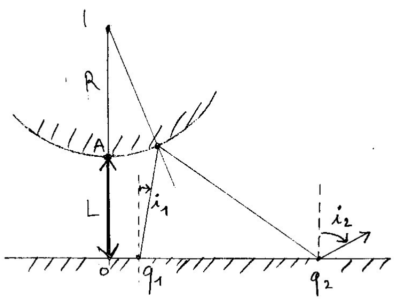
Université Joseph Fourier. Master 1 Physique.
TD de système dynamiques et chaos. Frédéric Faure

TD 6. ***Dynamique hyperbolique 2***

Exercice 0.1. Stabilité d'un rebond dans un billard. On souhaite étudier la stabilité de **la trajectoire périodique verticale** OA dans le billard sur le schéma suivant. On appelle $L = OA$ et R le rayon de courbure de la partie supérieure. Noter que $R < 0$ signifie une courbure dans l'autre sens.



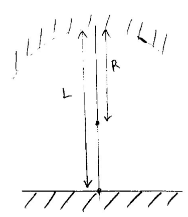
1. Soit $(q_1, p_1 = \sin(i_1))$ un "état initial" sur le bord inférieur. Montrer que l'état suivant $(q_2, p_2 = \sin(i_2))$ au premier ordre en $q, i \ll 1$ est donné par

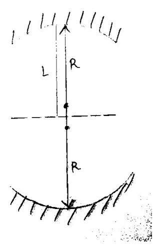
$$\begin{pmatrix} q_2 \\ p_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \left(1 + 2\frac{L}{R}\right) & -2L\left(1 + \frac{L}{R}\right) \\ -\frac{2}{R} & \left(1 + 2\frac{L}{R}\right) \end{pmatrix}}_{DM} \begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \end{pmatrix}$$

La matrice $DM : (q_1, p_1) \to (q_2, p_2)$ est le linéarisé de l'application de Poincaré au voisinage de l'orbite périodique.

2. Vérifier que $\mathrm{Det}\,(DM) = 1$. Calculer $T = \mathrm{Tr}\,(DM)$. Calculer les valeurs propres de la matrice DM en fonction de T et déduire si l'orbite OA est stable ou instable selon L/R.

3. Déduire la stabilité de l'orbite périodique verticale dans les billards suivants, selon les valeurs de L/R :





Exercice 0.2. Application de $SL(2,\mathbb{R})$. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice réelle qui représente une application de Poincaré linéaire dans le plan (q,p) ayant $(0,0)$ comme point fixe (= point d'équilibre). La conservation de l'aire $dqdp$ impose $Det(M) = ad - cb = 1$. (On dit que $M \in SL(2,\mathbb{R})$). Soit $T = a + d$ la trace de la matrice. Montrer que

1. Si $|T| > 2$ alors on peut écrire $M = PDP^{-1}$ (qui s'interprète comme un changement de base) où $D = \pm \begin{pmatrix} e^{\lambda} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda} \end{pmatrix}$ est diagonale contenant les valeurs propres et $\lambda = \log\left(\frac{T+\sqrt{T^2-4}}{2}\right) > 0$ appelé **coefficient de Lyapounov**. Chaque trajectoire $(q_n, p_n) = M^n(q_0, p_0)$ est sur une hyperbole. Les vecteurs propres donnent les directions instable et stable. Déduire que le point$(0,0)$ est instable. On dit que la matrice est **hyperbolique.**
2. Si $-2 < T < 2$ alors $M = PDP^{-1}$ avec $D = \pm \begin{pmatrix} e^{i\omega} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega} \end{pmatrix}$ et la fréquence $\omega = \arg\left(\frac{T+i\sqrt{4-T^2}}{2}\right)$. Chaque trajectoire est sur une ellipse de période $T = 2\pi/\omega$. Déduire que $(0,0)$ est stable. On dit que la matrice est **elliptique.**
3. Si $|T| = 2$ alors $M = PDP^{-1}$, avec $D = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $D = \pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On dit que la matrice est **parabolique**. Que dire de la stabilité de $(0,0)$?