $\sqrt{\mu} > 0$ avec $\Delta = 4a^2 - 4(1 - b)a^2 = 4a^2b$. Il faut donc $b > 0$ et alors

$$\sqrt{\mu} = \frac{-2|a| \pm 2|a|\sqrt{b}}{2(1 - b)} = \frac{|a|(-1 \pm \sqrt{b})}{(1 - \sqrt{b})(1 + \sqrt{b})} = -\frac{|a|}{(1 + \sqrt{b})} \text{ ou } \frac{|a|}{(\sqrt{b} - 1)}$$

Il n'y a que la solution :

$$\sqrt{\mu} = \frac{|a|}{(\sqrt{b} - 1)} \text{ si } b > 1.$$

En conclusion, pour apparition de l'instabilité, il faut $1 < b < 1 + a^2$ et alors le seuil d'instabilité est en $D_2 = \mu D_1$ avec

$$\mu = \frac{a^2}{(\sqrt{b} - 1)^2}.$$

D'après (8.2.19), la fréquence de l'onde qui surgit est

$$\xi_c = \pm \left(\frac{\det(\mathbb{A})}{D_1 D_2} \right)^{1/4} = \pm \left(\frac{a^2}{\mu D_1^2} \right)^{1/4} = \pm \frac{1}{\sqrt{D_1 (\sqrt{b} - 1)}}.$$

Exercice 8.2.14. “Modèle de réaction diffusion en écologie des populations”

(inspiré d'un exposé de [Arnd Scheel](#)). Dans cet exercice, en quelques étapes, on construit un modèle en écologie des populations basé sur le phénomène de “réaction diffusion” étudié au départ par A. Turing. Dans une première étape on considère un modèle local linéaire pour lequel $v = 0$ est un point fixe **stable**. Dans une deuxième étape, un modèle spatial avec diffusion qui rend ce point fixe 0 **instable**. Ce phénomène à priori surprenant (car la diffusion est habituellement considéré comme de la dissipation) est appelé “**instabilité de Turing**”.

Modèle local de réaction. Commençons par un modèle de “réaction” local (non spatial). Dans une région donnée, on note $u_1(t)$ la quantité de souris et $u_2(t)$ la quantité de chouettes à la date t . On notera $u(t) = (u_1(t), u_2(t)) \in \mathbb{R}^2$. On considère une population $u(t) = p + v(t)$ avec $p \in \mathbb{R}^2$ une valeur fixe et $v(t) = (v_1(t), v_2(t)) \in \mathbb{R}^2$ représentant des fluctuations autour de la valeur fixe. On suppose que ces fluctuations sont gouvernées à l'ordre linéaire par les règles suivantes : en moyenne, chaque semaine, pour $v_1 = 5$ souris (et $v_2 = 0$ chouette) il y a naissance de 5 autres souris et de 1 chouette. Pour $v_2 = 1$ chouette (et $v_1 = 0$ souris) il y a disparition de 10 souris et de μ chouettes avec $\mu > 0$.

1. Écrire cela sous la forme :

$$\frac{dv}{dt} = \mathbb{A}v, \quad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

avec les éléments de matrice que l'on précisera.

2. Pour quelles valeurs de μ est-ce que $v(t)$ est stable/instable pour $t \rightarrow +\infty$?
3. On cherche un modèle réaliste de dynamique sous la forme $\frac{du}{dt} = f(u)$. Dans le plan $u = (u_1, u_2)$ dessiner l'allure du champ de vecteur $f(u) \in \mathbb{R}^2$ auquel vous pensez puis proposer une expression mathématique sous forme polynomiale.

Diffusion en espace. On considère maintenant l'aspect spatial. Tout d'abord sans les "réactions". Il y a plusieurs sites sur un réseau unidimensionnel de positions x_j , distants de $\delta = 100m.$, indicés par $j = 1, 2, \dots$, et on suppose que il y a "diffusion" de la population $k = 1, 2$ (souris ou chouette) par la loi :

$$\frac{dv_k(x_j)}{dt} = d_k (v_k(x_{j+1}) - v_k(x_j)) + d_k (v_k(x_{j-1}) - v_k(x_j)),$$

avec $d_1 = 1$ et $d_2 = 50$.

1. Expliquer ce modèle de diffusion et ces valeurs.
2. Que donne ce modèle dans la limite du continuum ? Résoudre les équations obtenues et discuter.

Réaction et diffusion. On combine les phénomènes précédant de "réaction locale" et "diffusion" par un modèle sous la forme :

$$\frac{du}{dt} = f(u) + \mathbb{D}\partial_x^2 u.$$

1. En utilisant le théorème de Turing, discuter l'apparition de "structures" dans les densités de population selon les valeurs de μ et d_1, d_2 .
2. Calculer la "longueur d'onde" λ_c de ces structures au seuil d'instabilité.

8.3 Motifs périodiques et quasi-périodiques en dimension ≥ 2

Dans les Sections précédentes on a fait une étude en dimension $d = 1$. On a observé l'apparition de motifs périodiques de la forme

$$u(x) = A \cos(kx) = \frac{A}{2} (e^{ikx} + e^{-ikx})$$

avec $k \in \mathbb{R}$ qui est le vecteur d'onde instable, obtenu dans l'étude linéaire.

Il est possible de faire des études analogue en dimension $d \geq 1$ plus grande (on ne le fera pas ici). En tenant compte des non linéarité, il apparait au seuil d'instabilité un **ensemble discret de vecteurs d'ondes** $\vec{k}_j \in \mathbb{R}^d$, prédisant un motif de la forme

$$u(\vec{x}) = \sum_j A_j \exp(i\vec{k}_j \cdot \vec{x})$$

Dans cette Section on discute de la forme de ces motifs appelés **quasi-périodiques** (semblables aux quasi-cristaux). Souvent (ou parfois) ils sont en fait **périodiques**.

8.3.1 Exemples en dimension 2

Des motifs périodiques résultant de dynamique non linéaire apparaissent souvent dans la nature. Voir figure.

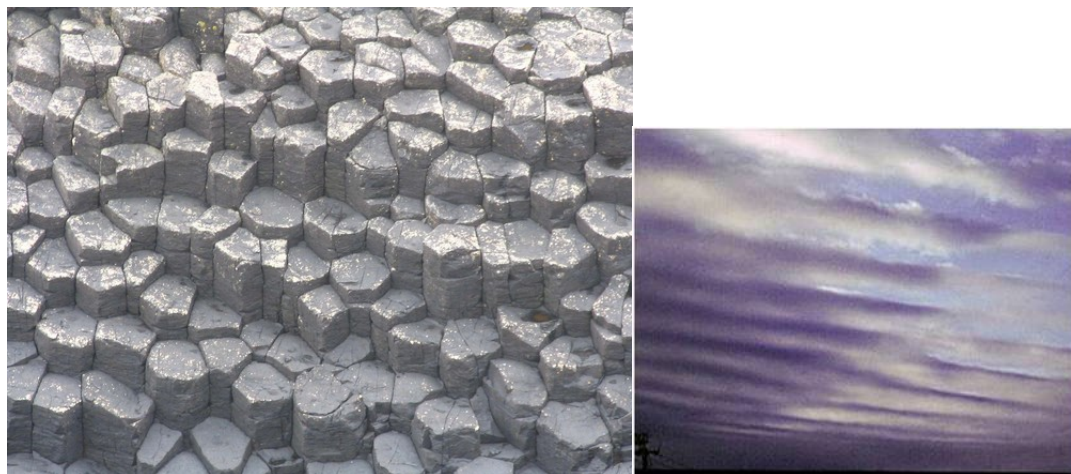
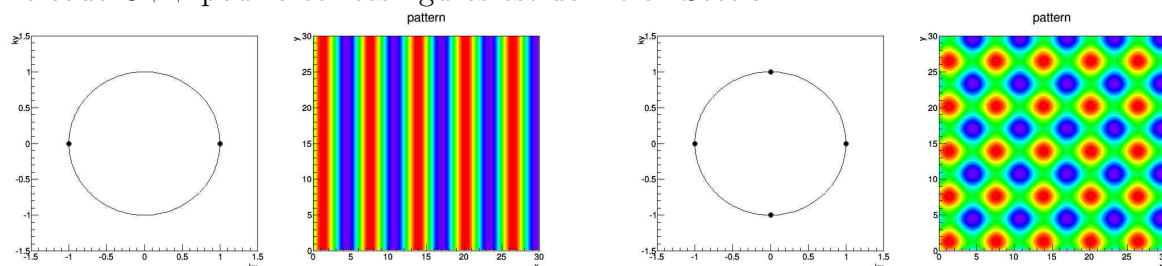


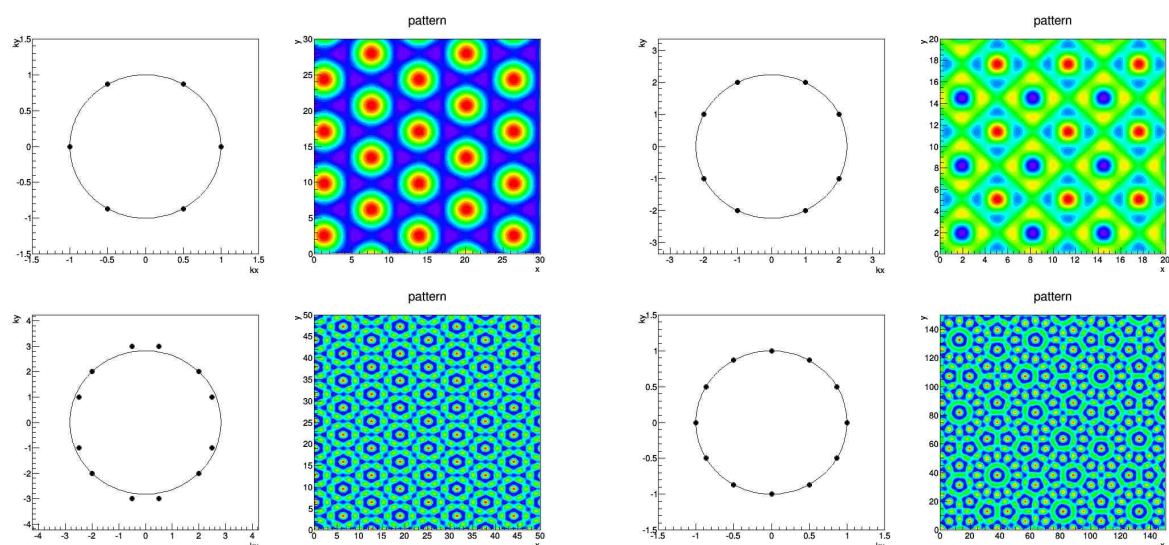
FIGURE 8.3.1 – Motifs périodiques ou quasi-périodiques dans la nature. (a) roche volcanique en structure hexagonal. (b) nuages en structure périodique unidimensionnelle (bandes)

Dans les 6 exemples suivants, on a considéré des vecteurs $\vec{k}_j \in \mathbb{R}^2$ avec $j = 1 \dots N$. ce sont les points noirs de la figure de gauche. Sur la figure de droite, on a dessiné (échelle bleu = max, rouge = min)

$$u(\vec{x}) = \sum_{j=1}^N \exp(i\vec{k}_j \cdot \vec{x})$$

Le code C++ pour créer ces figures est donné en Section ??.





On observe que dans les 5 premiers exemples, la fonction $u(\vec{x})$ est périodique. Dans le dernier exemple elle ne semble pas périodique (elle ne l'est pas), bien que des ressemblances semblent se produire. On explique ces figures dans la suite.

8.3.2 Motif périodique et quasi-périodique

On donne des définitions et ensuite des propriétés. On notera $\vec{x} \in \mathbb{R}_x^d$ l'espace "ordinaire" et $\vec{k} \in \mathbb{R}_k^d = (\mathbb{R}_x^d)^*$ l'espace dual (ou espace de Fourier).

Définition 8.3.1. Soit $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_d$ une base de \mathbb{R}_x^d . Cette base engendre un **réseau**

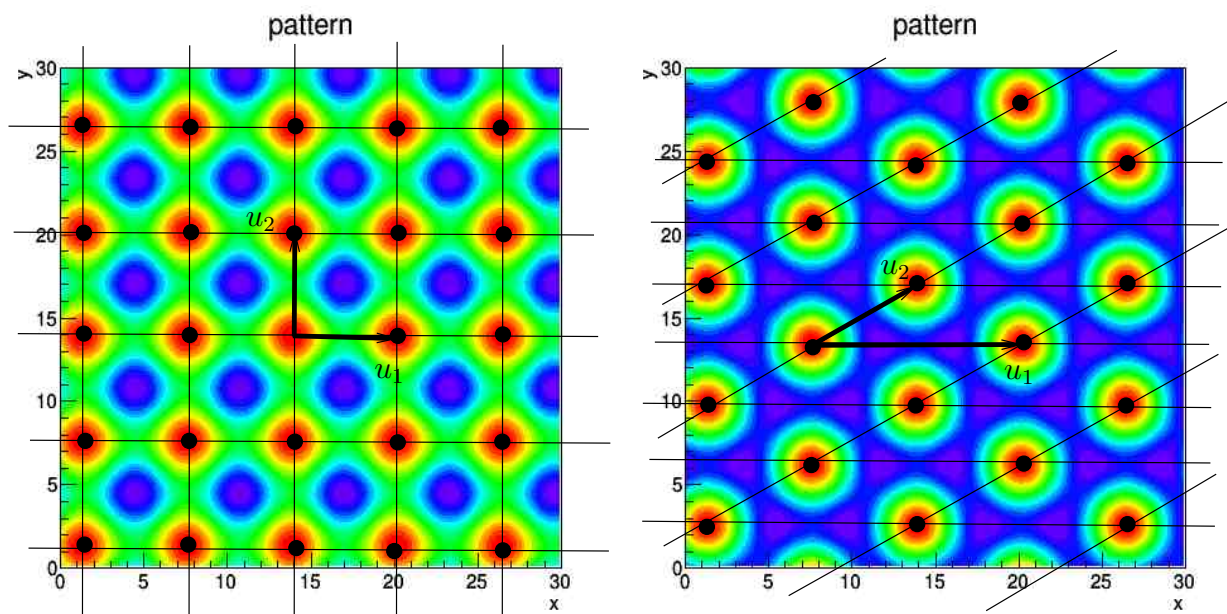
$$\Lambda := \left\{ \sum_{j=1}^d n_j \vec{u}_j \in \mathbb{R}^d, \quad (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^d \right\} \subset \mathbb{R}_x^d.$$

Une fonction $u(\vec{x})$ avec $\vec{x} \in \mathbb{R}_x^d$ est **périodique** si

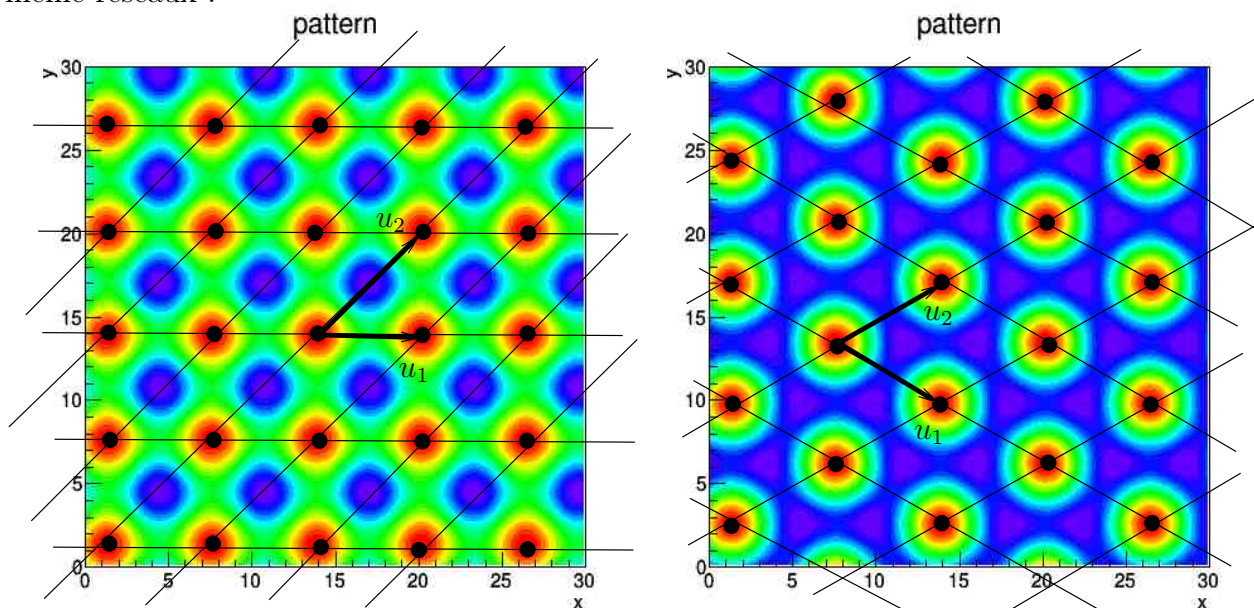
$$u(\vec{x} + \gamma) = u(\vec{x}), \quad \forall \vec{x}, \quad \forall \gamma \in \Lambda.$$

Cela signifie que la fonction u est invariante par translation d'un vecteur γ du **réseau périodique**.

