Université Joseph Fourier. Master 1 Physique.
TD de système dynamiques et chaos. Frédéric Faure

---

TD. ***Dynamique hyperbolique 1***

---

# 1 Hyperbolicité d'un billard dispersif.

Le but du problème est de montrer que la dynamique d'une particule dans un billard à obstacles convexes (par exemple des disques, figure 1.1) est « complèteïent chaotique » au sens précis : « sensibilité aux conditions initiales » ou plus précisément « uniformément hyperbolique ». Un tel billard est appelé « billard dispersif » ou “billard de Sinaï”. Voir simulations.

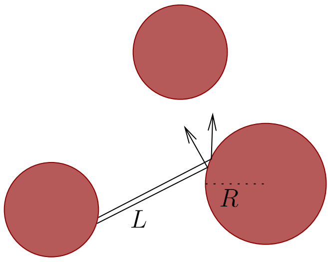


FIGURE 1.1 – Billard dispersif ou Billard de Sinaï.

Pour montrer cela on remarque que la dynamique dans un billard plan est une succession de propagations en ligne droite et de réflexions sur des obstacles.

1. Traitons d'abord la propagation, voir figure 1.2(a). On considère une trajectoire de référence (c'est l'axe $z$) et on note $x$ l'axe orthogonal, qui sert de section de Poincaré : une trajectoire voisine coupe l'axe $x$ à la position $x$ et avec un angle $i$. On supposera $x, i \ll 1$. Après une longueur $L$ donnée, exprimer les nouvelles valeurs $(x', i')$ en fonction de $(x, i)$ sous forme matricielle (cad au premier ordre).
2. On considère maintenant la réflexion avec un angle d'incidence $\alpha$ sur une paroi ayant un rayon de courbure $R$ au point de réflexion, voir figure 1.2(b). Avec les même définitions de $(x, i)$ que précédemment, on admettra (ou on montrera) qu'au point de réflexion, au premier ordre, on a $\begin{pmatrix} x' \\ i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{R\cos\alpha} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ i \end{pmatrix}$. Pour une propagation de longueur $L$ suivie d'une réflexion (comme sur la figure 1.1), déduire la matrice qui transforme $(x, i)$ en $(x', i')$ en fonction de $L, R, \cos\alpha$. Trouver les valeurs propres[1] de cette matrice et déduire qu'il y a une instabilité uniforme de la dynamique dans un billard dispersif.

# 2 Dynamique hyperbolique (chaotique) du “chat d'Arnold”.

Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on considère la dynamique à temps discret d'un point $E_t = (q_t, p_t) \in \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{Z}$, définit par

$$\begin{pmatrix} q_{t+1} \\ p_{t+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} q_t \\ p_t \end{pmatrix}$$

---

1. Aide : si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est une matrice avec $T = \mathrm{Tr}(M) > 2$ et $\mathrm{Det}(M) = 1$ alors ses valeurs propres sont $\lambda_\pm = \frac{1}{2}\left(T \pm \sqrt{T^2 - 4}\right)$.

