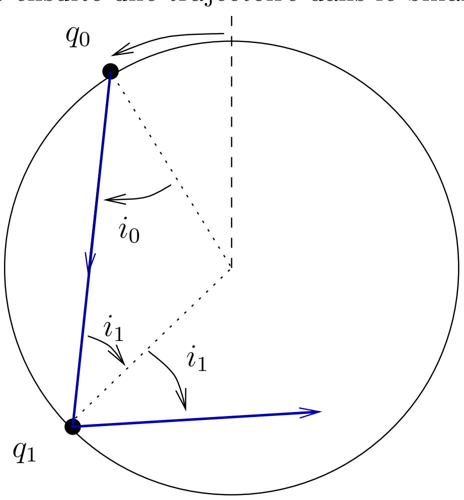
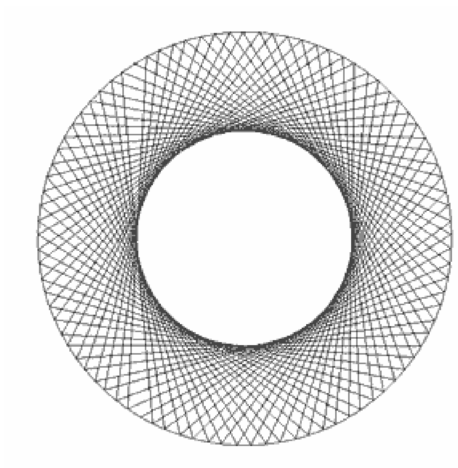
Université Joseph Fourier. Master 1 Physique.
TD de système dynamiques et chaos. Frédéric Faure

TD. ***Dynamique (uniquement) ergodique***

Dans ce TD, il ne s'agit pas de dynamique chaotique, puisque il n'y aura pas de "sensibilité aux conditions initiales" ni de propriété de "mélange". On étudie une propriété "plus faible" appelée (unique) ergodicité.

Exercice 0.1. Billard circulaire. On considère un billard de bord circulaire (rayon 1). Une particule se déplace à vitesse constante dans le disque et rebondit de façon parfaite sur le bord. On note $q_0 \in [0, 2\pi]$ la position angulaire d'un point sur le bord, $i_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ l'angle du vecteur vitesse par rapport à la normale. (q_0, i_0) détermine l'état initial d'une particule qui suit ensuite une trajectoire dans le billard.





1. L'état initial (q_0, i_0) sur le bord détermine la suite des rebonds caractérisés par $(q_t, i_t) \in [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ pour $t = 0, 1, 2, \ldots$ Exprimer (q_t, i_t) à partir de (q_0, i_0).
2. Tracer un exemple de trajectoire périodique (fermée) qui fait $m = 3$ rebonds en $n = 1$ tour autour du centre. Tracer un exemple de trajectoire périodique qui fait $m = 5$ rebonds en $n = 2$ tours autour du centre. Montrer plus généralement que une trajectoire est **périodique** si et seulement si $i_0 = \pi \frac{a}{b}$ où a, b sont des entiers premiers entre eux (on dit que $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ est **rationnel**). Exprimer le nombre m de rebonds et le nombre n de tours effectués en une période en fonction de a, b ?
3. Si I est un intervalle donné du bord et $i_1 = \pi x$ avec $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ **irrationnel**, on note $\kappa_t(I) \in [0, 1]$ la proportion de points $q_{t'}$ de la trajectoire avec $t' \in [0, t-1]$, qui appartiennent à l'intervalle I :

$$\kappa_t(I) := \frac{1}{t} \sharp \left\{ t' \in \{0, \ldots t-1\},\ \text{t.q. } q_{t'} \in I \right\}.$$

Montrer que pour toute condition initiale q_0, $\kappa_t(I)$ converge vers la longueur relative $|I| / (2\pi)$ de l'intervalle lorsque $t \to \infty$. On dit que la dynamique est **uniquement ergodique**. *Aide : utiliser la fonction caractéristique l'intervalle* $\chi_I(q) = 1$ *si* $q \in I$

et $\chi_I(q) = 0$ sinon. Observer que $\kappa_t(I) = \frac{1}{t}\sum_{t'=1}^{t}\chi_I(q_{t'})$ et que $|I| = \int \chi_I(q)\,dq$. Décomposer χ_I en séries de Fourier $\varphi_n(q) = \exp(nq)$.

