Université Joseph Fourier. Master 1 Physique.
TD de système dynamiques et chaos. Frédéric Faure

TD. ***Dynamique hyperbolique 1***

1 Dynamique hyperbolique (chaotique) du "chat d'Arnold".

Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on considère la dynamique à temps discret d'un point $E_t = (q_t, p_t) \in \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{Z}$, définit par

$$\begin{pmatrix} q_{t+1} \\ p_{t+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} q_t \\ p_t \end{pmatrix}$$

Ainsi $E_t = M^t E_0$.

1. Montrer que la matrice M est **conservative**, i.e. préserve l'élement d'aire $dqdp$ sur $\mathbb{R}^2$. Calculer ses valeurs propres notées $\lambda_+ > 1, \lambda_- < 1$ et ses vecteurs propres donnant les directions stables et instables. Tracer l'allure des trajectoires dans le plan $(q,p) \in \mathbb{R}^2$, en particulier pour des points situés sur les axes stables et instables.
2. On note maintenant $\tilde{q} = q$ modulo 1 et $\tilde{p} = p$ modulo 1, c'est à dire que $\tilde{q}, \tilde{p} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} = [0,1[$ sont les parties fractionnaires de q,p. Noter que inversement $\tilde{q}, \tilde{p} \in [0,1[$ donnés sont les parties fractionnaires des coordonnées $q = \tilde{q} + n_1, p = \tilde{p} + n_2$ avec n_1, n_2 entiers. On s'intéresse maintenant aux trajectoires[1] de $\tilde{q}_t, \tilde{p}_t$ sur le carré $\mathcal{S} := (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2 = [0,1[^2$. Par exemple $M \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.9 \\ 1.3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.3 \end{pmatrix}$ modulo 1. Soit $A, B \subset \mathcal{S}$ deux petits disques quelconques. On note $M^t(A)$ l'évolution des points de A sur le carré $\mathcal{S}$. Montrer que pour $t \in \mathbb{N}$ assez grand, $(M^t(A) \bigcap B)$ est non vide. *(Aide : pour cela représenter d'abord l'allure des ensembles $M^{t/2}(A)$ et $M^{-t/2}(B)$ sur le plan $\mathbb{R}^2$ et montrer qu'ils s'intersectent modulo 1).* Déduire que $M^t(A)$ remplit $\mathcal{S} = [0,1[^2$ de façon dense pour $t \to \infty$. Cette propriété s'appelle le **mélange topologique** et signifie que la **dynamique de** M **est "très chaotique"** sur $\mathcal{S}$.
3. Un point $\tilde{E}_0 = (\tilde{q}_0, \tilde{p}_0) \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$ est dit **périodique de période** t si $\tilde{E}_t = M^t\left(\tilde{E}_0\right) = \tilde{E}_0$ modulo 1. Montrer qu'il y a
$$\mathcal{N}_t = \left|\det\left(M^t - Id\right)\right| = \lambda_+^t - 2 + \lambda_+^{-t}$$
points périodiques de période t . *(Aide : montrer qu'il faut résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'équation $M^t(E_0) = E_0 + N$ avec $N = (n_1, n_2)$ entiers).* Trouver les points de période $t = 1$, $t = 2$ et tracer les.
4. Montrer qu' un point est périodique si et seulement si ses coordonnées $(\tilde{q}_0, \tilde{p}_0)$ sont des nombres rationnels (rappel : un nombre rationnel est le quotient de deux entiers a/b).
5. On appelle
$$h := \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \log \mathcal{N}_t$$
l'**entropie topologique** du système dynamique qui signifie que le nombre d'orbites périodiques de période t augmente comme e^{ht}. Calculer h.

1. On peut considérer ce modèle à temps discret comme une section de Poincaré d'un flot à temps continu.