Université Joseph Fourier. Master 1 Physique.
TD de système dynamiques et chaos. Frédéric Faure

TD. ***Théorème Central Limite et Mélange en dynamique stochastique***

Dans ce TD, on étudie les propriétés de "**mélange**" et le "**Théorème central limite**" qui sont des caractéristiques de "**comportement chaotique**[1]". Nous commençons par étudier ces propriétés pour un **système stochastique** (i.e. aléatoire) très simple. Dans un prochain TD on étudiera ces même propriétés pour un **système déterministe** mais "sensible aux conditions initiales".

1 Dynamique stochastique de "pile ou face"

On considère le jeu de pile ou face : à chaque instant $t \in \mathbb{Z}$, l'état du système est $x(t) \in \{-1, 1\}$ est choisit au hasard avec probabilités $p(-1) = 1/2$, $p(1) = 1/2$.

1. On considère une suite de T réalisations aléatoires
$$x = (x(1), x(2), \ldots x(T)) \in \{-1, 1\}^T.$$
Quelle est la probabilité $p(x)$ d'une telle suite x ?
2. On souhaite montrer que la somme $S_x(T) := \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^{T} x(t)$ se distribue pour $T \gg 1$ selon une loi Gaussienne $G_D(S) = C \exp\left(-S^2/(2D)\right)$ avec $C > 0$ et un coefficient de diffusion $D > 0$ que l'on va calculer. Pour cela on considère la distribution sur $S \in \mathbb{R}$ des valeurs de $S_x(T)$:
$$\mathcal{D}_T(S) := \sum_{x \in \{-1,1\}^T} p(x)\, \delta(S - S_x(T))$$
où δ est la distribution de Dirac. On souhaite donc montrer que $\mathcal{D}_T \underset{T\to\infty}{\rightarrow} G_D$ "au sens des distributions", c'est à dire que pour toute fonction test (ou "observable") $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\langle \psi | \mathcal{D}_T \rangle \underset{T\to\infty}{\rightarrow} \langle \psi | G_D \rangle$ avec le produit scalaire $\langle \psi | \varphi \rangle := \int \overline{\psi(S)} \varphi(S)\, dS$. Montrer que $\langle \psi | \mathcal{D}_T \rangle = \sum_{x \in \{-1,1\}^T} \psi(S_x(T))\, p(x)$.
3. Dans un premier temps, on choisit la fonction $\psi_k(S) = \exp(ikS)$ avec $k \in \mathbb{R}$ (mode de Fourier). Montrer que
$$\sum_{x \in \{-1,1\}^T} \psi_k(S_x(T))\, p(x) = \cos\left(\frac{k}{\sqrt{T}}\right)^T$$
4. Montrer[2] que $\cos\left(\frac{k}{\sqrt{T}}\right)^T = \exp\left(-\frac{1}{2}k^2\right)\left(1 + O\left(\frac{k^4}{T}\right)\right)$.

---

1. d'après le dictionnaire, chaotique = "confus, désordonné, imprévisible"

2. Aide : écrire $\cos\left(\frac{k}{\sqrt{T}}\right)^T = \exp\left(\log\left(\cos\left(\frac{k}{\sqrt{T}}\right)^T\right)\right)$. Utiliser $\cos(X) = 1 - \frac{X^2}{2} + O(X^4)$ et $\log(1+X) = X + O(X^2)$.

5. Pour une fonction $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ quelconque, déduire[3] le "**théorème central limite**" $\mathcal{D}_T \underset{T\to\infty}{\to} G_D$ qui s'écrit :

$$\sum_{x\in\{-1,1\}^T} \psi\left(S_x(T)\right) p(x) \underset{T\to\infty}{\to} \int \psi(S)\, G_D(S)\, dS,$$

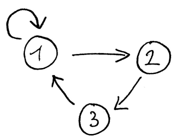
et donner la valeur du **coefficient de diffusion** D.