Par exemple dans les figures suivantes, en dimension $d = 2$, on a dessiné les vecteurs de base \vec{u}_1, \vec{u}_2 , et le réseau périodique Λ (ce sont les points noirs aux intersection des lignes et non pas les lignes elle même) :



Noter que la base du réseau n'est pas unique, par exemple voici une autre base pour les mêmes réseaux :



On va donner une caractérisation d'une fonction périodique à partir de sa transformée de Fourier défini par :

$$\tilde{u}(\vec{k}) := \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d} \int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} u(\vec{x}) d\vec{x}, \quad \vec{k} \in \mathbb{R}_k^d.$$

La transformée de Fourier inverse est :

$$u(\vec{x}) := \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d} \int e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tilde{u}(\vec{k}) d\vec{k}, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}_x^d.$$

On note $(\vec{u}_1^*, \dots, \vec{u}_d^*)$ la base de \mathbb{R}_k^d qui est la **base duale** de $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_d)$ c'est à dire défini par les relations :

$$\vec{u}_j^* \cdot \vec{u}_k = \delta_{j,k}, \quad \forall j, k = 1 \dots d. \quad (8.3.1)$$

Cette base duale engendre le **réseau dual** dans l'espace de Fourier :

$$\Lambda^* := \left\{ \sum_{j=1}^d m_j \vec{u}_j^* \in \mathbb{R}_k^d, \quad (m_1, \dots, m_d) \in \mathbb{Z}^d \right\} \subset \mathbb{R}_k^d.$$

Noter que $(\Lambda^*)^* = \Lambda$ d'après (8.3.1).

Proposition 8.3.2. *Une fonction $u(\vec{x})$ est périodique pour le réseau Λ si et seulement si la transformée de Fourier de u est de la forme*

$$\tilde{u}(\vec{k}) = \sum_{\gamma^* \in 2\pi\Lambda^*} \tilde{u}(\gamma^*) \delta(\vec{k} - \gamma^*), \quad \tilde{u}(\gamma^*) \in \mathbb{C},$$

*c'est à dire que \tilde{u} est une distribution portée par le **réseau dual** (fois 2π).*

Démonstration. On écrit (on utilisera l'unicité de la décomposition de Fourier en 3eme ligne)

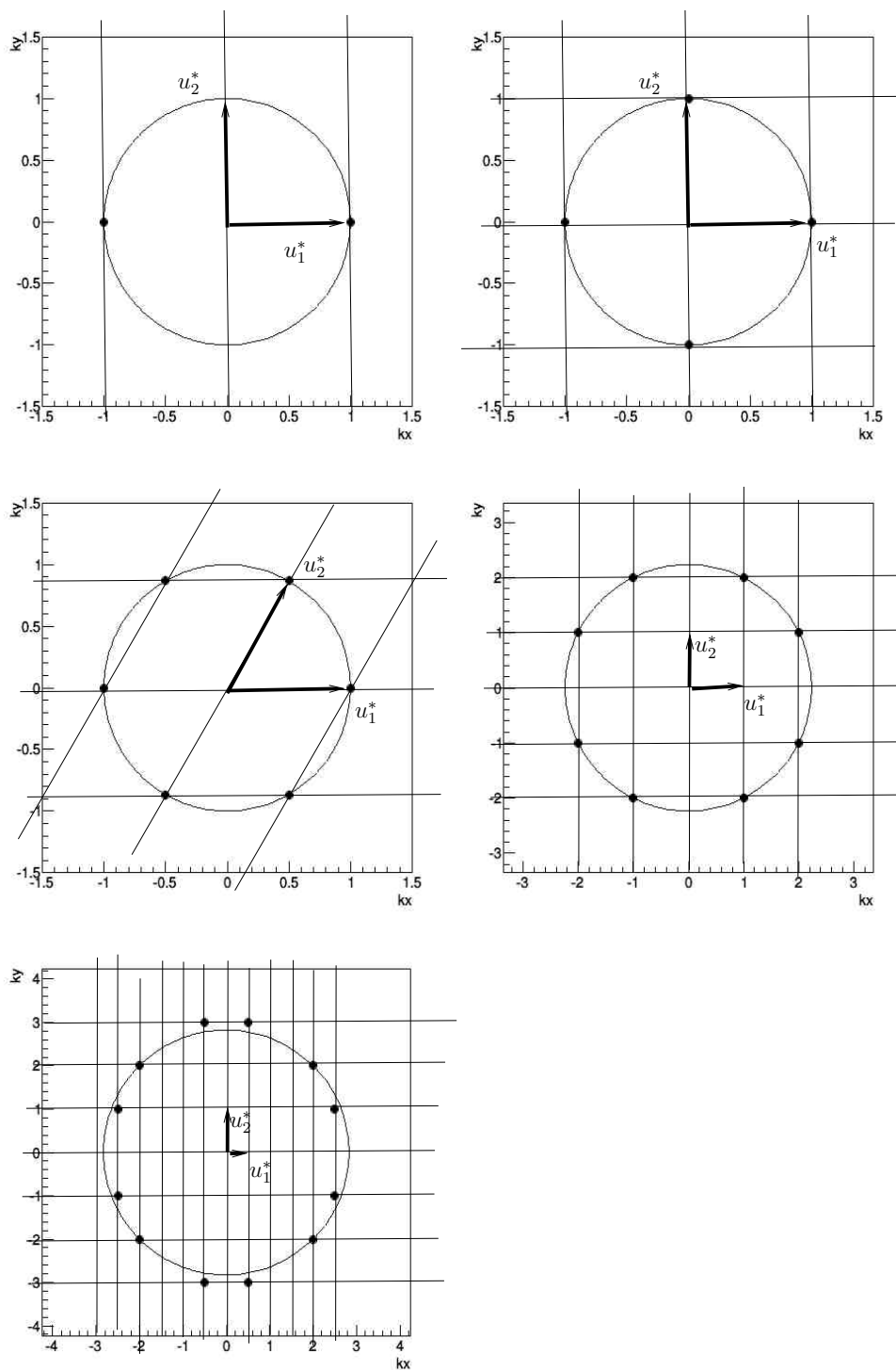
$$\begin{aligned} u(\vec{x} + \gamma) &= u(\vec{x}), \quad \forall \vec{x}, \quad \forall \gamma \in \Lambda. \quad : u \text{ périodique,} \\ \Leftrightarrow \int e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} + \gamma)} \tilde{u}(\vec{k}) d\vec{k} &= \int e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} + \gamma)} \tilde{u}(\vec{k}) d\vec{k} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^d, \quad \forall \gamma \in \Lambda. \\ \Leftrightarrow e^{i\vec{k} \cdot \gamma} \tilde{u}(\vec{k}) &= \tilde{u}(\vec{k}), \quad \forall \vec{k} \in \mathbb{R}^d, \quad \forall \gamma \in \Lambda \\ \Leftrightarrow \tilde{u}(\vec{k}) = 0 \text{ ou } e^{i\vec{k} \cdot \gamma} &= 1, \quad \forall \gamma \in \Lambda \end{aligned}$$

La relation $e^{i\vec{k} \cdot \gamma} = 1, \forall \gamma \in \Lambda$ est équivalente à $\vec{k} \in 2\pi\Lambda^*$. En effet, si $\vec{k} \in 2\pi\Lambda^*$ alors $\vec{k} = 2\pi \sum_{j=1}^d m_j \vec{u}_j^*$ et si $\gamma = \sum_{k=1}^d n_k \vec{u}_k$ alors

$$\vec{k} \cdot \gamma = 2\pi \sum_{j,k} m_j n_k \vec{u}_j^* \cdot \vec{u}_k = 2\pi \sum_j m_j n_j \in 2\pi\mathbb{Z}, \quad \text{donc } e^{i\vec{k} \cdot \gamma} = 1$$

et inversement si $e^{i\vec{k} \cdot \gamma} = 1, \forall \gamma \in \Lambda$ alors en particulier pour $\gamma = \vec{u}_j$, on a $\vec{k} \cdot \vec{u}_j = 2\pi K_j$ avec $K_j \in \mathbb{Z}$, donc $\vec{k} = 2\pi \sum_j K_j \vec{u}_j^* \in 2\pi\Lambda^*$. \square

Dans les exemples de la Section 8.3.1 on peut donc montrer que les figures $u(\vec{x})$ sont périodiques si les points \vec{k} (noirs) appartiennent à un réseau Λ^* . C'est le cas pour les 5 premières figures, dont voici le dessin du réseau Λ^* (intersection des lignes) :



On va montrer maintenant que la dernière figure de la Section 8.3.1 n'est pas périodique. Cette figure est reproduite en (8.3.2). Elle a cependant une structure bien visible appelée quasi-périodicité d'après la définition suivante.

Définition 8.3.3. Une **fonction quasi périodique** $u(\vec{x})$ est une fonction dont la transformée de Fourier est de la forme

$$\tilde{u}(\vec{k}) = \sum_{\gamma^* \in S} \tilde{u}(\gamma^*) \delta(\vec{k} - \gamma^*), \quad \tilde{u}(\gamma^*) \in \mathbb{C},$$

où $S \subset \mathbb{R}_k^d$ est un ensemble discret de vecteurs d'ondes (c'est à dire que chaque point est isolé).

Démonstration. de la non périodicité de la figure (8.3.2). Les vecteurs d'ondes sont :

$$\vec{k}_j = e^{ij2\pi/12}, \quad j \in \{0, 1, \dots, 11\}$$

En particulier les vecteurs $\vec{k}_0 = 1, \vec{k}_1 = e^{i\pi/6}$ forment une base de \mathbb{R}^2 . On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe un réseau Λ^* contenant tous ces vecteurs \vec{k}_j . En particulier, alors les points $\gamma^* \in \Lambda^*$ s'exprimerait dans la base \vec{k}_0, \vec{k}_1 avec des coefficients rationnels², en particulier pour le vecteur $\vec{k}_2 = e^{i\pi/3}$ on aurait :

$$e^{i\pi/3} = a + be^{i\pi/6}, \quad a, b \in \mathbb{Q}.$$

donc

$$\begin{aligned} \cos(\pi/3) &= a + b \cos(\pi/6), & a, b \in \mathbb{Q} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} &= a + b \frac{\sqrt{3}}{2}, & a, b \in \mathbb{Q} \\ \Leftrightarrow \sqrt{3} &= \frac{2}{b} \left(\frac{1}{2} - a \right) \in \mathbb{Q} \end{aligned}$$

2. En effet, notons \vec{u}_1^*, \vec{u}_2^* une base qui engendre ce réseau Λ^* . Alors $\vec{k}_j = a_j \vec{u}_1^* + b_j \vec{u}_2^*$ avec des coefficients entiers $a_j, b_j \in \mathbb{Z}$. En particulier on a

$$\begin{pmatrix} \vec{k}_0 \\ \vec{k}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_1^* \\ \vec{u}_2^* \end{pmatrix}$$

et $M = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix}$ est une matrice inversible car \vec{k}_0, \vec{k}_1 forment une base de \mathbb{R}^2 . On a donc

$$\begin{pmatrix} \vec{u}_1^* \\ \vec{u}_2^* \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} \vec{k}_0 \\ \vec{k}_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{a_0 b_1 - a_1 b_0} \begin{pmatrix} b_1 & -b_0 \\ -a_1 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{k}_0 \\ \vec{k}_1 \end{pmatrix}$$

et M^{-1} est une matrice à coefficients rationnels. Donc \vec{k}_j s'exprime par dans la base \vec{k}_0, \vec{k}_1 avec des coefficients rationnels qui sont explicitement

$$\vec{k}_j = a_j \vec{u}_1^* + b_j \vec{u}_2^* = \frac{1}{a_0 b_1 - a_1 b_0} \left(a_j (b_1 \vec{k}_0 - b_0 \vec{k}_1) + b_j (-a_1 \vec{k}_0 + a_0 \vec{k}_1) \right).$$

or $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ est un nombre irrationnel. On rappelle la preuve qui est valable pour tout nombre \sqrt{n} si n est un entier qui n'est pas un carré. Si $\sqrt{3} = a/b$ avec $a, b \in \mathbb{N}$ fraction irréductible, alors $3b^2 = a^2$, donc a contient 3 dans sa décomposition en nombres premiers, donc $a = 3a'$ avec a' entier. Donc $3b^2 = 9a'^2$, $b^2 = 3a'^2$, donc b contient aussi 3, contrairement à l'hypothèse que a/b est irréductible. Conclusion $\sqrt{3} \neq a/b$. \square

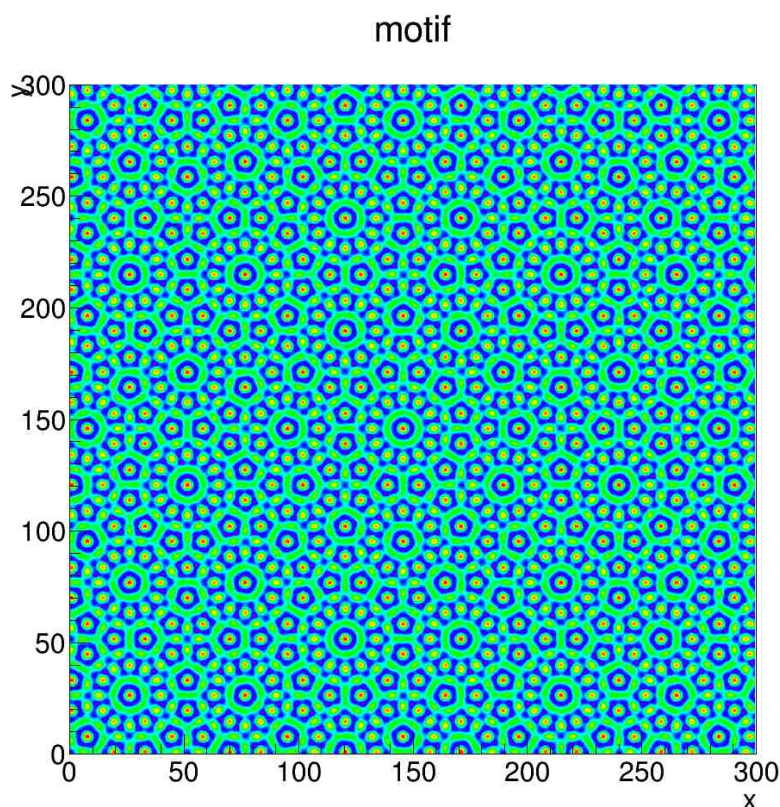


FIGURE 8.3.2 – Motif quasi-périodique : $u(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{12} e^{i\vec{k}_j \cdot \vec{x}}$ avec $\vec{k}_j = \exp(ij\pi/12)$.

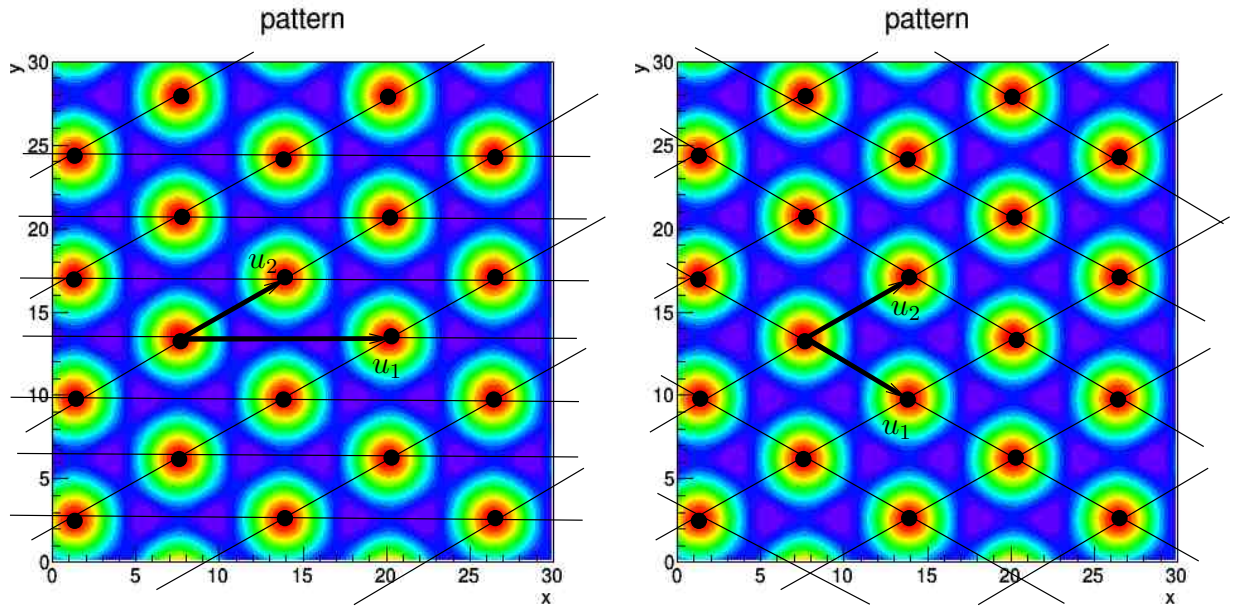
Exercice 8.3.4. Considérons la fonction

$$u_N(\vec{x}) = \sum_{j=1}^N e^{i\vec{k}_j \cdot \vec{x}}$$

avec $\vec{k}_j = \exp(ij\pi/N)$. Est-ce que cette fonction est quasi-périodique ? périodique ?