4. **(Optionnel)** Sans utiliser la question précédente, montrer que si $i = \pi x$ avec $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ **irrationnel** alors les points $q_1, q_2, \ldots$ de la trajectoire (non périodique) sont denses sur le bord (i.e. il n'y a pas d'intervalle du bord non touché). *Aide : procéder par l'absurde en supposant qu'il y a un intervalle non touché.* Retrouver ce résultat comme conséquence de la question précédente.

Exercice 0.2. (Optionnel) Sur les nombres rationnels et irrationnels

Montrons que "les nombres rationnels sont exceptionnels parmi les réels". Soit $x \in [0,1]$ que l'on écrit en base deux $x = \sum_{k\geq 1} b_k 2^{-k} = [0, b_1 b_2 b_3 \ldots]_{\text{base}\,2}$ avec $b_k \in \{0,1\}$.

1. Montrer que $x \in \mathbb{Q}$ si et seulement si la suite $(b_k)_{k\geq 1}$ est périodique à partir d'un certain rang.
2. Montrer que $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ est dénombrable, c'est à dire que l'on peut numéroter tous les élements.
3. Montrer que $(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \cap [0,1]$ est indénombrable (Cantor 1874 qui a montré l'existence de plusieurs "infinis"). *Aide : procéder par l'absurde, faire une liste $m = 1, 2\ldots$ de $x^{(m)} = 0.b_1^{(m)} b_2^{(m)} \ldots$ et considérer la diagonale $0.b_1^{(1)} b_2^{(2)} \ldots$.*

Exercice 0.3. (Optionnel) Loi de Newcomb-Bendford

Observer le tableau 0.1. Suivant Newcomb et Benford 1881, on va étudier un modèle mathématique qui peut aider à expliquer pourquoi la proportion p_c décroit avec c. On considère

Premier chiffre c	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre de pays	49	36	23	24	13	14	13	10	12
Proportion observée p_c	0,253	0,186	0,119	0,123	0,067	0,072	0,067	0,051	0,062

TABLE 0.1 – Répartition du premier chiffre significatif des effectifs de population de 194 pays du monde selon l'édition 2010 du CIA World Factbook

la suite $u_n = 2^n$ avec $n \in \mathbb{N}$. On note c_n le premier chiffre de u_n en base 10. Voici les premières valeurs de c_n marquées en gras :

$$u_n = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{8}, \mathbf{1}6, \mathbf{3}2, \mathbf{6}4, \mathbf{1}28, \mathbf{2}56, \mathbf{5}12, \mathbf{1}024, \mathbf{2}048, \ldots$$

Montrer que dans cette suite $c_n : 1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, \ldots$ un chiffre donné $c \in \{1, 2, 3\ldots 9\}$ apparaît avec la probabilité $p_c = \frac{\log\left(1+\frac{1}{c}\right)}{\log 10}$ (plus précisément si $N_t(c)$ est le nombre d'apparition de c dans la séquence $\{c_0, c_1, \ldots c_{t-1}\}$, montrer que $\kappa_t = \frac{N_t(c)}{t} \underset{t\to\infty}{\to} p_c$). Par exemple $p_1 = 0.301, p_7 = 0.06\ldots$. (Voir "Loi de Bendford" sur wikipedia et son utilité pour détecter les fraudes fiscales).

Aide : écrire $c_n 10^{r_n} \leq u_n < (c_n + 1)\, 10^{r_n}$ et prendre le log pour se ramener à une dynamique de translation de $\frac{\log 2}{\log 10}$ modulo 1. Montrer que $\frac{\log 2}{\log 10}$ est irrationnel. Montrer l'unique ergodicité de la dynamique (même démarche que dans la question 5 de l'exercice précédent).