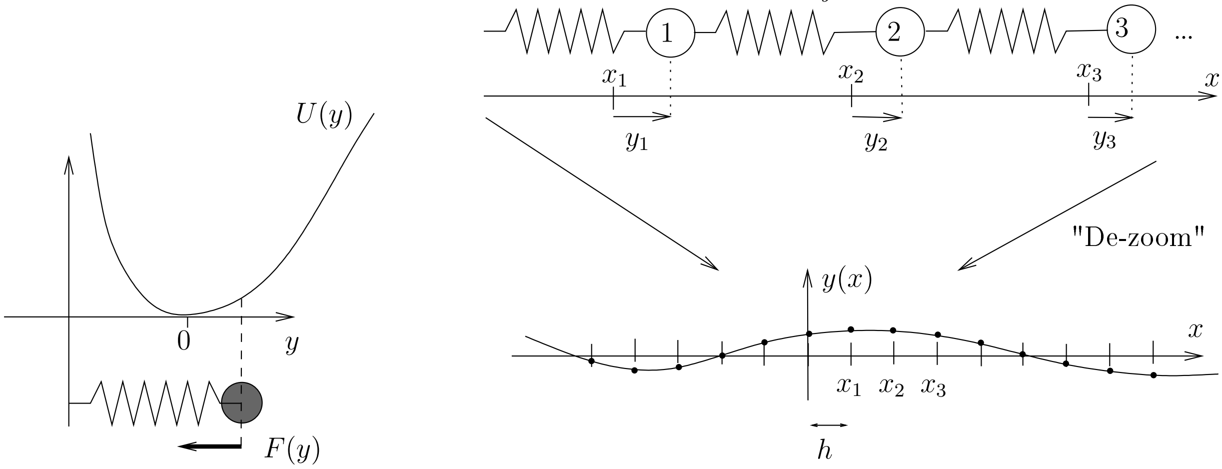
Université Joseph Fourier. Master 1 Physique.
TD de système dynamiques et chaos. Frédéric Faure.

TD 3. ***Ondes non linéaires. Solitons dans une chaine d'oscillateurs non linéaires.***

Modèle étudié par Fermi, Pasta Ulam en 1955.

1 Modèle d'oscillateurs

On considère un ensemble "d'oscillateurs", indicés par $j \in \mathbb{Z}$ et disposés sur l'axe réel. On suppose que les oscillateurs sont chacun de masse m et couplés à leur proche voisin par un ressort. La réaction de ce ressort est caractérisé par une énergie potentielle $U(y)$ ayant un minimum non dégénéré en $y = 0$ (position d'équilibre), et donnant une force $F(y) = -\frac{dU}{dy}$.



Faire un developpement limité de U en $y = 0$ à l'ordre y^3, en supposant $U''(0) > 0, U'''(0) \neq 0$. On note $y_j(t) \in \mathbb{R}$ la position de l'oscillateur j à la date t. Montrer que l'équation de mouvement des oscillateurs peut s'écrire (après un choix d'unité adéquates pour y, t) :

$$\frac{d^2 y_j(t)}{dt^2} = F_{j+1/j} - F_{j/j-1} = (y_{j+1} - y_j) + (y_{j+1} - y_j)^2 - \left((y_j - y_{j-1}) + (y_j - y_{j-1})^2\right) \qquad (1)$$

appelé modèle de **Fermi-Pasta-Ulam.**

2 Limite du continu

On étudie maintenant la "**limite au continu**" du modèle précédent, c'est à dire que l'on veut montrer la proposition suivante

Proposition 1. *Supposons une configuration des pendules donnée par $y_j(t) = h.\tilde{y}(x_j - ht, t)$ avec une certaine fonction $\tilde{y}(x,t)$, avec $x_j = jh$ et $h \ll 1$, (cad "de variation spatiale lente et de petite amplitude $\sim h$ et que les déformations se déplacent vers la droite à la vitesse $\sim h$"). Supposons que $y_j(t)$ soit gouvernée par l'équation de FPU (??). Alors $\tilde{y}(x,t)$ est bien décrite (modulo des erreurs $O(h)$) par l'**équation de KdV***

$$\partial_{\tilde{t}} u + \partial_x^3 u + 6u.\partial_x u = 0 \qquad (2)$$

avec les changements d'échelle

$$\tilde{t} := \frac{1}{24} h^3 t, \quad u := 4\partial_x \tilde{y}.$$

et sur une échelle de temps de l'ordre de $|\tilde{t}| \lesssim C$, soit $|t| \leq Ch^{-3}$, avec une constante C arbitraire.

1. On note $h > 0$ l'écart entre la position d'équilibre de deux oscillateurs voisins et $x_j = jh \in \mathbb{R}$ la position de l'oscillateur $j \in \mathbb{Z}$. On exprime

$$y_j(t) = y(x_j, t)$$

à partir d'une fonction analytique $y : x, t \in \mathbb{R}^2 \to y(x,t) \in \mathbb{R}$. On suppose $h \ll 1$, ce qui revient à considérer dans la suite des fonctions $y(x,t)$ qui varient lentement à l'échelle des sites j. en utilisant un développement de Taylor montrer que (1) donne :

$$\partial_t^2 y_j = h^2 \partial_x^2 y_j + \frac{1}{12} h^4 \partial_x^4 y_j + 2h^3 (\partial_x y_j)\left(\partial_x^2 y_j\right) + O\left(h^5 \left|\partial_x^5 y\right|\right) + O\left(h^5 \left|\partial_x y\right| \left|\partial_x^4 y\right|\right) \quad (3)$$

2. Supposons que l'on ne considère que les deux premiers termes de cette équation $\partial_t^2 y = h^2 \partial_x^2 y$. Montrer que sa solution est

$$y(x,t) = A(x - ht) + B(x + ht)$$

avec $A(x)$, $B(x)$ deux fonctions quelconques appelées "profil". Commentaires ?

3. On considère (3). On pose le changement de fonction

$$\tilde{y}(x,t) := y(x + ht, t) \Leftrightarrow y(x,t) := \tilde{y}(x - ht, t) \quad (4)$$

signification ? Faisons aussi le changement d'échelle et de variable :

$$\tilde{t} := \frac{1}{24} h^3 t, \quad u := \frac{4}{h} \partial_x \tilde{y}.$$

Montrer que l'on obtient l"'**équation de KdV**"

$$\partial_{\tilde{t}} u + \partial_x^3 u + 6u.\partial_x u = 0 \quad (5)$$

Interpréter ces changements de variables par rapport au problème physique de départ.

4. On étudie maintenant l'équation (5). On cherche une solution de la forme

$$u(x,t) = X(x - ct)$$

avec $c \in \mathbb{R}$ arbitraire et $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonction arbitraire appelée "profil". Montrer que (5) donne

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dX}{dx}\right)^2 + V(X) = E \quad (6)$$

avec une fonction $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que l'on explicitera et une constante $E \in \mathbb{R}$.

5. Dans le cas $V(x) = -\frac{c}{2} X^2 + X^3$, montrer que

$$X(x) = \frac{c}{2}\left(\cosh\left(\sqrt{\frac{c}{4}} x\right)\right)^{-2}$$

est solution de (6) appelée **soliton**. Tracer et interpréter graphiquement cette solution. Conclusion sur le problème de départ ?