Changement de base dans un réseau périodique

On revient sur la remarque que dans un réseau il peut y avoir plusieurs base possible. Par exemple en dimension 2, on a deux vecteurs de base \vec{u}_1, \vec{u}_2 :



Question : comment ces différentes bases sont reliées entre elles et comment obtenir toutes les bases possibles ?

Dans cet exemple, on a par exemple la nouvelle base $\vec{u}'_1 = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$ et $\vec{u}'_2 = \vec{u}_2$. En termes matriciels :

$$\begin{pmatrix} \vec{u}'_1 \\ \vec{u}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \end{pmatrix}$$

avec la **matrice de passage** $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Voici le résultat général :

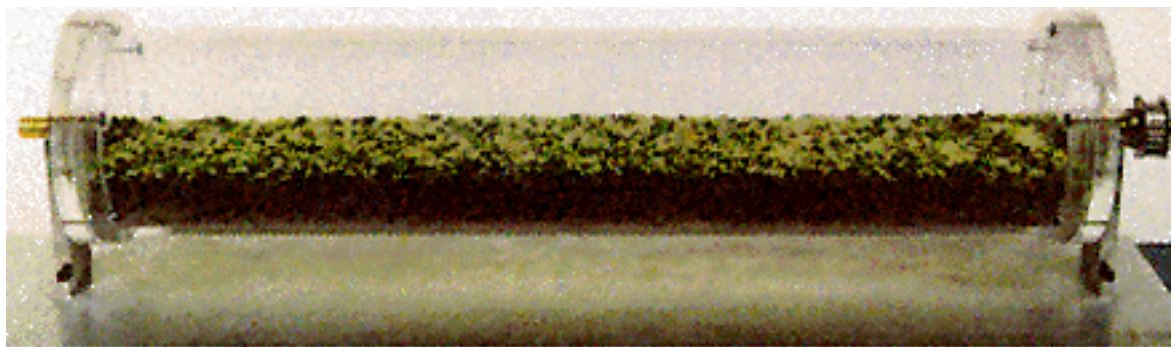
Proposition 8.3.5. *Si $U = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_d)$ est une base de \mathbb{R}^d qui engendre un réseau $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ alors une autre base $U' = (\vec{u}'_1, \vec{u}'_2, \dots, \vec{u}'_d)$ qui engendre ce réseau est obtenue par une matrice de passage M à coefficients entiers et telle que $\det(M) = \pm 1$. On dit que $M \in \text{SL}(d, \mathbb{Z})$.*

Démonstration. On a $U' = MU$. Comme les vecteurs U' appartiennent au réseau Λ il faut que la matrice M soit à coefficients entiers et que $\delta := \det M \neq 0$ car U' est une nouvelle base, donc $\delta \in \mathbb{Z}$. Inversement on a $U = M^{-1}U'$ et de même M^{-1} doit être à coefficients entiers. Donc $\det(M^{-1}) = \det(M)^{-1} = \delta^{-1} \in \mathbb{Z}$. Cela implique $\delta = \pm 1$. Inversement si M est à coefficients entiers et $\det(M) = \pm 1$ alors il en est de même pour M^{-1} d'après la formule de Laplace $M^{-1} = \frac{1}{\det M} (\text{com}M)^T$. \square

8.4 Motifs par segregation ou avalanches

Ref : [Group](#)

Images et commentaires pris sur la page web ci-dessus, montrant des phénomènes de morphogénèse avec des grains de différentes tailles. Voir la page web [Group](#) pour plus de commentaires.

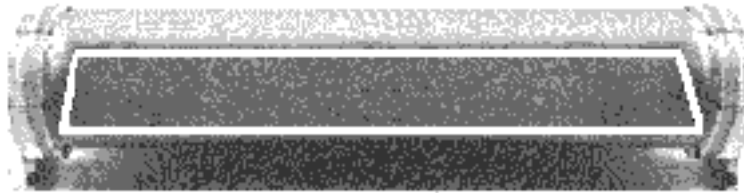


Initial Mixture of Uncooked Rice and Split Peas



After Rotation About Horizontal Axis at 15 rpm for 2 hours

Images were taken while the cylinder was continuously rotated - first at 15 rpm.



0.5 minute (mixed)



2.5 minutes (starting to segregate)



5 minutes (segregated)



The speed of rotation was slowed to 3 rpm,
Within an hour, the bands remixed!



8.5 Ondes solitaires ou Solitons

Dans cette Section nous considérons un phénomène particulier de la physique décrit par des équations d'évolution aux dérivées partielles non linéaires. Il s'agit "d'ondes solitaires", aussi appelées **soliton**, comme les "tsunamis" à la surface des océans, ou les mascarets à la surface de certaines rivières (engendrés par des mouvements de marée) :



Les solitons sont observés dans de nombreux domaines de la physique. Référence : [34] ou [1].

- L'exemple le plus familier est le "poul artériel". En effet le coeur délivre une impulsion de pression à chaque seconde, et une onde localisée de déformation (soliton) se propage le long des artères jusqu'aux extrémités des membres.
- Un exemple spectaculaire mais rare est un nuage qui se déplace, appelé "morning glory cloud" :



- On détaille dans la suite l'étude de solitons dans une chaîne d'oscillateurs couplés de façon non linéaire. La méthode présentée peut être transposée à d'autres modèles.
- Il existe des ondes solitaires sous marines appelée "ondes de gravité internes".

8.5.1 Historique

réf : Introduction de [34, p.3].

- En 1834, Russell observe une onde solitaire à la surface d'un canal d'eau, en Angleterre. Cette onde a été créée par la proue d'un bateau et se propage sur des kilomètres sans se déformer ni s'atténuer, et semble être supersonique c'est à dire aller plus vite que la vitesse des petites ondes. En 1872, Boussinesq puis Korteweg et De Vries en 1895 modélisent ce phénomène par une équation donnée "équation **KdV**" (Korteweg-DeVries), et qu'il est convenu d'écrire :

$$\partial_t u + \partial_x^3 u + 6u \cdot \partial_x u = 0. \quad (8.5.1)$$

En résolvant cette équation non linéaire (très particulière) on obtient des solutions “d’ondes solitaires” qui sont stables vis à vis des perturbations de la condition initiale et qui expliquent ainsi le phénomène observé.

- En 1914, Debye suggère que la conductivité thermique dans les matériaux (i.e. la loi d’Ohm et plus généralement l’équidistribution de l’énergie qui est à la base de la physique statistique), pourrait être modélisée et expliquée par un **ensemble d’oscillateurs couplés de façon non linéaire** (ou oscillateurs non harmoniques). En effet une chaîne d’oscillateur linéaires possèdent des modes propres de Fourier explicites indépendant qui se propagent de façon balistique, et on ne peut expliquer ainsi la “diffusion de la chaleur” ou “loi de Fourier”³. Debye pensait (naïvement) que la présence de non linéarité suffit à mélanger totalement la dynamique (voir plu loin le chapitre sur le chaos et le mélange à propos de cela).
- En 1955, **Fermi, Pasta, Ulam** simulent la dynamique d’une chaîne d’oscillateur couplés de façon non harmonique comme suggéré par Debye, et contrairement à l’attente de Debye, ils n’observent pas de diffusion, ni d’équidistribution de l’énergie mais des mouvements structurés, des interactions entre quelques modes de Fourier seulement. Lire cet [article](#) de revue pour les aspects historiques.
- En 1963, Kruskal et Zabusky considèrent une “limite continue” du modèle précédent, c’est à dire lorsque il y a une infinité d’oscillateurs par unité de longueur, et dans une certaine limite d’approximation, obtiennent l’équation de KdV, montrant l’existence de solitons dans cette chaîne d’oscillateurs non linéaires. Ils expliquent ainsi les résultats numériques obtenus par Fermi, Pasta et Ulam.
- Il est apparu ensuite que l’équation de KdV est très particulière au sens ou elle possède un nombre infini de quantités conservées et suffisamment pour la rendre “intégrable” (i.e. soluble). Depuis on connaît de nombreux modèles intégrables en théorie des champs. Cependant ce sont les modèles intégrables en théorie des champs sont des modèles particuliers car une perturbation du modèle ne préserve pas cette propriété.

8.5.2 Du modèle des oscillateurs non linéaires à l’équation de KdV

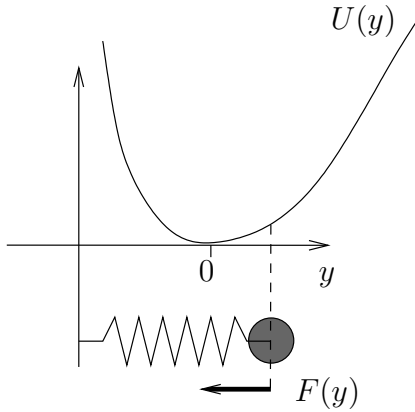
Référence : [34, chap.8]

Modèle discret de départ

Modèle étudié par Fermi, Pasta Ulam en 1955.

On considère un ensemble “d’oscillateurs”, indicés par $j \in \mathbb{Z}$ et disposés sur l’axe réel. On suppose que les oscillateurs sont chacun de masse m et couplés à leur proche voisin par un ressort. La réaction de ce ressort est caractérisé par une énergie potentielle $U(y)$ ayant un minimum non dégénéré en $y = 0$. Voir figure.

3. L’explication microscopique de la loi de Fourier est toujours une question ouverte en science.



Ainsi

$$U(y) = \frac{1}{2}U''(0)y^2 + \frac{1}{6}U'''(0)y^3 + \dots$$

La force est donc

$$\begin{aligned} F(y) &= -\frac{dU}{dy} = -U''(0)y - \frac{1}{2}U'''(0)y^2 + \dots \\ &= -Ky - K'y^2 + \dots \end{aligned}$$

avec $K = U''(0) > 0$ la “constante de raideur linéaire” et $K' = U'''(0) \in \mathbb{R}$ la première correction non linéaire que l’on supposera $K' \neq 0$. On note $y_j(t) \in \mathbb{R}$ la position de l’oscillateur j à la date t . Ainsi l’oscillateur $j-1$ exerce sur j la force :

$$F_{j-1/j} := -K(y_j - y_{j-1}) - K'(y_j - y_{j-1})^2$$

D’après le principe action-réaction, on a $F_{j/j-1} = -F_{j-1/j}$. D’après la loi de Newton, l’équation de mouvement du système est pour tout oscillateur $j \in \mathbb{Z}$:

$$m \frac{d^2 y_j(t)}{dt^2} = F_{j+1/j} + F_{j-1/j} \quad (8.5.2)$$

Equation sans dimensions

On peut simplifier cette équation en faisant les changement d’échelle : $\tilde{t} := \sqrt{\frac{K}{m}}t$ et $\tilde{y}_j := \frac{K'}{K}y_j$ donnant l’équation sans paramètres libres :

$$\frac{d^2 \tilde{y}_j(\tilde{t})}{d\tilde{t}^2} = \tilde{F}_{j+1/j} + \tilde{F}_{j-1/j}$$

avec la force :

$$\tilde{F}_{j+1/j} := (\tilde{y}_{j+1} - \tilde{y}_j) + (\tilde{y}_{j+1} - \tilde{y}_j)^2$$

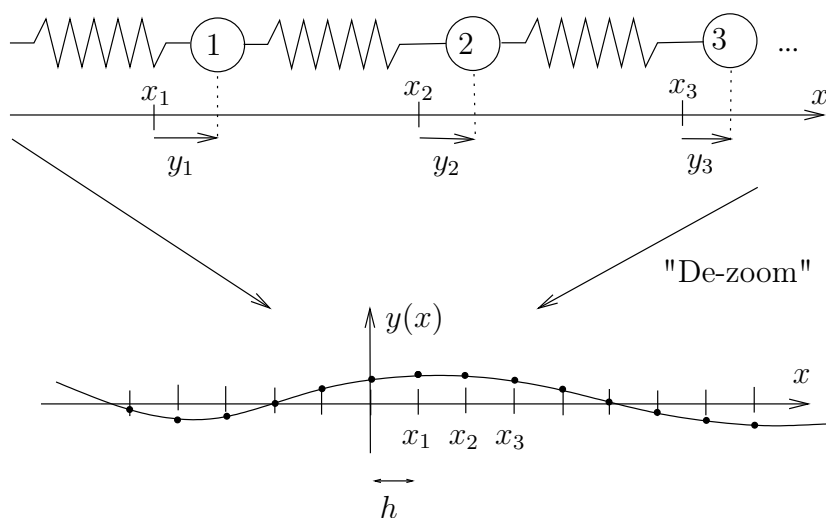


FIGURE 8.5.1 – Pendules.

Cela revient à supposer $m = 1, K = 1, K' = 1$ dans le problème de départ⁴. On obtient les équations de mouvement de **Fermi-Pasta-Ulam (FPU)** :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_j(t)}{dt^2} &= F_{j+1/j} - F_{j/j-1} \\ &= (y_{j+1} - y_j) + (y_{j+1} - y_j)^2 - ((y_j - y_{j-1}) + (y_j - y_{j-1})^2) \end{aligned} \quad (8.5.3)$$

Cette équation peut facilement être simulé sur ordinateur. Pour simplifier, on peut disposer $j = 1, 2, \dots, N$ oscillateurs sur un cercle avec condition périodique c'est à dire $j = N + 1 \equiv j = 1$.

Limite du continu

(Considéré par *Kruskalet* Zabusky en 1963). On va étudier l'équation non linéaire (8.5.3) dans un certain régime qui va donner lieu à l'équation KdV.

4. Remarquer qu'il faut avoir supposé $K' \neq 0$ sinon $\tilde{y}_j := \frac{K'}{K} y_j$ n'est pas un changement de variable convenable.

Proposition 8.5.1. *Supposons une configuration des pendules donnée par $y_j(t) = h \cdot \tilde{y}(x_j - ht, t)$ avec une certaine fonction $\tilde{y}(x, t)$, avec $x_j = jh$ et $h \ll 1$, (cad “de variation spatiale lente et de petite amplitude $\sim h$ et que les déformations se déplacent vers la droite à la vitesse $\sim h$ ”). Voir figure (8.5.1). Supposons que $y_j(t)$ soit gouvernée par l’équation de FPU (8.5.3). Alors $\tilde{y}(x, t)$ est bien décrite (modulo des erreurs $O(h)$) par l’équation de KdV*

$$\partial_{\tilde{t}} u + \partial_x^3 u + 6u \cdot \partial_x u = 0 \quad (8.5.4)$$

avec les changements d’échelle

$$\tilde{t} := \frac{1}{24} h^3 t, \quad u := 4 \partial_x \tilde{y}.$$

et sur une échelle de temps de l’ordre de $|\tilde{t}| \lesssim C$, soit $|t| \leq Ch^{-3}$, avec une constante C arbitraire.

Remarque 8.5.2. Le résultat précédent signifie que dans un “certain régime” qui est celui de variations spatiales lentes, de petites amplitudes $\sim h$, et déplacement vers la droite à la vitesse de l’ordre de h alors l’équation de mouvement (8.5.2) est bien décrite par une équation EDP non linéaire (ou “équation de champs”) qui est en l’occurrence l’équation KdV. Cela s’appelle “**le passage à un modèle continu**”. Remarquer que on a fait aussi un changement d’échelle de temps qui signifie que les solutions obtenues, dans le référentiel en mouvement (de vitesse h) ont une **variation temporelle lente** de l’ordre de $t \sim h^{-3}$ (car elles varient typiquement à l’échelle de \tilde{t}). Se rappeler que l’équation sans dimension (8.5.3) est elle même issue d’une équation aux dimensions physique (8.5.2).