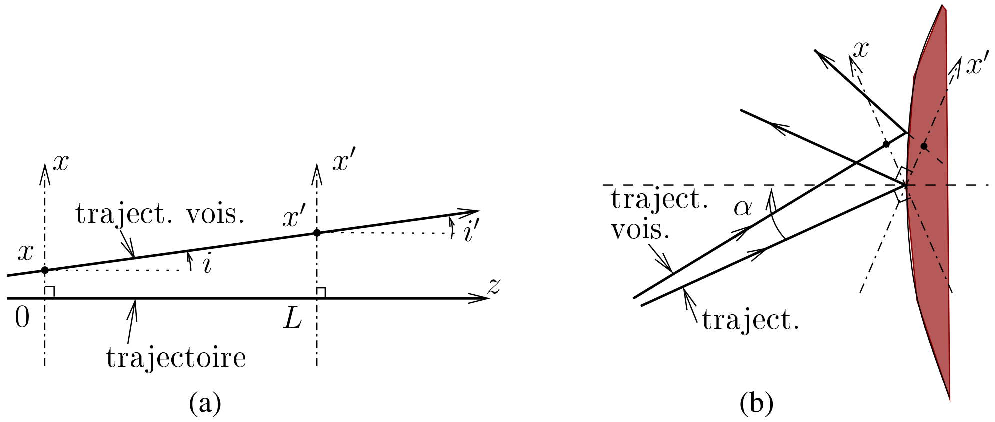


FIGURE 1.2 – (a) Section de Poincaré pour une propagation et (b) pour un rebond sur une paroi de rayon $R$. Une trajectoire voisine est repérée par la position $x$ transverse et l'angle $i$.

Ainsi $E_t = M^t E_0$.

1. Montrer que la matrice $M$ est **conservative**, i.e. préserve l'élement d'aire $dqdp$ sur $\mathbb{R}^2$. Calculer ses valeurs propres notées $\lambda_+ > 1, \lambda_- < 1$ et ses vecteurs propres donnant les directions stables et instables. Tracer l'allure des trajectoires dans le plan $(q,p) \in \mathbb{R}^2$, en particulier pour des points situés sur les axes stables et instables.
2. On note maintenant $\tilde{q} = q$ modulo 1 et $\tilde{p} = p$ modulo 1, c'est à dire que $\tilde{q}, \tilde{p} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} = [0,1[$ sont les parties fractionnaires de $q, p$. Noter que inversement $\tilde{q}, \tilde{p} \in [0,1[$ donnés sont les parties fractionnaires des coordonnées $q = \tilde{q} + n_1, p = \tilde{p} + n_2$ avec $n_1, n_2$ entiers. On s'intéresse maintenant aux trajectoires[2] de $\tilde{q}_t, \tilde{p}_t$ sur le carré $\mathcal{S} := (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2 = [0,1[^2$. Par exemple $M \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.9 \\ 1.3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.3 \end{pmatrix}$ modulo 1. Soit $A, B \subset \mathcal{S}$ deux petits disques quelconques. On note $M^t(A)$ l'évolution des points de $A$ sur le carré $\mathcal{S}$. Montrer que pour $t \in \mathbb{N}$ assez grand, $(M^t(A) \bigcap B)$ est non vide. *(Aide : pour cela représenter d'abord l'allure des ensembles $M^{t/2}(A)$ et $M^{-t/2}(B)$ sur le plan $\mathbb{R}^2$ et montrer qu'ils s'intersectent modulo 1).* Déduire que $M^t(A)$ remplit $\mathcal{S} = [0,1[^2$ de façon dense pour $t \to \infty$. Cette propriété s'appelle le **mélange topologique** et signifie que la **dynamique de** $M$ **est "très chaotique"** sur $\mathcal{S}$.
3. Un point $\tilde{E}_0 = (\tilde{q}_0, \tilde{p}_0) \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$ est dit **périodique de période** $t$ si $\tilde{E}_t = M^t\left(\tilde{E}_0\right) = \tilde{E}_0$ modulo 1. Montrer qu'il y a
$$\mathcal{N}_t = \left|\det\left(M^t - Id\right)\right| = \lambda_+^t - 2 + \lambda_+^{-t}$$
points périodiques de période $t$ . *(Aide : montrer qu'il faut résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'équation $M^t(E_0) = E_0 + N$ avec $N = (n_1, n_2)$ entiers).* Trouver les points de période $t = 1$, $t = 2$ et tracer les.
4. Montrer qu' un point est périodique si et seulement si ses coordonnées $(\tilde{q}_0, \tilde{p}_0)$ sont des nombres rationnels (rappel : un nombre rationnel est le quotient de deux entiers $a/b$).
5. On appelle
$$h := \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \mathcal{N}_t$$
l'**entropie topologique** du système dynamique qui signifie que le nombre d'orbites périodiques de période $t$ augmente comme $e^{ht}$. Calculer $h$.

2. On peut considérer ce modèle à temps discret comme une section de Poincaré d'un flot à temps continu.