2 Dynamique stochastique de Markov.

Cet exercice est une généralisation de l'exercice précédent. Considérer un système dynamique aléatoire avec $N \geq 1$ états possibles, où à chaque instant $t \in \mathbb{Z}$ l'état du système est $x(t) \in \{1, 2, \dots N\}$. A l'instant $t+1$ il prend la valeur $x(t+1) \in \{1, 2 \dots N\}$ au hasard selon une probabilité de transition $p_{x\to x'}$ connue pour tout $x, x' \in \{1, 2 \dots N\}$, indépendante de t. On décrit la connaissance du système à l'instant t par une distribution de probabilité $u_t(x) \geq 0$ telle que $\sum_{x=1}^N u_t(x) = 1$. Par exemple, on a $N = 3$ états et les probabilités de transition sont

$$p_{1\to1} = \frac{1}{2}, \quad p_{1\to2} = \frac{1}{2}, \quad p_{2\to3} = 1, \quad p_{3\to1} = 1, \tag{2.1}$$

les autres sont $p_{x\to x'} = 0$. Cet exemple se représente par le "graphe de Markov" G_1 suivant :



1. On introduit la matrice $P = \left(P_{x',x}\right)_{x',x\in\{1,\dots N\}}$ de taille $N \times N$ et d'éléments $P_{x',x} = p_{x\to x'}$, appelée matrice stochastique ou matrice de Markov. Ecrire cette matrice dans l'exemple (2.1) ?
2. Dans le cas général, exprimer le vecteur $u_{t+1} = \left(u_{t+1}(x)\right)_{x\in\{1,\dots N\}} \in \mathbb{R}^N$ à partir du vecteur $u_t \in \mathbb{R}^N$ et de la matrice P. Que vaut $\sum_{x'} P_{x',x}$ à x fixé (somme sur les colonnes) ?
3. Par exemple dans le jeu de pile ou face, il y a $N = 2$ états possibles. Écrire l'expression de la matrice P et dessiner le graphe de Markov. Supposer que à l'instant $t = 0$ l'état u_0 est connu. Que vaut $u(t)$ pour $t \geq 1$?
4. Pour l'exemple (2.1), on suppose l'état $u_0 \in \mathbb{R}^3$ connu. Montrer[4] que pour $t \to \infty$, $u_t \to u_\infty$ converge exponentiellement vite vers un **"état d'équilibre"** u_∞ que l'on calculera. C'est la propriété de **"mélange"**.

3. Aide : utiliser la transformée de Fourier unitaire $\tilde{\psi}(k) = (\mathcal{F}\psi)(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ikS} \psi(S)\, dS \Leftrightarrow \psi(S) = \left(\mathcal{F}^{-1}\tilde{\psi}\right)(S) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{ikS} \tilde{\psi}(k)\, dk$, et l'intégrale Gaussienne $\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\left(AX^2 + BX\right)\right) dX = \sqrt{\frac{\pi}{A}} \exp\left(\frac{B^2}{4A}\right)$.

4. Aide : diagonaliser la matrice $P = ADA^{-1}$ avec D diagonale. Sur internet, `https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/xcasfr.html`, on écrit `P:=[[1/2,0,1],[1/2,0,0],[0,1,0]]; D:=egvl(P); A:=egv(P);` On vérifiera que `simplify(A*D*inv(A));` redonne bien la matrice `P` . On a $A = (U_1, U_2, U_3)$ vecteurs propres en colonnes, $A^{-1} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$ vecteurs propres en ligne, et déduire que $P^t \underset{t\to\infty}{\to} |U_1\rangle\langle V_1|$.

5. (Optionnel) Démontrer le **théorème central limite** : on suppose donnée une fonction $\varphi : x \in \{1, 2, \ldots N\} \to \mathbb{R}$. On souhaite montrer que la somme $S_x(T) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^{T} \varphi(x(t))$ se distribue pour $T \gg 1$ selon une loi Gaussienne $G_D(S) = C \exp\left(-S^2 / (2D)\right)$ avec un coefficient de diffusion $D > 0$ que l'on va calculer. Si $\mathcal{D}_T(S) := \sum_{x \in \{-1,1\}^T} p(x) \delta(S - S_x(T))$ alors $\mathcal{D}_T \underset{T\to\infty}{\to} G_D$ au sens des distributions. Cela s'écrit

$$\forall \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \qquad \sum_{x \in \{1,2,\ldots,N\}^T} \psi(S_x(T))\, p(x) \underset{T\to\infty}{\to} \int \psi(S)\, G_D(S)\, dS.$$