Démonstration. Posons $y_j(t) = y(x_j, t)$ avec une fonction $y(x, t)$ et $x_j = jh$. On souhaite exprimer l’équation de mouvement (8.5.2) à partir de cette fonction $y(x, t)$. On notera

$$\partial_x^k y_j := \frac{\partial^k y}{\partial x^k}(x_j, t).$$

Utilisant le développement de Taylor (à un ordre suffisant) en $h \ll 1$, on écrit

$$y_{j+1} = y(x_{j+1}) = y(x_j + h) = y_j + h \partial_x y_j + \frac{1}{2} h^2 \partial_x^2 y_j + \frac{1}{6} h^3 \partial_x^3 y_j + \frac{1}{24} h^4 \partial_x^4 y_j + O(h^5 |\partial_x^5 y|)$$

De même

$$y_{j-1} = y(x_j - h) = y_j - h \partial_x y_j + \frac{1}{2} h^2 \partial_x^2 y_j - \frac{1}{6} h^3 \partial_x^3 y_j + \frac{1}{24} h^4 \partial_x^4 y_j + O(h^5 |\partial_x^5 y|)$$

Donc (8.5.3) donne

$$\begin{aligned}
\partial_t^2 y_j &= h\partial_x y_j + \frac{1}{2}h^2\partial_x^2 y_j + \frac{1}{6}h^3\partial_x^3 y_j + \frac{1}{24}h^4\partial_x^4 y_j + O(h^5 |\partial_x^5 y|) \\
&\quad + \left(h\partial_x y_j + \frac{1}{2}h^2\partial_x^2 y_j + \frac{1}{6}h^3\partial_x^3 y_j + O(h^4 |\partial_x^4 y|) \right)^2 \\
&\quad + \left(-h\partial_x y_j + \frac{1}{2}h^2\partial_x^2 y_j - \frac{1}{6}h^3\partial_x^3 y_j + \frac{1}{24}h^4\partial_x^4 y_j \right) \\
&\quad - \left(-h\partial_x y_j + \frac{1}{2}h^2\partial_x^2 y_j - \frac{1}{6}h^3\partial_x^3 y_j \right)^2 \\
&= h^2\partial_x^2 y_j + \frac{1}{12}h^4\partial_x^4 y_j + O(h^5 |\partial_x^5 y|) \\
&\quad + h^2 \left(\partial_x y_j + \frac{1}{2}h\partial_x^2 y_j + \frac{1}{6}h^2\partial_x^3 y_j + O(h^3 |\partial_x^4 y|) \right)^2 \\
&\quad - h^2 \left(\partial_x y_j - \frac{1}{2}h\partial_x^2 y_j + \frac{1}{6}h^2\partial_x^3 y_j \right)^2
\end{aligned}$$

et donc

$$\partial_t^2 y_j = h^2\partial_x^2 y_j + \frac{1}{12}h^4\partial_x^4 y_j + 2h^3 (\partial_x y_j) (\partial_x^2 y_j) + O(h^5 |\partial_x^5 y|) + O(h^5 |\partial_x y| |\partial_x^4 y|) \quad (8.5.5)$$

On remarque les deux premiers termes $\partial_t^2 y = h^2\partial_x^2 y$ correspondant à “l’équation des ondes” qui a pour solution exacte à 1 dimension :

$$y(x, t) = A(x - ht) + B(x + ht)$$

avec $A(x)$, $B(x)$ deux fonctions quelconques appelées “profil”. Le profil $y(x, t) = A(x - ht)$ se déplace comme $x = ht$ à la vitesse h et le profil $y(x, t) = B(x + ht)$ se déplace comme $x = -ht$ à la vitesse $-h$. On va s’intéresser dans la suite à des solutions “proches” d’un profil qui se déplace à la vitesse $+h$. Cela suggère tout d’abord de se placer dans ce référentiel en mouvement de vitesse $+h$, et pour cela de poser

$$\tilde{y}(x, t) := y(x + ht, t) \Leftrightarrow y(x, t) := \tilde{y}(x - ht, t) \quad (8.5.6)$$

ainsi $\partial_t y = -h\partial_x \tilde{y} + \partial_t \tilde{y}$, et

$$\begin{aligned}
\partial_t^2 y &= -h\partial_x (-h\partial_x \tilde{y} + \partial_t \tilde{y}) + \partial_t (-h\partial_x \tilde{y} + \partial_t \tilde{y}) \\
&= h^2\partial_x^2 \tilde{y} - 2h\partial_x \partial_t \tilde{y} + \partial_t^2 \tilde{y}
\end{aligned}$$

et $\partial_x y = \partial_x \tilde{y}$. On écrit maintenant $y(x) = y(x_j) = y_j$. On obtient

$$-2h\partial_x \partial_t \tilde{y} + \partial_t^2 \tilde{y} = \frac{1}{12}h^4\partial_x^4 \tilde{y} + 2h^3 (\partial_x \tilde{y}) (\partial_x^2 \tilde{y}) + O(h^5 |\partial_x^5 \tilde{y}|) + O(h^5 |\partial_x \tilde{y}| |\partial_x^4 \tilde{y}|) \quad (8.5.7)$$

Remarquer que avec ce changement, le profil $y(x, t) = A(x - ht)$ donne $\tilde{y}(x, t) = A(x)$ qui ne dépend pas de t (comme attendu) et $y(x, t) = B(x + ht)$ donne $\tilde{y}(x, t) = B(x + 2ht)$ qui donne $\partial_t \tilde{y} = 2h\tilde{y}$. Comme on veut exclure cette solution, on va supposer que $|\partial_t \tilde{y}| \ll h|\tilde{y}|$. Pour exprimer cela, il est équivalent de faire le changement de variable

$$\tilde{t} := h^\alpha t,$$

avec $\alpha > 1$ qui sera choisit plus loin. Ainsi $|\partial_t \tilde{y}| \ll h|\tilde{y}| \Leftrightarrow h^{\alpha-1} |\partial_{\tilde{t}} \tilde{y}| \ll |\tilde{y}|$ qui est vérifiée car $h^{\alpha-1} \ll 1$ pour $h \ll 1$. Faisons aussi un changement de variable en amplitude :

$$\check{y} := \frac{\tilde{y}}{h^\beta},$$

avec $\beta \in \mathbb{R}$ qui sera choisi plus loin. L'équation (8.5.7) devient alors

$$-2h^{1+\alpha+\beta} \partial_x \partial_{\tilde{t}} \check{y} + h^{2\alpha+\beta} \partial_{\tilde{t}}^2 \check{y} = \frac{1}{12} h^{4+\beta} \partial_x^4 \check{y} + 2h^{3+2\beta} (\partial_x \check{y}) (\partial_x^2 \check{y}) + O(h^{5+\beta} |\partial_x^5 \check{y}|) + O(h^{5+2\beta} |\partial_x \check{y}| |\partial_x^4 \check{y}|)$$

On observe que le choix $\alpha = 3$ et $\beta = 1$ donne

$$\begin{aligned} -2h^5 \partial_x \partial_{\tilde{t}} \check{y} + h^7 \partial_{\tilde{t}}^2 \check{y} &= \frac{1}{12} h^5 \partial_x^4 \check{y} + 2h^5 (\partial_x \check{y}) (\partial_x^2 \check{y}) + O(h^6) \\ \Leftrightarrow -2\partial_x \partial_{\tilde{t}} \check{y} + h^2 \partial_{\tilde{t}}^2 \check{y} &= \frac{1}{12} \partial_x^4 \check{y} + 2(\partial_x \check{y}) (\partial_x^2 \check{y}) + O(h) \end{aligned}$$

Comme attendu, pour $h \ll 1$, on peut négliger le terme $h^2 \partial_{\tilde{t}}^2 \check{y}$ et le reste $O(h)$ et on obtient

$$-2\partial_x \partial_{\tilde{t}} \check{y} = \frac{1}{12} \partial_x^4 \check{y} + 2(\partial_x \check{y}) (\partial_x^2 \check{y})$$

où le petit paramètre h n'apparaît plus. Cela signifie que à cette échelle d'étude (en espace, temps et amplitude) les trois terme de l'équations sont en "compétition". On peut encore simplifier l'expression. On pose

$$u(x, t) := \partial_x \check{y}$$

donnant

$$\partial_{\tilde{t}} u + \frac{1}{24} \partial_x^3 u + u \cdot \partial_x u = 0.$$

Cette équation est en fait équivalente à l'équation KdV (8.5.1) " $\partial_t u + \partial_x^3 u + 6u \cdot \partial_x u = 0$ ". Les coefficients dans l'équation KdV sont en fait "arbitraires" et conventionnels. Pour s'y ramener, il suffit de poser (finalement !)

$$\hat{t} := a\tilde{t}, \quad \hat{u} := bu$$

avec $a, b > 0$, donnant

$$\begin{aligned} ab^{-1} \partial_{\hat{t}} \hat{u} + \frac{1}{24} b^{-1} \partial_x^3 \hat{u} + b^{-2} \hat{u} \cdot \partial_x \hat{u} &= 0 \\ \Leftrightarrow 24a \partial_{\hat{t}} \hat{u} + \partial_x^3 \hat{u} + 24b^{-1} \hat{u} \cdot \partial_x \hat{u} &= 0 \end{aligned}$$

On fait le choix $a = \frac{1}{24}$ et $b = 4$ pour obtenir l'équation de KdV :

$$\partial_{\hat{t}} \hat{u} + \partial_x^3 \hat{u} + 6\hat{u} \cdot \partial_x \hat{u} = 0 \tag{8.5.8}$$

□

Régime linéaire d'équation d'ondes

Cette section est une remarque. On aurait pu choisir de décrire un régime différent et obtenir donc une équation EDP différente. Par exemple, reprenons l'équation (8.5.5) :

$$\partial_t^2 y_j = h^2 \partial_x^2 y_j + \frac{1}{12} h^4 \partial_x^4 y_j + 2h^3 (\partial_x y_j) (\partial_x^2 y_j) + O(h^5 |\partial_x^5 y|) + O(h^5 |\partial_x y| |\partial_x^4 y|) \quad (8.5.9)$$

et faisons le changement d'échelle en amplitude et en temps

$$\check{y} := \frac{y}{h^\beta}, \quad \check{t} := h^\alpha t,$$

avec $\beta \in \mathbb{R}$ donnant

$$h^{2\alpha+\beta} \partial_{\check{t}}^2 \check{y} = h^{2+\beta} \partial_{\check{x}}^2 \check{y} + \frac{1}{12} h^{4+\beta} \partial_{\check{x}}^4 \check{y} + 2h^{3+2\beta} (\partial_{\check{x}} \check{y}) (\partial_{\check{x}}^2 \check{y}) + O(h^{5+\beta} |\partial_{\check{x}}^5 \check{y}|) + O(h^{5+2\beta} |\partial_{\check{x}} \check{y}| |\partial_{\check{x}}^4 \check{y}|) \quad (8.5.10)$$

Le choix $\alpha = 1$ donne

$$\partial_{\check{t}}^2 \check{y} = \partial_{\check{x}}^2 \check{y} + \frac{1}{12} h^2 \partial_{\check{x}}^4 \check{y} + 2h^{1+\beta} (\partial_{\check{x}} \check{y}) (\partial_{\check{x}}^2 \check{y}) + O(h^3 |\partial_{\check{x}}^5 \check{y}|) + O(h^{3+\beta} |\partial_{\check{x}} \check{y}| |\partial_{\check{x}}^4 \check{y}|) \quad (8.5.11)$$

ainsi pour $\beta > 0$ les seuls termes dominants sont

$$\partial_{\check{t}}^2 \check{y} = \partial_{\check{x}}^2 \check{y}$$

qui est l'équation d'onde linéaire à une dimension dont la solution générale est

$$\check{y}(x, \check{t}) = A(x - \check{t}) + B(x + \check{t})$$

avec des fonctions arbitraires $A(x)$ et $B(x)$. Ce sont des ondes d'amplitude $\check{y} \sim 1$ se déplaçant à la vitesse 1. L'interprétation ici est que pour le problème de départ en variables j, t, y on a des ondes d'amplitude $y \sim h^\beta \ll h^{-1}$ de taille spatiale $j \sim h^{-1} \gg 1$ se déplaçant à la vitesse $c = h^{\alpha-1} = 1$ et l'étude se fait sur une échelle de temps $t \sim h^{-\alpha} = h^{-1} \gg 1$. Cela signifie que les effets non linéaires ne sont pas perceptibles dans ce régime linéaire malgré que l'amplitude puisse être de l'ordre de $y \sim \text{cste}$. Le régime de l'équation KdV a pour différence de supposer des amplitudes plus faibles, mais de décrire l'onde sur des temps beaucoup plus longs $\sim h^{-3}$, mettant en évidence les effets non linéaires comme les solitons (voir ci-dessous).

8.5.3 Solution de l'équation KdV à profil constant

On étudie maintenant l'équation (8.5.8). On cherche une solution de la forme

$$\hat{u}(x, \hat{t}) = X(x - c\hat{t})$$

avec $c > 0$ arbitraire et $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonction arbitraire appelée “**profil**”. Posons $\tau = x - ct$. On a $\partial_t \hat{u} = -c \left(\frac{dX}{d\tau} \right) (\tau)$ et $\partial_x \hat{u} = \frac{dX}{d\tau} (\tau)$. Alors (8.5.8) s’écrit

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{u} + \partial_x^3 \hat{u} + 6\hat{u} \cdot \partial_x \hat{u} &= 0 \\ \Leftrightarrow -c \left(\frac{dX}{d\tau} \right) + \frac{d^3 X}{d\tau^3} + 6X \cdot \frac{dX}{d\tau} &= 0 \\ \Leftrightarrow -cX + \frac{d^2 X}{d\tau^2} + 3X^2 &= A, \quad : \text{ on a intégré en } \tau. \end{aligned} \quad (8.5.12)$$

Avec une constante $A \in \mathbb{R}$. On vérifie⁵ qu’une solution pour $A = 0$ est (on expliquera l’idée de cette solution plus loin)

$$X(\tau) = \frac{c}{2} \left(\cosh \left(\sqrt{\frac{c}{4}} \tau \right) \right)^{-2}. \quad (8.5.13)$$

avec $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

FIGURE 8.5.2 – Pour un paramètre $c > 0$ arbitraire, en coordonnées x, \hat{t} , on a un soliton, de largeur $\Delta x \sim \frac{1}{\sqrt{c}}$, amplitude $\hat{u} \sim c$ et vitesse c .

Remarque 8.5.3. L’équation (8.5.12) ressemble à l’équation de Newton de la mécanique sous la forme $\frac{d^2 X}{d\tau^2} = F(X) = -\frac{dU}{dX}$ avec une force $F(X) = A + cX - 3X^2$ qui dérive du potentiel $U(X) = -AX - \frac{c}{2}X^2 + X^3$. Avec cette analogie, on peut écrire

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dX}{d\tau} \right)^2 + U(X) = E$$

avec une constante $E \in \mathbb{R}$. (en effet si on dérive cette équation on obtient l’équation précédente). Cette dernière équation ressemble à la conservation de l’énergie en mécanique, avec le premier terme qui est une “énergie cinétique” et E l’énergie totale conservée. Attention cependant que ici $\tau = x - ct$ est plutôt une variable d’espace dans le repère mobile.

Signification de cette solution par rapport au problème de départ (8.5.3)

Commentaire sur les différents termes de l’équation de KdV

Les 2 premiers termes seuls $\partial_t u + \partial_x^3 u = 0$ sont linéaires mais “dispersif” au sens où dans l’espace de Fourier ils donnent la relation $i\omega + (ik)^3 = 0 \Leftrightarrow \omega = k^3$ appelée relation

5. En effet, $\cosh'(x) = \sinh(x)$ et $\sinh'(x) = \cosh(x)$, $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$, donc $\frac{d^2}{dx^2} (\cosh^{-2}(x)) = \frac{4}{\cosh^2(x)} - \frac{6}{\cosh^4(x)}$ et posant $x = \sqrt{\frac{c}{4}} \tau$, on a $\cosh^{-2}(x) = \frac{2X}{c}$ et

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{d\tau^2} &= \frac{c}{2} \left(\frac{c}{4} \right) \frac{d^2}{dx^2} (\cosh^{-2}(x)) = \frac{c^2}{8} \left(\frac{4}{\cosh^2(x)} - \frac{6}{\cosh^4(x)} \right) = \frac{c^2}{8} \left(\frac{4.2X}{c} - \frac{6.4X^2}{c^2} \right) \\ &= cX - 3X^2 \end{aligned}$$

FIGURE 8.5.3 – Pour le problème de départ de FPU (8.5.3), Figure 8.5.1, et d’après Proposition 8.5.1, le soliton (8.5.13) correspond à une configuration “soliton” des oscillateurs, en coordonnées j, t , de largeur $\Delta j \sim \frac{1}{h\sqrt{c}}$, d’amplitude $y \sim hc$ et de vitesse $\frac{dj}{dt} = 1 + h^2c$. Comme la vitesse des ondes (en régime linéaire) est $\frac{dj}{dt} = 1$, le soliton est une “onde supersonique”.

de “dispersion” car la vitesse de groupe des ondes est

$$v_g(k) = \frac{d\omega}{dk} = 3k^2.$$

Cela implique que si on a une onde localisée à $t = 0$ (“paquet d’onde”) alors elle a une largeur dans l’espace k (d’après le principe d’incertitude) et les différentes composantes ont des vitesses $v_g(k)$ différentes, donc le paquet d’onde s’élargit au cours du temps (i.e. se “disperse”).

Le dernier terme $6u \cdot \partial_x u$ est non linéaire. Dans l’équation $\partial_t u + 6u \cdot \partial_x u = 0$, appelée “**équation de Burgers**” il a un effet contraire de concentrer le paquet d’onde en espace. En effet l’équation linéaire $\partial_t u + c \partial_x u = 0$ décrit une onde $u(x, t) = X(x - ct)$ se déplaçant à la vitesse c . On peut penser que l’équation de Burgers décrit un déplacement à la vitesse $c = 6u(x)$ qui dépend de l’amplitude de l’onde. Ainsi le haut de l’onde va “déferler” comme les vagues sur la plage. Cela est empêché par le terme dispersif $\partial_x^3 u$.

Annexe A

Formulaire

A.1 Algèbre linéaire

Références : [40], Serre, “Matrices, Theory and applications”. Plus avancé : [23]

A.1.1 Forme normale de Jordan et diagonalisation

On note $L(\mathbb{C}^m)$ l'ensemble des matrices carrée $m \times m$ à coefficients complexes (i.e. application linéaire sur \mathbb{C}^m). On note $GL(\mathbb{C}^m)$ l'ensemble des matrices carrée $m \times m$ à coefficients complexes et inversibles (i.e. de déterminant non nul).

Théorème A.1.1. [39] Si $M \in L(\mathbb{C}^m)$ est une matrice carrée $m \times m$ à coefficients complexes, on peut écrire

$$M = ANA^{-1} \quad (\text{A.1.1})$$

avec $A \in \text{GL}(\mathbb{C}^m)$ une matrice inversible et $N \in L(\mathbb{C}^m)$ une matrice sous forme de blocs :

$$N = \begin{pmatrix} (J_1) & & & 0 \\ & (J_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & (J_d) \end{pmatrix}$$

Chaque bloc $J_j, j = 1 \dots d$, a une certaine taille $d_j \times d_j$ (avec $d_j \geq 1$ et $\sum_{j=1}^d d_j = m$) et a précisément la forme suivante : le nombre $\lambda_j \in \mathbb{C}$ appelée **valeur propre** est répété sur la diagonale et il y a 1 sur la diagonale supérieure :

$$J_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_j \end{pmatrix}, \quad j = 1 \dots d$$

On peut ordonner les blocs de sorte que : $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \dots \geq |\lambda_d|$. L'ensemble des valeurs propres $\{\lambda_1, \dots, \lambda_d\} \subset \mathbb{C}$ s'appelle le **spectre** de M . La matrice N est appelée **forme normale de Jordan** contenant des "**blocs de Jordan**" $(J_j)_j$.

Remarque A.1.2.

- Si les blocs de Jordan sont tous de taille $d_j = 1$ alors la matrice M est dite "**diagonalisable**" (ce n'est pas toujours possible). La matrice N est sous la forme :

$$N = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_m \end{pmatrix}, \quad \lambda_j \in \mathbb{C}.$$

- Si la matrice M est réelle alors les valeurs propres sont réelles ou apparaissent par paires $\lambda_j, \bar{\lambda}_j \in \mathbb{C}$.

Puissances d'une matrice

L'interprétation de l'écriture (A.1.1) est que avec un changement de base donné par la matrice A , la matrice M est transformée en la matrice N qui a la forme la plus simple possible, appelée "forme normale de M ". Un intérêt de l'écriture (A.1.1) est que l'on peut calculer M^n pour $n \in \mathbb{Z}$ quelconque :

$$M^n = (ANA^{-1}) \dots (ANA^{-1}) = AN^n A^{-1}$$

Il suffit alors de calculer

$$N^n = \begin{pmatrix} (J_1^n) & & 0 \\ & (J_2^n) & \\ & & \ddots \\ 0 & & & (J_d^n) \end{pmatrix}$$

Si N est diagonale c'est immédiat :

$$N^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & 0 \\ & \lambda_2^n & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_m^n \end{pmatrix}$$

Sinon il faut calculer la puissance d'un bloc de Jordan J_j^n . Pour cela, on écrit $J_j = (\lambda_j \text{Id} + R)$ avec $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$. On observe que $R^{d_j} = 0$, donc

$$\begin{aligned} J_j^n &= (\lambda_j \text{Id} + R)^n = \sum_{k=0}^{\min(n, d_j-1)} C_n^k \lambda_j^{n-k} R^k \\ &= \lambda_j^n \text{Id} + n \lambda_j^{n-1} R + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.1.2})$$

Décomposition spectrale d'une matrice

Pour une valeur propre λ_j donnée, on associe le **projecteur spectral** Π_j qui s'écrit

$$\Pi_j = A \pi_j A^{-1}, \quad \pi_j = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \text{Id}_{d_j \times d_j} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

Il vérifie : $\forall j, k, \Pi_j^2 = \Pi_j$, $\Pi_j \Pi_k = \delta_{j=k} \Pi_j$, et $\text{Id} = \sum_j \Pi_j$ et $[M, \Pi_j] = 0$. Ce même projecteur spectral s'obtient par une intégrale de Cauchy dans le plan complexe spectrale [37, chap.6] :

$$\Pi_j = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_{\lambda_j}} (\lambda - M)^{-1} d\lambda$$

où $\Gamma_{\lambda_j} \subset \mathbb{C}$ est un chemin fermé autour de λ_j dans le sens direct et $R_M(\lambda) := (\lambda - M)^{-1}$ est appelée la **résolvante** de M .

Si on écrit la matrice A comme une liste de vecteurs en colonne :

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ | & | & \dots & | \\ | & | & & | \\ | & | & & | \end{pmatrix} \\ (U_1, U_2, \dots, U_m)$$

alors les d_j vecteurs successifs de cette liste forment une base de l'image de ce projecteur : $\text{Im}(\Pi_j) = \text{Span}(U_k, \dots, U_{k-1+d_j})$ (k est l'indice de début du bloc j). Si on écrit la matrice A^{-1} comme une liste de vecteurs en ligne :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ & & \vdots & \\ - & - & - & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_m \end{pmatrix}$$

alors on peut écrire en notation de Dirac¹ :

$$\Pi_j = \sum_{l=k}^{k-1+d_j} |U_l\rangle\langle V_l|$$

Noter que

$$\langle V_k|U_l\rangle = (A^{-1}A)_{k,l} = \delta_{k,l}$$

Tout cela est plus simple si la matrice est diagonalisable car $d_j = 1$. En utilisant les projecteurs spectraux, la matrice M^n peut s'écrire :

$$M^n = \sum_j \Pi_j M^n$$

et dans le cas où $d_j = 1$ alors $\Pi_j M^n = \lambda_j^n \Pi_j$. Donc si la matrice est diagonalisable, $M^n = \sum_j \lambda_j^n \Pi_j$, sinon on peut cependant calculer explicitement $\Pi_j M^n = \Pi_j A J_j^n A^{-1}$ d'après (A.1.2).

A.1.2 Rayon spectral d'une matrice

Définition A.1.3. Le **rayon spectral** de la matrice M est le maximum du module des valeurs propres :

$$r_{\text{spec}}(M) := \max_{|\lambda_j|} |\lambda_j|$$

Proposition A.1.4. Si $\|M\|$ désigne une norme sur les matrices alors

$$r_{\text{spec}}(M) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|M^n\|^{1/n} \quad (\text{A.1.3})$$

de plus $r_{\text{spec}}(M) \leq \|M^n\|^{1/n}, \forall n$.

1. En notation de Dirac $|U\rangle := U$ est un vecteur et $\langle V| := \langle V|\cdot\rangle$ est une forme linéaire représentée par le dual métrique d'un vecteur V . Ainsi l'application linéaire $U\langle V|\cdot\rangle : u \rightarrow U\langle V|u\rangle$ est notée $|U\rangle\langle V|$.

A.1.3 Diagonalisation d'une matrice 2×2

Formule générale : On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Notons

$$D := \det(M) = ad - bc, \quad T := \text{Tr}(M) = a + d, \\ \Delta := T^2 - 4D.$$

Lemme A.1.5. Si $\Delta \neq 0$ alors la matrice M est diagonalisable, avec deux valeurs propres

$$\lambda_{\pm} = \frac{T \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \quad (\text{A.1.4})$$

Si $\Delta \neq 0$ on a $\lambda_+ \neq \lambda_-$ et les vecteurs propres associés sont² :

$$U_{\pm} = \begin{pmatrix} T \pm \sqrt{\Delta} - 2d \\ 2c \end{pmatrix}.$$

On peut écrire :

$$M = ANA^{-1}, \quad A = \begin{pmatrix} T + \sqrt{\Delta} - 2d & T - \sqrt{\Delta} - 2d \\ 2c & 2c \end{pmatrix} = (U_+, U_-), \quad N = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1.5})$$

Démonstration. Le polynôme caractéristique est

$$P(\lambda) := \det(\lambda \text{Id} - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{pmatrix} = (\lambda - a)(\lambda - d) - bc = \lambda^2 - T\lambda + D$$

L'équation $P(\lambda) = 0$ est du second degré. Ses solutions sont

$$\lambda_{\pm} = \frac{T \pm \sqrt{\Delta}}{2},$$

avec

$$\Delta := T^2 - 4D.$$

On cherche un vecteur propre $V_{\pm} \in \mathbb{R}^2$ sous la forme $V_{\pm} = \begin{pmatrix} v_{\pm} \\ 2c \end{pmatrix}$ avec $v_{\pm} \in \mathbb{R}$ donnant (deuxième ligne de l'équation $AV_{\pm} = \lambda_{\pm}V_{\pm}$),

$$cv_{\pm} + 2dc = \lambda_{\pm}2c \Leftrightarrow v_{\pm} = 2(\lambda_{\pm} - d) = T \pm \sqrt{\Delta} - 2d.$$

Les deux vecteurs V_{\pm} forment une base si et seulement si $v_+ \neq v_-$, c'est à dire si $\Delta \neq 0$. \square

2. Avec le logiciel gratuit **xcas** de calcul formel (pour l'obtenir, taper **xcas** dans google). Et dans **xcas**, écrire : `M:=[[a,b],[c,d]]`; `N:=egv1(M)`; `A:=egv(M)`; On vérifiera que `simplify(A*N*inv(A))`; redonne bien la matrice **M**.

Cas particulier : Si

$$M = \begin{pmatrix} 0 & b \\ \bar{b} & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} |b| & -|b| \\ \bar{b} & \bar{b} \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} |b| & 0 \\ 0 & -|b| \end{pmatrix}$$

Annexe B

Énoncés et solutions des exercices

Sommaire

B.1 Chapitre introduction	231
B.1.1 “Suite $x_{n+1} = ax_n + b$ ”.	231
B.2 Chapitre applications et champs de vecteur	232
B.3 Chapitre dynamique Hamiltonienne, flots géodésiques et billard	232
B.3.1 Loi de Newcomb-Bendford, “application de l’unique ergodicité”.	232
B.3.2 Billard circulaire	233
B.3.3 Hyperbolicité d’un billard dispersif.	236
B.4 Chapitre Dynamique probabiliste sur les graphes	239
B.4.1 “Matrice d’adjacence d’un graphe et entropie”	239
B.4.2 « Internet Google rank »	242
B.4.3 « Algorithme de MonteCarlo pour le modèle d’Ising »	244
B.5 Chapitre Dynamique déterministe expansive	246
B.6 Chapitre Dynamique déterministe hyperbolique	246
B.7 Chapitre Le modèle de Lorenz en hydrodynamique. Le moulin de Lorenz et son attracteur étrange	246
B.8 Chapitre Morphogenèse et ondes non linéaires	246

B.1 Chapitre introduction

B.1.1 “Suite $x_{n+1} = ax_n + b$ ”.

Exercice B.1.1. Pour $a, b \in \mathbb{R}$ fixés. On considère la fonction $\phi(x) = ax + b$ et le système dynamique $x_{n+1} = \phi(x_n)$.

1. Exprimer x_n en fonction de x_0 et n .

Solution : Pour $a, b \in \mathbb{R}$ fixés. On considère la fonction $f(x) = ax + b$ et le système dynamique $x_{n+1} = f(x_n)$. On cherche $x^* \in \mathbb{R}$ point fixe, c'est à dire solution de

$$\begin{aligned} x^* &= f(x^*) \\ \Leftrightarrow x^* &= ax^* + b \\ \Leftrightarrow x^* &= \frac{b}{1-a}, \quad \text{si } a \neq 1 \end{aligned}$$

On va donc supposer $a \neq 1$. On fait le changement de variable

$$y_n := x_n - x^*$$

alors

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= x_{n+1} - x^* = ax_n + b - ax^* - b = a(x_n - x^*) \\ &= ay_n \end{aligned}$$

On déduit que

$$y_n = a^n y_0$$

donc

$$x_n = y_n + x^* = a^n(x_0 - x^*) + x^*$$

2. Discuter la limite de x_n pour $n \rightarrow \infty$ en fonction de a, b .

Solution : Si $|a| < 1$ alors pour $n \rightarrow \infty$ on a $a^n \rightarrow 0$ et donc $x_n \rightarrow x^*$ c'est à dire que le point fixe x^* est attractif. Au contraire si $a > 1$ alors $a^n \rightarrow \infty$ et $x_n \rightarrow \pm\infty$. Le point fixe est répulsif.

B.2 Chapitre applications et champs de vecteur

B.3 Chapitre dynamique Hamiltonienne, flots géodésiques et billard

B.3.1 Loi de Newcomb-Bendford, “application de l’unique ergodicité”.

Observer le tableau B.1. Suivant Newcomb et Benford 1881, on va étudier un modèle mathématique qui peut aider à expliquer pourquoi la proportion p_c décroît avec c . Voir “Loi de Bendford” sur wikipedia et son utilité pour détecter les fraudes fiscales.

On considère la suite $u_n = 2^n$ avec $n \in \mathbb{N}$. On note c_n le premier chiffre de u_n en base 10. Voici les premières valeurs de c_n marquées en gras :

$$u_n = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{8}, 16, \mathbf{32}, \mathbf{64}, 128, \mathbf{256}, \mathbf{512}, 1024, \mathbf{2048}, \dots$$

Premier chiffre c	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre de pays	49	36	23	24	13	14	13	10	12
Proportion observée p_c	0,253	0,186	0,119	0,123	0,067	0,072	0,067	0,051	0,062

TABLE B.1 – Répartition du premier chiffre significatif des effectifs de population de 194 pays du monde selon l’édition 2010 du CIA World Factbook

Montrer que dans cette suite $c_n : 1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, \dots$ un chiffre donné $c \in \{1, 2, 3 \dots 9\}$ apparaît avec la probabilité $p_c = \frac{\log(1+\frac{1}{c})}{\log 10}$, soit $p_1 = 30\%, p_2 = 17\%, \dots, p_9 = 4.5\%$. Plus précisément si $\kappa_t(c) := \frac{1}{t} \text{Card} \{n < t, c_n = c\}$ est la proportion de présence du chiffre c dans la séquence $\{c_0, c_1, \dots, c_{t-1}\}$, montrer que

$$\kappa_t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} p_c.$$

Aide : écrire $c_n 10^{r_n} \leq u_n < (c_n + 1) 10^{r_n}$ et prendre le log pour se ramener à une dynamique de translation de $\frac{\log 2}{\log 10}$ modulo 1. Montrer que $\frac{\log 2}{\log 10}$ est irrationnel. Montrer l’unique ergodicité de la dynamique.

Solution : Dans un premier temps, comme dans la proposition 3.4.1, on montre que si $\alpha \notin \mathbb{Q}$ et $q \in \mathbb{R}$ alors la suite $q_n = n\alpha + q \pmod 1 \in [0, 1[, n \in \mathbb{N}$ est uniquement ergodique c’est à dire que pour toute fonction $u \in C^0([0, 1])$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N u(q_n) = \int u(q) dq \tag{B.3.1}$$

En considérant un intervalle $I \subset [0, 1]$ de longueur $|I|$, et la « fonction caractéristique » $u(q) = 1$ si $q \in I$, $u(q) = 0$ sinon (en fait on considère une suite de fonctions continues qui approchent u), on a que $\sum_{n=1}^N u(q_n) = \text{Card} \{n \leq N, q_n \in I\}$ et $\int u(q) dq = |I|$ et donc (B.3.1) s’écrit simplement $\text{proba}(I) := \frac{1}{N} \text{Card} \{n \leq N, q_n \in I\} = |I|$.

Dans un deuxième temps, on considère la suite $u_n = 2^n = 2 \times u_{n-1}$ avec $u_0 = 1$. Par définition de k_n , on a $k_n 10^r \leq u_n < (k_n + 1) 10^r$ avec $r \in \mathbb{N}$. Soit $q_n := \frac{\log u_n}{\log 10} \pmod 1$. Alors $q_{n+1} = q_n + \alpha \pmod 1$ avec $\alpha = \frac{\log 2}{\log 10} \notin \mathbb{Q}$ et $\frac{\log(k_n)}{\log 10} \leq q_n < \frac{\log(k_n+1)}{\log 10}$ soit $q_n \in I_{k_n} := [\frac{\log(k_n)}{\log 10}, \frac{\log(k_n+1)}{\log 10}[$. Comme la suite q_n est ergodique on déduit que

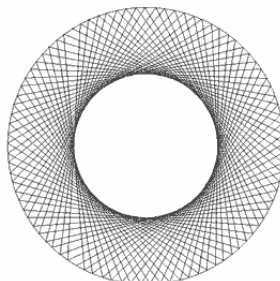
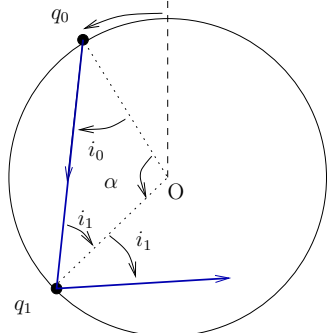
$$p_k = \text{proba}(I_k) = |I_k| = \left| \frac{\log(k+1)}{\log 10} - \frac{\log(k)}{\log 10} \right| = \frac{\log(1 + \frac{1}{k})}{\log(10)}$$

B.3.2 Billard circulaire

Exercice B.3.1. On considère un billard de bord circulaire (rayon 1). Une particule se déplace à vitesse constante dans le disque et rebondit de façon parfaite sur le bord. On note

1. En effet si $\frac{\log 2}{\log 10} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ alors $2^q = 10^p = 2^p 5^p$ ce qui implique $p = q = 0$, donc impossible.

$q_0 \in [0, 2\pi]$ la position angulaire d'un point sur le bord, $i_0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ l'angle du vecteur vitesse par rapport à la normale. (q_0, i_0) détermine l'état initial d'une particule qui suit ensuite une trajectoire dans le billard.



1. L'état initial (q_0, i_0) sur le bord détermine la suite des rebonds caractérisés par $(q_t, i_t) \in [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ pour $t = 0, 1, 2, \dots$. Exprimer (q_t, i_t) à partir de (q_0, i_0) .

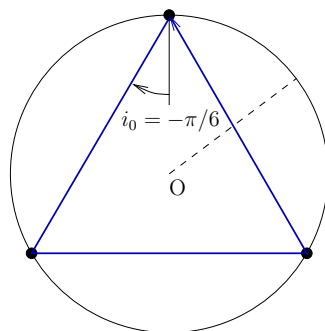
Solution : Le triangle Oq_0q_1 est isocèle en O donc $i_1 = i_0$. De même $i_t = i_{t-1}, \forall t$, donc $i_t = i_0$. Remarquer que sur la figure, on a $q_0 > 0, i_0 < 0$. Dans le triangle isocèle Oq_0q_1 on a $2(-i_0) + (q_1 - q_0) = \pi$ donc $q_1 = q_0 + \pi + 2i_0$. Plus généralement $q_t = q_{t-1} + \pi + 2i_0$ donc

$$q_t = q_0 + t(\pi + 2i_0) = q_0 + t\alpha \tag{B.3.2}$$

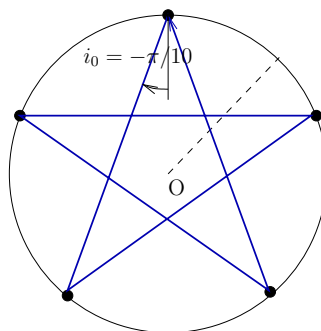
avec $\alpha = \pi + 2i_0$.

2. Tracer un exemple de trajectoire périodique (fermée) qui fait $m = 3$ rebonds en $n = 1$ tour autour du centre. Tracer un exemple de trajectoire périodique qui fait $m = 5$ rebonds en $n = 2$ tours autour du centre. Montrer plus généralement que une trajectoire est **périodique** si et seulement si $i_0 = \pi \frac{a}{b}$ où a, b sont des entiers premiers entre eux (on dit que $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ est **rationnel**). Exprimer le nombre m de rebonds et le nombre n de tours effectués en une période en fonction de a, b ? Quelle est la longueur L parcourue pour une trajectoire périodique, en fonction de m, n ?

Solution : Voici deux exemples, où le nombre de tours n est le nombre de fois où le rayon en pointillé (arbitraire) est traversé et le nombre de rebonds m est le nombre de points de contacts sur le bord.



$m = 3$ rebonds, $n = 1$ tour.



$m = 5$ rebonds, $n = 2$ tour.

Une trajectoire est périodique de période m et fait n tours (avec m, n premiers entre eux) si et seulement si

$$q_m \stackrel{(B.3.2)}{=} q_0 + m(\pi + 2i_0) = q_0 + n2\pi$$

$$\Leftrightarrow i_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{n2\pi}{m} - \pi \right) = \pi \frac{2n - m}{2m} = \pi \frac{a}{b}$$

avec $\frac{a}{b} = \frac{2n-m}{2m} \in \mathbb{Q}$. Inversement, si $i_0 = \pi \frac{a}{b}$ alors $\frac{n}{m} = \frac{b+2a}{2b} \in \mathbb{Q}$. Par exemple, $m = 3, n = 1$ donne $i_0 = \pi \frac{a}{b} = -\frac{1}{6}\pi$ et $m = 5, n = 2$ donne $i_0 = \pi \frac{a}{b} = -\frac{1}{10}\pi$.

Entre deux rebonds, la longueur parcourue est $d = 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2 \sin\left(\pi \frac{n}{m}\right)$ donc $L = md = 2m \sin\left(\pi \frac{n}{m}\right)$.

3. Si I est un intervalle donné du bord et $i_1 = \pi x$ avec $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ irrationnel, on note $\kappa_t(I) \in [0, 1]$ la proportion de points $q_{t'}$ de la trajectoire avec $t' \in [0, t - 1]$, qui appartiennent à l'intervalle I :

$$\kappa_t(I) := \frac{1}{t} \# \{t' \in \{0, \dots, t - 1\}, \text{ t.q. } q_{t'} \in I\}.$$

Montrer que pour toute condition initiale q_0 , $\kappa_t(I)$ converge vers la longueur relative $|I| / (2\pi)$ de l'intervalle lorsque $t \rightarrow \infty$. On dit que la dynamique est **uniquement ergodique**. Aide : utiliser la fonction caractéristique l'intervalle $\chi_I(q) = 1$ si $q \in I$ et $\chi_I(q) = 0$ sinon. Observer que $\kappa_t(I) = \frac{1}{t} \sum_{t'=1}^t \chi_I(q_{t'})$ et que $|I| = \int \chi_I(q) dq$. Décomposer χ_I en séries de Fourier $\varphi_n(q) = \exp(inq)$.

Solution : La décomposition en série de Fourier de χ_I s'écrit

$$\chi_I(q) = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \exp(inq), \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inq} \chi_I(q) dq \in \mathbb{C}. \quad (B.3.3)$$

On a donc

$$\begin{aligned} \kappa_t(I) &= \frac{1}{t} \sum_{t'=0}^{t-1} \chi_I(q_{t'}) = \frac{1}{t} \sum_{t'=0}^{t-1} \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \exp(inq_{t'}) \\ &\stackrel{(B.3.2)}{=} \frac{1}{t} \sum_{t'=0}^{t-1} \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \exp(in(q_0 + t'\alpha)) \\ &= \frac{1}{t} \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \exp(inq_0) \sum_{t'=0}^{t-1} (\exp(in\alpha))^{t'} = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \exp(inq_0) \left(\frac{1}{t} S_{t,n} \right) \end{aligned} \quad (B.3.4)$$

où il apparaît la série géométrique :

$$S_{t,n} := \sum_{t'=0}^{t-1} (\exp(in\alpha))^{t'}$$

que l'on calcule ainsi : si $n = 0$ alors $\frac{1}{t}S_{t,0} = 1$. Si $n \neq 0$ alors $\exp(in\alpha) \neq 1$ car sinon α/π serait rationnel, ce que l'on a exclu. Alors

$$S_{t,n} = \frac{\exp(int\alpha) - 1}{\exp(in\alpha) - 1} \quad (\text{B.3.5})$$

car $\exp(in\alpha) S_{t,n} := \sum_{t'=1}^t (\exp(in\alpha))^{t'}$ donc $\exp(in\alpha) S_{t,n} - S_{t,n} = \exp(int\alpha) - 1$, donnant (B.3.5). On a donc $\frac{1}{t}S_{t,n} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ si $n \neq 0$ car $|S_{t,n}| \leq \text{cste}_n$. On reprends :

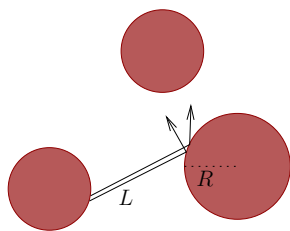
$$\begin{aligned} \kappa_t(I) &\stackrel{(\text{B.3.4})}{=} \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \exp(inq_0) \left(\frac{1}{t} S_{t,n} \right) \\ &\xrightarrow{t \rightarrow +\infty} c_0 \stackrel{(\text{B.3.3})}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi_I(q) dq = \frac{|I|}{2\pi}. \end{aligned}$$

4. Sans utiliser la question précédente, montrer que si $i = \pi x$ avec $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ **irrationnel** alors les points q_1, q_2, \dots de la trajectoire (non périodique) sont denses sur le bord (i.e. il n'y a pas d'intervalle du bord non touché). *Aide : procéder par l'absurde en supposant qu'il y a un intervalle non touché.* Retrouver ce résultat comme conséquence de la question précédente.

Solution (de Katok-Hasselblatt p.27 [28]). On suppose qu'il y a un intervalle I sur le bord non atteint par la trajectoire et que cet intervalle est le plus grand existant. On a vu que à chaque rebond, le point tourne d'un angle α . On note R la rotation d'un angle α . Comme la rotation préserve la longueur sur le bord, alors $R(I)$ a la même longueur que I et n'est pas atteint non plus. Les intervalles $I, R(I), R^2(I), \dots$ etc ne se coupent pas sinon cela ferait un intervalle non atteint plus grand que I . Comme α/π est irrationnel, on ne peut pas avoir $R^m(I) = I$ pour un certain entier m (sinon le bord de I donnerait une trajectoire périodique). Donc les intervalles $I, R(I), R^2(I), \dots$ etc sont tous disjoints et de même longueur. Cela n'est pas possible car l'union serait de longueur infinie, or le bord du disque est de longueur 2π finie.

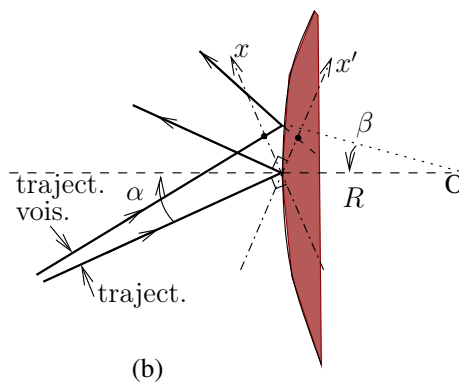
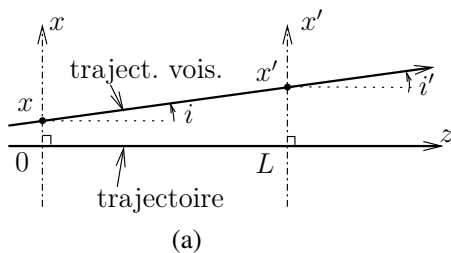
B.3.3 Hyperbolicité d'un billard dispersif.

Exercice B.3.2. Le but du problème est de montrer que la dynamique d'une particule dans un billard à obstacles convexes (par exemple des disques) est « complètement chaotique » au sens précis : « **sensibilité aux conditions initiales** » ou plus précisément « uniformément hyperbolique ». Un tel billard est appelé « billard dispersif » ou « billard de Sinai ». Voir simulations numériques.



Pour montrer cela on remarque que la dynamique dans un billard plan est une succession de propagations en ligne droite et de réflexions sur des obstacles.

1. Traitons d'abord la propagation, voir figure (a). On considère une trajectoire de référence (c'est l'axe z) et on note x l'axe orthogonal, qui sert de section de Poincaré : une trajectoire voisine coupe l'axe x à la position x et avec un angle i . On supposera $x, i \ll 1$. Après une longueur L donnée, exprimer les nouvelles valeurs (x', i') en fonction de (x, i) sous forme matricielle (cad au premier ordre).



Solution : On a $i' = i$ et $x' = x + L \tan i = x + Li + O(i^2)$ au premier ordre en i .
Donc au premier ordre :

$$\begin{pmatrix} x' \\ i' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_L} \begin{pmatrix} x \\ i \end{pmatrix}$$

2. On considère maintenant la réflexion avec un angle d'incidence α sur une paroi ayant un rayon de courbure R au point de réflexion, voir figure (b). Avec les même définitions de (x, i) que précédemment, montrer qu'au point de réflexion, au premier ordre, on a $\begin{pmatrix} x' \\ i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{R \cos \alpha} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ i \end{pmatrix}$.

Solution : dans le cas d'une paroi plane ($R = \infty$) on a $x' = x$ et $i' = i$ mais dans le cas d'une paroi avec rayon de courbure R , on a au premier ordre

$$R\beta \cos \alpha = x + O(x^2)$$

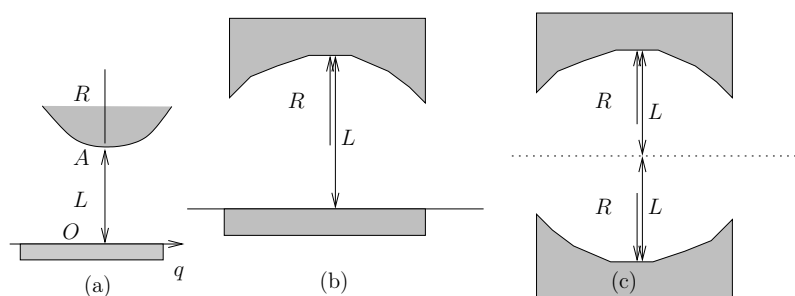
$$i' = i + 2\beta + O((x, i)^2)$$

donc $\beta = \frac{x}{R \cos \alpha} + O(x^2)$ et au premier ordre :

$$\begin{pmatrix} x' \\ i' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{R \cos \alpha} & 1 \end{pmatrix}}_{M_{\alpha,R}} \begin{pmatrix} x \\ i \end{pmatrix}$$

Remarquer que pour une paroi plane, $R = \infty$, cela donne $M_{\alpha,\infty} = \text{Id}$.

3. On souhaite étudier la **stabilité de la trajectoire périodique verticale** OA dans le billard sur le schéma (a) suivant. On appelle $L = OA$ et $R > 0$ le rayon de courbure de la partie supérieure. Noter que $R < 0$ signifierait une courbure dans l'autre sens (i.e. obstacle concave, figures (b), (c)).



Avec les notations précédentes, montrer que

$$\begin{pmatrix} x' \\ i' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ i \end{pmatrix}$$

avec une matrice M que l'on exprimera à partir de R, L . Calculer les valeurs propres² de la matrice M et déduire la stabilité de l'orbite périodique OA.

Solution : d'après précédemment, la trajectoire périodique OA est constitué de la succession : une propagation de longueur L , rebond avec paramètres $\alpha = 0, R$, propagation de longueur L et rebond avec paramètres $\alpha = 0, R = \infty$. Cela donne la matrice :

$$M = M_{0,\infty} M_L M_{0,R} M_L = \begin{pmatrix} 1 + \frac{2L}{R} & 2L \left(1 + \frac{L}{R}\right) \\ \frac{2}{R} & 1 + \frac{2L}{R} \end{pmatrix}$$

$T = \text{Tr}M = 2 + \frac{4L}{R} > 2$ et $\det M = 1$ donc M est une matrice hyperbolique. Ses valeurs propres sont

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(T + \sqrt{T^2 - 4} \right) > 1$$

$$\lambda_{-} = \frac{1}{\lambda_{+}} < 1$$

2. Aide : si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est une matrice avec $T = \text{Tr}(M) > 2$ et $\text{Det}(M) = 1$ alors ses valeurs propres sont $\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} (T \pm \sqrt{T^2 - 4})$. On observe que $|\lambda_{+}| > 1$ si $T > 2$ ou $T < -2$. On dit alors que la matrice est hyperbolique. On a $\lambda_{-} = 1/\lambda_{+}$.

Remarque : la flot du billard est Hamiltonien donc conservatif d'après le théorème de Liouville. Cela se traduit ici par $\det M = 1$, car l'application M est conservative sur la section de Poincaré.

4. Dans les billards (b) et (c) où $R < 0$, déduire la stabilité de l'orbite périodique verticale selon les valeurs de $L/|R|$. Remarques : avec des miroirs, ces géométries sont utilisées dans des cavités optiques Laser par exemple.

Solution : Dans (b), pour la trajectoire périodique on a le même résultat que (a) avec $R \rightarrow (-R)$. Donc $T = 2 - \frac{4L}{|R|}$. La matrice est elliptique (stable) si $|T| < 2$ et hyperbolique (instable) si $|T| > 2$. Cela donne

$$\text{instabilité (hyperbolicité)} \Leftrightarrow T < -2 \Leftrightarrow L > |R|.$$

Dans (c), on a la matrice totale M^2 donc le même résultat de stabilité.

5. Pour une propagation de longueur L suivie d'une réflexion (comme sur la figure 6.1.2), déduire que la matrice qui transforme (x, i) en (x', i') en fonction de $L, R, \cos \alpha$ est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & L \\ \frac{2}{R \cos \alpha} & \frac{2L}{R \cos \alpha} + 1 \end{pmatrix}. \tag{B.3.6}$$

Pour un **billard dispersif**, trouver les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice M (B.3.6) et déduire qu'il y a une **instabilité uniforme** de la dynamique.

Solution : Pour une propagation suivie d'un rebond la matrice totale est donc

$$M = M_{\alpha,R} M_L = \begin{pmatrix} 1 & L \\ \frac{2}{R \cos \alpha} & \frac{2L}{R \cos \alpha} + 1 \end{pmatrix}.$$

$T = \text{Tr} M = 2 + \frac{2L}{R \cos \alpha} > 2$ et $\det M = 1$ donc M est une matrice hyperbolique ; Ses valeurs propres sont

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(T + \sqrt{T^2 - 4} \right) > 1$$

$$\lambda_{-} = \frac{1}{\lambda_{+}} < 1$$

On observe de plus que les directions propres sont respectivement dans les secteurs $(x > 0, i > 0)$ et $(x < 0, i > 0)$. Ainsi rebond après rebond l'instabilité créée par $\lambda_{+} > 1$ s'amplifie. Si les obstacles sont suffisants dans les billards de sorte que toute trajectoire rencontre forcément un obstacle avant de parcourir une longueur $L_{max} > 0$ donnée (on dit que L_{max} est "l'horizon du billard") alors on déduit qu'il y a un coefficient d'instabilité $\bar{\lambda} > 1$ par unité de longueur uniforme. On déduit que la dynamique est uniformément hyperbolique.

B.4 Chapitre Dynamique probabiliste sur les graphes

B.4.1 "Matrice d'adjacence d'un graphe et entropie"

Exercice B.4.1. "Matrice d'adjacence d'un graphe et entropie"

Si Γ est un graphe fini orienté avec m sommets, sa **matrice d'adjacence** \mathcal{L} est définie par $\mathcal{L}_{j,i} = 1$ si $i \rightarrow j$ (i.e. une arête relie i vers j), et $\mathcal{L}_{j,i} = 0$ sinon.

1. Ecrire la matrice d'adjacence \mathcal{L} pour les exemples suivants de graphes.



Solution : Pour le premier graphe, $\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Pour le deuxième graphe,

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Pour un graphe quelconque Γ , montrer que le nombre de chemins reliant les sommets i à j au temps $t \in \mathbb{N}$, noté³ $\mathcal{N}_{i \rightarrow j}(t) := \#\{\text{chemins } i \rightarrow j \text{ au temps } t\}$ est donné par

$$\mathcal{N}_{i \rightarrow j}(t) = (\mathcal{L}^t)_{j,i} \quad (\text{B.4.1})$$

Déduire une formule pour

$$\mathcal{N}(t) := \{\text{chemins périodiques de période } t\}.$$

Solution 1 : D'après la formule du produit de deux matrices, on a

$$(\mathcal{L}^2)_{j,i} = \sum_{k=1}^m \mathcal{L}_{j,k} \mathcal{L}_{k,i}$$

et donc pour $t \geq 1$ quelconque

$$(\mathcal{L}^t)_{j,i} = \sum_{k_1, \dots, k_{t-1}=1}^m (\mathcal{L}_{j,k_{t-1}} \dots \mathcal{L}_{k_2,k_1} \mathcal{L}_{k_1,i})$$

Comme la matrice \mathcal{L} est formée seulement d'éléments 1 ou 0 alors $(\mathcal{L}_{j,k_{t-1}} \dots \mathcal{L}_{k_2,k_1} \mathcal{L}_{k_1,i}) = 1$ si tous les éléments sont 1 auquel cas cela signifie que $i \rightarrow k_1 \rightarrow k_2 \dots \rightarrow k_{t-1} \rightarrow j$ est un chemin de longueur t possible et sinon $(\mathcal{L}_{j,k_{t-1}} \dots \mathcal{L}_{k_2,k_1} \mathcal{L}_{k_1,i}) = 0$. Donc

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}^t)_{j,i} &= \sum_{\text{chemins } i \rightarrow j \text{ au temps } t} 1 \\ &= \mathcal{N}_{i \rightarrow j}(t) \end{aligned}$$

Solution 2 : Procédons par récurrence sur t pour montrer la proposition (B.4.1). P_1 est vraie d'après la définition de la matrice d'adjacence. Supposons que P_t est

3. Le signe $\#$ veut dire "cardinal" c'est à dire "nombre de .."

vraie. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{i \rightarrow j}(t+1) &= \sum_{k=1}^m \mathcal{N}_{i \rightarrow k}(t) \mathcal{N}_{k \rightarrow j}(1) = \sum_{k=1}^m \mathcal{N}_{k \rightarrow j}(1) \mathcal{N}_{i \rightarrow k}(t) \\ &= \sum_{k=1}^m (\mathcal{L})_{j,k} (\mathcal{L}^t)_{k,i} = (\mathcal{L}^{t+1})_{j,i}. \end{aligned}$$

Donc P_{t+1} est vraie.

On a

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(t) &:= \{\text{chemins périodiques de période } t\} = \sum_i \mathcal{N}_{i \rightarrow i}(t) \\ &= \sum_i (\mathcal{L}^t)_{i,i} = \text{Tr}(\mathcal{L}^t). \end{aligned}$$

3. Supposons la matrice \mathcal{L} **mélangeante**. On définit l'**entropie topologique** du graphe par

$$h_{\text{top}}(\Gamma) := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \mathcal{N}_{i \rightarrow j}(t)$$

c'est à dire le taux de croissance exponentiel de la complexité des chemins, car on peut écrire : $\#\{\text{chemins}\} = e^{th_{\text{top}} + o(t)}$. Montrer que

$$h_{\text{top}}(\Gamma) = \log \lambda_1$$

où λ_1 est la valeur propre dominante de la matrice d'adjacence. Calculer $h_{\text{top}}(\Gamma)$ pour l'exemple précédent.

Solution : d'après le théorème de Perron Frobenius 4.1.18, si la matrice \mathcal{L} est mélangeante alors elle a une valeur propres strictement dominante $\lambda_1 > |\lambda_2| > 0$ et

$$\mathcal{L}^t \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \lambda_1^t |U_1\rangle \langle V_1| \left(1 + O\left(\frac{|\lambda_2|}{\lambda_1}\right)^t \right)$$

avec les éléments de U_1, V_1 tous non nuls positifs et $\langle V_1 | U_1 \rangle = 1$. Donc

$$\mathcal{N}_{i \rightarrow j}(t) = (\mathcal{L}^t)_{j,i} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \lambda_1^t \langle \delta_j | U_1 \rangle \langle V_1 | \delta_i \rangle \left(1 + O\left(\frac{|\lambda_2|}{\lambda_1}\right)^t \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \log \mathcal{N}_{i \rightarrow j}(t) &= \frac{1}{t} t \log \lambda_1 + \frac{1}{t} \log (\langle \delta_j | U_1 \rangle \langle V_1 | \delta_i \rangle) \\ &\quad + \frac{1}{t} \log \left(1 + O\left(\frac{|\lambda_2|}{\lambda_1}\right)^t \right) \\ &\xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \log \lambda_1. \end{aligned}$$

Donc $h_{\text{top}}(\Gamma) = \log \lambda_1$.

La matrice $\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est mélangeante et avec **xcas** on écrit $L := [[1.,0,1],[1,0,0],[0,1,0]]$;
 $\text{eigenvals}(L)$; $\text{abs}(\text{eigenvals}(L)[1])$ et obtient $\lambda_1 = 1.46\dots$, $|\lambda_2| = 0.82\dots$

B.4.2 « Internet Google rank »

Exercice B.4.2. « Internet Google rank »

ref : Brin [6]p.104, **Page rank sur Wikipedia**. L'algorithme de Brin et Page a été breveté pour Google en 1997 et a pris fin en 2011.

On considère le graphe G où les sommets i sont les pages webs qui existent sur le réseau internet, $i = 1 \rightarrow N$, et avec une arête $i \rightarrow j$ si la page i possède un lien html vers la page j . On note $L(i) \geq 0$ le nombre de liens de la page i vers d'autres pages.

Le graphe modifié \tilde{G} est le graphe G auquel on rajoute un sommet noté $\{0\}$ et des arêtes $0 \rightarrow i$, $i \rightarrow 0$, $\forall i = 1 \dots N$. Soit $0 < p < 1$ un paramètre appelé damping (amortissement).

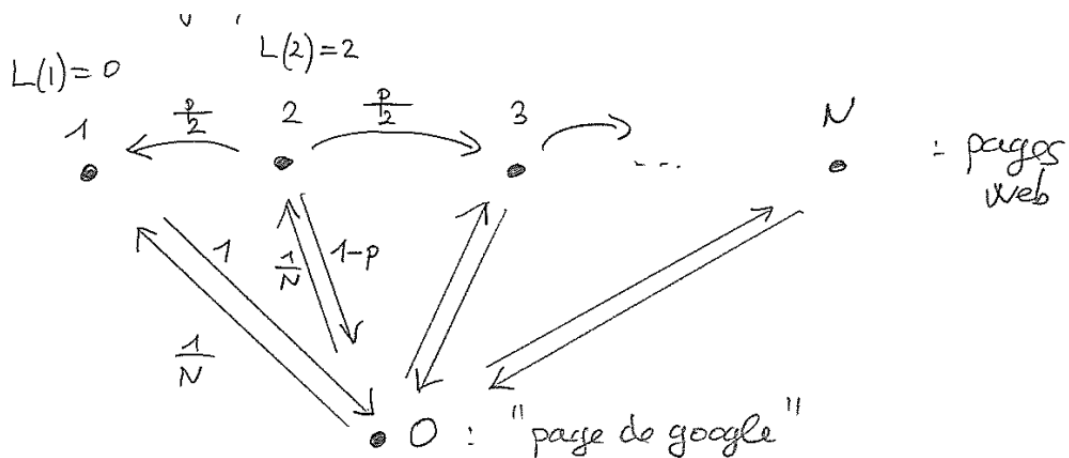
On définit la matrice $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_{i,j})_{i,j=0 \rightarrow N}$ par : $\mathcal{L}_{0,0} = 0$ et pour $i, j \neq 0$,

$$\mathcal{L}_{i,0} = \frac{1}{N}, \quad \mathcal{L}_{0,i} = \begin{cases} 1 & \text{si } L(i) = 0 \\ 1 - p & \text{si } L(i) \geq 1 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}_{j,i} = \begin{cases} \frac{1}{L(i)}p & \text{si } i \rightarrow j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que la matrice \mathcal{L} est **stochastique** et **mélangeante**. Que déduit t-on sur le spectre de \mathcal{L} ?

Solution : voici un exemple de graphe avec $L(1) = 0$ et $L(2) = 2$.



donnant la matrice

$$\mathcal{L} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & \dots & N \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ N \end{matrix} & \left(\begin{matrix} 0 & 1 & 1-p & \dots & \\ \frac{1}{N} & 0 & \frac{p}{2} & & \\ \frac{1}{N} & \vdots & 0 & & \\ \vdots & & \frac{p}{2} & & \\ & & 0 & & \\ \frac{1}{N} & & \vdots & & \end{matrix} \right) \end{matrix}$$

Dans la première colonne on a $\sum_{j=1}^N \frac{1}{N} = 1$. Dans une colonne $i \geq 1$ telle que $L(i) = 0$ on a $\sum_j \mathcal{L}_{j,i} = \mathcal{L}_{0,i} = 1$. Dans une colonne $i \geq 1$ telle que $L(i) > 0$ on a $\sum_j \mathcal{L}_{j,i} = (1-p) + L(i) \left(\frac{p}{L(i)}\right) = 1$. Dans tous les cas, on a $\sum_j \mathcal{L}_{j,i} = 1$ donc la matrice est **stochastique**.

On suppose qu'il y a deux sites a, b connectés, cad que le lien $a \rightarrow b$ existe. Alors au temps $t = 4$, on peut rejoindre tous sommets. $\forall i, j \geq 1$ on a :

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow i \rightarrow 0 \rightarrow i \rightarrow 0 \\ 0 &\rightarrow a \rightarrow b \rightarrow 0 \rightarrow i \\ i &\rightarrow 0 \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow 0 \\ i &\rightarrow 0 \rightarrow j \rightarrow 0 \rightarrow j \end{aligned}$$

Donc la matrice \mathcal{L} est **mélangeante**. D'après le théorème de Perron Forbenius 4.1.18, \mathcal{L} a une valeur propres strictement dominante $\lambda_1 = 1 > |\lambda_2| > 0$ (car \mathcal{L} est stochastique) et

$$\mathcal{L}^t \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} |U_1\rangle\langle V_1| \left(1 + O\left(\frac{|\lambda_2|}{\lambda_1}\right)^t \right)$$

avec les éléments de U_1, V_1 tous non nuls positifs et $\langle V_1|U_1\rangle = 1$. De plus $V_1 =$

$$(1, 1, \dots, 1) \text{ car } \mathcal{L} \text{ est stochastique, donc } 1 = \langle V_1|U_1\rangle = \sum_{j=0}^N u_j \text{ et } U_1 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} \text{ re-}$$

présente une distribution de probabilité sur le graphe appelé état d'équilibre. Les u_j sont les probabilités de présence sur chaque page web j si on suivait un mouvement aléatoire sur le réseau internet en choisissant des liens au hasard.

2. Lorsqu'un internaute fait une requête de recherche à "google search" avec des mots clefs, le classement envoyé par google des pages web ("Rankpage") est donné par l'ordre décroissant des composantes $(u_i)_i$ de l'état d'équilibre de la matrice \mathcal{L} (et après application d'un filtre relatif aux mots clefs demandés). Pourquoi cette ordre est pertinent ?

Solution : Google trie les pages webs i_1, i_2, \dots, i_N par ordre décroissant des composantes de l'état d'équilibre

$$u_{i_1} \geq u_{i_2} \geq \dots \geq u_{i_N}.$$

3. Trouver une majoration de $|\lambda_2|$ (la deuxième plus grande valeur propre de \mathcal{L}).
4. Google calcule les composantes de l'état d'équilibre u_i régulièrement (tous les quelques jours). Quel algorithme efficace proposez vous pour faire ce calcul ?

Solution : la première fois on choisit $u(0) = \left(\frac{1}{N+1}, \frac{1}{N+1}, \dots, \frac{1}{N+1}\right)$ qui est une distribution de probabilité uniforme sur les sites. On itère la formule

$$u(t+1) = \mathcal{L}u(t).$$

Ce calcul se fait pour chaque composante, il est de complexité $O(N)$. D'après le théorème de Perron Forbenius, rapidement on a convergence vers l'état d'équilibre

$$u(t) = \mathcal{L}^t u(0) \rightarrow U_1 \langle V_1 | u(0) \rangle = U_1$$

Si la matrice \mathcal{L} a un peu changée, on refais le calcul, mais en partant de l'état d'équilibre précédent.

B.4.3 « Algorithme de MonteCarlo pour le modèle d'Ising »

Exercice B.4.3. « Algorithme de MonteCarlo pour le modèle d'Ising »

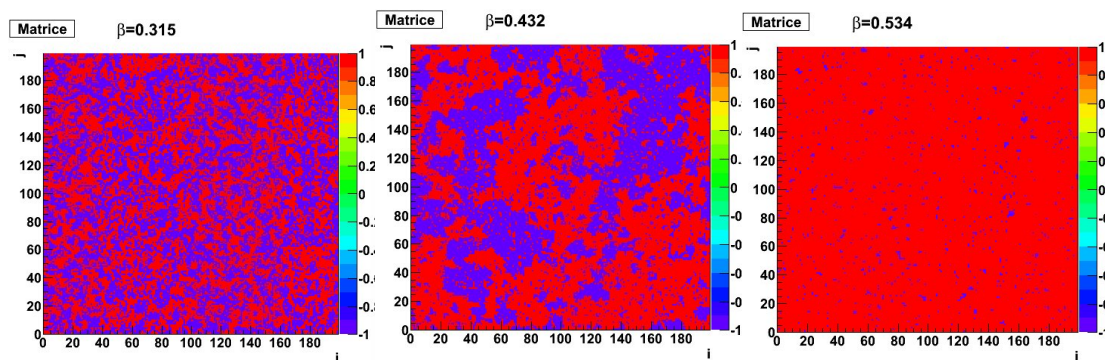


FIGURE B.4.1 – Resultat de l'algorithme de Monte-Carlo pour le modèle d'Ising, aux températures $\beta = 0.3$ (désordre), 0.4 (transition de phase) et 0.5 (ordre magnétique).

On considère un réseau $N \times N$ périodique dont les sites sont notés $X = (x, y)$ et dont les variables sont $f_X = \pm 1$ et modélisent des spins (up/down). Si deux sites sont voisins on note $X \sim Y$. Une configuration des spins est un champ donné : $f = (f_X)_X$. Son énergie ferromagnétique est :

$$E(f) := \sum_X \sum_{Y \text{ tq } X \sim Y} (-f_X \cdot f_Y)$$

1. Combien y a-t-il de sites ? Combien de configurations possibles ? Quelles configurations donnent l'énergie minimale ? et maximale ?

Solution : Il y a N^2 sites. Chaque site X a deux états possibles $f_X = \pm 1$ donc il y a 2^{N^2} configurations f possibles. Par exemple $N = 100$ donne $2^{100^2} \sim 10^{3010}$.

L'énergie $E(f)$ est minimale si $(-f_X \cdot f_Y)$ est minimale, soit $f_X \cdot f_Y$ maximal. Cela donne les deux configurations $f : f_X = +1, \forall X$ ou $f : f_X = -1, \forall X$ appelées "état ferromagnétique" d'énergie $E(f) = -4N^2$.

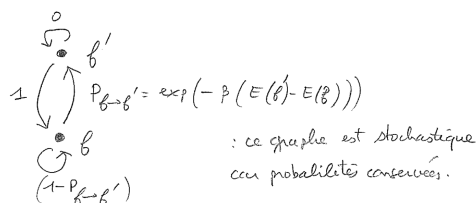
L'énergie $E(f)$ est maximale si $(-f_X \cdot f_Y)$ est maximale, soit $f_X \cdot f_Y$ minimale. Si N est pair, cela est possible pour les deux configurations où les spins sont alternés. appelées "état anti-ferromagnétique" d'énergie $E(f) = 4N^2$.

2. L'algorithme d'évolution suivant est appelé **algorithme de montecarlo**. $\beta \geq 0$ est un paramètre fixé qui est l'inverse de la température : $\beta = 1/(k_b T)$.
 - (a) A l'instant $n = 0$, on part d'une configuration f choisie au hasard.
 - (b) On choisit un site X au hasard, et on note f' la configuration identique à f sauf au site X où le spin est opposé : $f'_X = -f_X$ (spin opposé).
 - (c) A l'instant $n + 1$,
 - i. Si $E(f') < E(f)$ on choisit la configuration f'
 - ii. Si $E(f') \geq E(f)$ on choisit la configuration f' avec la probabilité $P_{f \rightarrow f'} = \exp(-\beta \cdot (E(f') - E(f)))$ (et on reste donc avec f avec la probabilité complémentaire).
 - (d) On revient en (b) pour poursuivre l'évolution du champ de spins.

Montrer que cet algorithme correspond à une matrice 2×2 concernant seulement les 2 états f, f' , qui est **stochastique** et **réversible** pour la mesure de Boltzmann :

$$u_f = \frac{1}{Z} \exp(-\beta E(f))$$

Solution : Concernant deux sites on a le graphe (et matrice) stochastique suivant :



Cela donne

$$\mathcal{L}_{f',f} u_f = e^{-\beta(E(f')-E(f))} \frac{1}{Z} e^{-\beta E(f)} = \frac{1}{Z} e^{-\beta E(f')}$$

$$\mathcal{L}_{f,f'} u_{f'} = 1 \frac{1}{Z} e^{-\beta E(f')} = \frac{1}{Z} e^{-\beta E(f')}$$

donc $\mathcal{L}_{f',f} u_f = \mathcal{L}_{f,f'} u_{f'}$ montrant que la matrice \mathcal{L} est réversible pour la distribution de Boltzman.

3. Dans cette description de toutes les configurations en terme de graphe, quels sont les sommets du graphes ? il a combien de sommets ? et quelles sont les arêtes et leur probabilité ?

Solution : Dans le graphe associé à la matrice \mathcal{L} totale, il y a 2^{N^2} sommets, chaque sommet est une configuration f reliée à d'autres configurations f' si f et f' diffèrent en un site seulement. Donc chaque site est relié à $N^2 - 1$ autres sommets. Les probas sont celles de la question deux, mais pondérées par le facteur $\frac{1}{(N^2-1)}$.

- B.5** Chapitre Dynamique déterministe expansive
- B.6** Chapitre Dynamique déterministe hyperbolique
- B.7** Chapitre Le modele de Lorenz en hydrodynamique.
Le moulin de Lorenz et son attracteur etrange
- B.8** Chapitre Morphogenese et ondes non linéaires

Annexe C

Programmes d'illustration en langage python et C++

C.1 Programmes en langage python

C.1.1 fichier syracuse.py pour la Section 1.1.1.

```
def syracuse(x) :  
  
    seq = [x]  
    if x < 1:  
        return []  
    while x > 1:  
        if x % 2 == 0:  
            x = x / 2  
        else:  
            x = (3 * x + 1)/2  
        seq.append(x)  
    return seq
```

```
syracuse(7)
```

Execution du fichier python :

```
python syracuse.py  
[7, 11, 17, 26, 13, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1]
```

C.2 Programmes en langage C++

C.2.1 fichier syracuse.cc pour la Section 1.1.1.

```
#include <iostream>
using namespace std;

int main()
{
    int x=7;
    cout<<x;

    while (x!=1)
    {
        if (x%2==0)
            x=x/2;
        else
            x=(3*x+1)/2;
        cout<<" , "<<x;
    }
    cout<<endl;
}
```

Compilation et execution du fichier c++

```
g++ syracuse.cc -o syracuse
./syracuse
7,11,17,26,13,20,10,5,8,4,2,1
```


Index

A

Anosov, 129, 134
application de Belousov-Zhabotinsky, 42
application de Poincaré, 23, 170
application logistique, 25, 42
application quadratique, 30
attracteur, 22
attracteur étrange, 31
attracteur étrange de Lorenz, 169

B

Belousov-Zhabotinsky, 37
bifurcation, 29
billard de Sinaiï, 130
Billard dispersif de Sinaiï, 34
billard rectangulaire, 32
blocs de Jordan, 226
Box counting dimension, 174

C

cat map, 139
catalyseur, 39
coefficient d'instabilité de Lyapounov, 134, 135
connexion de Levi-Civita, 75
conservatif, 67, 167
convection thermique, 143
couche d'énergie, 133
courbe Hölder continue, 31
crochet de Poisson, 68
cycle limite attractif, 22

D

dérivée covariante, 75
diagonalisable, 226
différentielle de l'application, 43

dimension fractale de Minkowski, 174
direction instable, 134
direction neutre, 134
direction stable, 134
dissipatif, 167
distribution de Boltzmann, 111
distribution de Gibbs, 111
divergence du champs de vecteur, 52
dynamique symbolique, 123, 173

E

E.D.O., 18
élément de volume, 43, 52
énergie, 67
énergie cinétique, 64
énergie potentielle, 64
ensemble de Cantor, 31
ensemble de Julia, 31
ensemble de Julia plein, 31
ensemble de Mandelbrot, 29
ensemble répulsif, 31
entropie, 35, 131
équation de Burgers, 223
équation de diffusion de la chaleur, 146
équation de KdV, 218
équation de Lotka Volterra, 24
équation d'évolution, 113
équation différentielle ordinaire, 18
équation KdV, 214
Équations de Hamilton, 64
équations de Lorenz, 151, 157, 161, 163
équations de mouvement de Fermi-Pasta-Ulam, 217
équations de Navier Stokes, 146
équations de Saltzman, 147
ergodicité, 138

ergodique, 100, 127, 139
 espace des phases, 64
 état d'équilibre, 99, 106
 évolution à temps continu, 113
 évolution effective, 35, 131
 expansif, 167
 expansive, 118

F

flot, 18, 51, 163
 fonction de corrélation dynamique, 126
 force, 63
 force potentielle, 64
 forme normale, 20
 forme normale de Jordan, 226
 forme symplectique, 69
 fractale, 31, 174

G

générateur, 113
 géodésique, 75
 géométrie symplectique, 69
 gradient symplectique, 149

H

Hamiltonien, 64

I

impulsion, 64
 instabilité de Rayleigh (1916)-Bénard (1901),
 143
 irréductible, 100

L

l'attracteur étrange, 143
 Le Brusselator, 201
 le passage à un modèle continu, 218
 Le problème à deux corps, 65
 libre, 69
 Lipschitz, 57
 Loi de Newton, 63
 loi d'évolution déterministe, 19
 loi probabiliste, 9
 l'unique ergodicité, 72

M

marche aléatoire, 181
 matrice d'adjacence, 97
 matrice hyperbolique, 135
 mécanique classique, 63
 mélangeant, 138
 mélangeant à taux super-exponentielle, 140
 mélangeante, 101, 179
 mélangeante à taux exponentiel, 126
 mesure d'équilibre, 126, 139
 mesure d'équilibre de Sinaï-Ruelle-Bowen, 177
 mesure naturelle, 126
 mesure physique, 126
 mesure SRB, 126
 méthode de Euler, 19
 méthode des images, 32
 mode de Fourier, 71, 141
 modèle de Gray-Scott, 194
 modèle de Jukes-Cantor, 109
 modèle du Brusselator, 194
 mouvement Brownien, 181

N

nombre de Prandtl, 147
 nombre de Rayleigh, 147
 notation de Dirac, 228

O

ondes solitaires, 213
 opérateur de composition, 45, 54, 124
 opérateur de Liouville, 68
 opérateur de Perron-Frobenius, 46
 opérateur de Ruelle, 46
 opérateur de transfert, 45, 54, 124
 opérateur d'évolution, 113
 opérateur stochastique, 46
 orbite périodique attractive, 22
 oscillateur harmonique, 66

P

partition de Markov, 123
 position d'une particule, 63
 positive, 100
 primitive, 101

principe de balance détaillée, 110

principe d'équivalence, 66

principe d'incertitude, 137

processus stochastique, 182

projecteur spectral, 227

R

rayon spectral, 228

relativité générale, 63

relativité restreinte, 63

résolvente, 227

réversible, 110

Runge Kutta d'ordre 4, 19

S

section de Poincaré, 23

sensibilité aux conditions initiales, 117, 118,
129, 172

spatio-temporelle, 37

spectre, 226

Stabilité structurelle, 122

suite de Syracuse, 11

système dynamique, 19

systèmes intégrables, 65

T

Théorème central limite, 142

Théorème central limite pour des variables
aléatoires, 183

théorème de Fourier, 189

Théorème d'équidistribution de Kronecker-
Weyl, 71

Théorie KAM, 89

tore KAM, 89

trajectoire, 118

trajectoire de la particule, 63

U

une loi déterministe, 9

uniformément hyperbolique, 129

uniquement ergodique, 71

V

valeur propre, 226

Bibliographie

- [1] Mark J Ablowitz and Harvey Segur. *Solitons and the inverse scattering transform*, volume 4. SIAM, 1981.
- [2] D. Anosov. Geodesic flows on compact riemannian manifolds of negative curvature. *Proceedings of the Steklov Mathematical Institute*, 90 :1 :1–235, 1967.
- [3] V.I. Arnold. *Les méthodes mathématiques de la mécanique classique*. Ed. Mir. Moscou, 1976.
- [4] V.I. Arnold and A. Avez. *Méthodes ergodiques de la mécanique classique*. Paris : Gauthier Villars, 1967.
- [5] Franck Boyer and Pierre Fabrie. *Mathematical tools for the study of the incompressible Navier-Stokes equations and related models*, volume 183. Springer Science & Business Media, 2012.
- [6] M. Brin and G. Stuck. *Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 2002.
- [7] A. Cannas Da Silva. *Lectures on Symplectic Geometry*. Springer, 2001.
- [8] N. Chernov and R. Markarian. *Chaotic billiards*. Number 127. American Mathematical Soc., 2006.
- [9] Y. Coudène. *Théorie ergodique et systèmes dynamiques*. EDP sciences, 2013.
- [10] Michael Cross and Henry Greenside. *Pattern formation and dynamics in nonequilibrium systems*. Cambridge University Press, 2009.
- [11] E.B. Davies and E.B. Davies. *Spectral theory and differential operators*, volume 42. Cambridge Univ Pr, 1996.
- [12] Robert L Devaney, Luke Devaney, and Luke Devaney. *An introduction to chaotic dynamical systems*, volume 13046. Addison-Wesley Reading, 1989.
- [13] D. Dolgopyat. On decay of correlations in Anosov flows. *Ann. of Math. (2)*, 147(2) :357–390, 1998.
- [14] L. Euler, A.P. Juskevici, and R. Taton. *Correspondance de Leonhard Euler Avec A. C. Clairaut, J. D’Alembert Et J. L. Lagrange*. Commercium epistolicum. Birkhäuser Basel, 1980.
- [15] K.J. Falconer. *Fractal geometry : mathematical foundations and applications*. John Wiley & Sons Inc, 2003.

- [16] F. Faure. Prequantum chaos : Resonances of the prequantum cat map. *arXiv :nlin/0606063*. *Journal of Modern Dynamics*, 1(2) :255–285, 2007.
- [17] F. Faure. *Cours de Mathématiques pour la physique. Niveau Master 1*. [link](#), 2010.
- [18] F. Faure. *Cours de Mécanique Analytique pour Licence L3 de physique*. [link](#), 2010.
- [19] F. Faure and N. Roy. Ruelle-Pollicott resonances for real analytic hyperbolic map. *Nonlinearity*. [link](#), 19 :1233–1252, 2006.
- [20] F. Faure, N. Roy, and J. Sjöstrand. A semiclassical approach for Anosov diffeomorphisms and Ruelle resonances. *Open Math. Journal*. [link](#), 1 :35–81, 2008.
- [21] F. Faure and J. Sjöstrand. Upper bound on the density of Ruelle resonances for Anosov flows. a semiclassical approach. *Comm. in Math. Physics, Issue 2*. [link](#), 308 :325–364, 2011.
- [22] F. Faure and M. Tsujii. Prequantum transfer operator for symplectic Anosov diffeomorphism. *Asterisque 375 (2015)*, [link](#), pages ix+222 pages, 2015.
- [23] I. Gohberg, S. Goldberg, and N. Krupnik. *Traces and Determinants of Linear Operators*. Birkhauser, 2000.
- [24] V. Guillemin and S. Sternberg. *Geometric asymptotics*. Amer Mathematical Society, 1990.
- [25] V. Guillemin and S. Sternberg. *Symplectic techniques in physics*. Cambridge Univ Pr, 1990.
- [26] Etienne Guyon, Jean-Pierre Hulin, and Luc Petit. *Hydrodynamique physique*. Edp Sciences, 2001.
- [27] Leys J., Ghys E., and Alvarez A. *Chaos. Videos*. <http://www.chaos-math.org/fr>.
- [28] A. Katok and B. Hasselblatt. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 1995.
- [29] Lev Davidovitch Landau and Evgenii Mikhailovich Lifchitz. *Physique théorique. tome vi, mécanique des fluides*. 1971.
- [30] C. Liverani. On contact Anosov flows. *Ann. of Math. (2)*, 159(3) :1275–1312, 2004.
- [31] Andrew J Majda and Andrea L Bertozzi. *Vorticity and incompressible flow*, volume 27. Cambridge University Press, 2002.
- [32] D McDuff and D Salamon. *Introduction to symplectic topology, 2nd edition*. clarendon press, Oxford, 1998.
- [33] Y. Pesin. *Lectures on Partial Hyperbolicity and Stable Ergodicity*. European Mathematical Society, 2004.
- [34] Michel Peyrard. *Physique des solitons*. EDP Sciences, 2012.
- [35] D. Ruelle. *Hasard et chaos*. Odile Jacob, 1991.
- [36] D. Ruelle. *Turbulence, strange attractors, and chaos*. World Scientific Series on Non-linear Science. Series A. 16. Singapore : World Scientific, 1995.

- [37] I.M. Sigal. *Introduction to spectral theory : With applications to Schrödinger operators*, volume 113. Springer, 1996.
- [38] S. Tabachnikov. *Billiards*. Soc. Math. de France, 1995.
- [39] M. Taylor. *Partial differential equations, Vol I*. Springer, 1996.
- [40] L.N. Trefethen and M. Embree. *Spectra and pseudospectra*. Princeton University Pr., 2005.
- [41] M. Tsujii. Quasi-compactness of transfer operators for contact Anosov flows. *Nonlinearity*, *arXiv :0806.0732v2 [math.DS]*, 23(7) :1495–1545, 2010.
- [42] M. Tsujii. Contact Anosov flows and the fourier–bros–iagolnitzer transform. *Ergodic theory and dynamical systems*, 32(06) :2083–2118, 2012.
- [43] Alan Mathison Turing. The chemical basis of morphogenesis. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London B : Biological Sciences*, 237(641) :37–72, 1952.
- [44] N.M.J. Woodhouse. *Geometric quantization*. Clarendon Press, Oxford, 1992.

#script qui selectionne les chapitres pour faire des fichiers pdf individuels.

```
pdftk cours_chaos.pdf cat 1-8 249-end output cours_table_matieres.pdf
pdftk cours_chaos.pdf cat 9-40 output cours_intro.pdf
pdftk cours_chaos.pdf cat 41-61 output cours_applications_champs_de_vecteurs.pdf
pdftk cours_chaos.pdf cat 63-93 output cours_hamilton.pdf
pdftk cours_chaos.pdf cat 187-223 output cours_morphogenese.pdf
pdftk cours_chaos.pdf cat 95-116 output cours_Markov.pdf
pdftk cours_chaos.pdf cat 117-128 output cours_dynamique_expansive.pdf
pdftk cours_chaos.pdf cat 129-142 output cours_dynamique_hyperbolique.pdf
pdftk cours_chaos.pdf cat 143-185 output cours_lorenz.pdf
pdftk cours_chaos.pdf cat 225-230 output cours_annexe.pdf
pdftk cours_chaos.pdf cat 231-248 output cours_solutions.pdf
pdftk cours_chaos.pdf cat 247-246 output cours_programmes.pdf
pdftk cours_chaos.pdf cat 1-230 249-end output cours_complet_sans_solutions.pdf
```