Université Joseph Fourier. Master 1 Physique.
TD de système dynamiques et chaos. Frédéric Faure.

TD 1. ***Instabilité de Turing en morphogénèse***

1 Instabilité dans le modèle de Swift-Hohenberg

Ce modèle à une dimension concerne une fonction $u(x,t) \in \mathbb{R}$ sur le domaine $x \in \mathbb{R}$ et le temps $t \in \mathbb{R}$. On connait les valeurs $u(x, t = 0)$ pour tout x et son évolution est régit par l'équation de Swift-Hohenberg :

$$(\partial_t u)(x,t) = ru(x,t) - \left(\partial_x^2 + 1\right)^2 u(x,t) - (u(x,t))^3 \tag{1}$$

avec le paramètre $r \in \mathbb{R}$. Ce modèle permet entre entre de décrire l'expérience des **Rouleaux de Rayleih-Bénard** ou les **ondes gravitaire de capillarité**. Voir [1] chap.2.

1. Trouver une solution homogène stationnaire $u(x,t) = p$.
2. Linéariser l'équation (1) près de la solution homogène stationnaire $u = 0$ en supposant $|u(x,t)| \ll 1$. Obtenir une équation aux dérivées partielles à coefficients constants.
3. Résoudre l'équation linéaire du (2) à l'aide de la transformée de Fourier et montrer la stabilité/instabilité des modes de Fourier selon le paramètre $r \in \mathbb{R}$. Au seuil d'instabilité, il apparait une onde $u(x,t)$ ayant quelle fréquence ξ et quelle longueur d'onde λ ?
4. Chercher l'amplitude A de l'onde périodique stationnaire qui apparait près du seuil d'instabilité (i.e. si $|r| \ll 1$) en écrivant $u(x,t) = A\cos(\xi x) + B\cos(3\xi x)$ avec $B \ll A \ll 1$, et reportant dans l'équation (1). Aide : $(\cos x)^3 = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos(3x)$.

2 Instabilité des équations de type réaction-diffusion

On suppose une équation de type réaction diffusion de la forme

$$\partial_t u = f(u) + \mathbb{D}\partial_x^2 u$$

avec $x \in \mathbb{R}$ (une dimension spatiale), $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t)) \in \mathbb{R}^2$ (deux concentrations), $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est la fonction de réaction c'est à dire $f(u) = (f_1(u_1,u_2), f_2(u_1,u_2))$ et $\mathbb{D} = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}$ est la matrice (diagonale) de diffusion avec $D_1, D_2 > 0$ étant les coefficients de diffusion de chaque concentration. On suppose que $f(p) = 0$ avec $p = (p_1, p_2) \in$

$\mathbb{R}^2$, c'est à dire que $u(x,t) = p$ est une solution homogène et stationnaire. Rappel de cours : le mode de Fourier $e^{i\xi x}$ est instable si et seulement si

$$\mathrm{Tr}\left(\mathbb{A}\left(\xi\right)\right) > 0 \text{ ou } \det\left(\mathbb{A}\left(\xi\right)\right) < 0,$$

avec la matrice 2×2

$$\mathbb{A}\left(\xi\right) := \mathbb{A} - \xi^2 \mathbb{D}$$

où $\mathbb{A} := \left(a_{ij}\right)_{i,j=1,2} := Df\left(p\right)$ est la matrice différentielle de f en $u = p$. Supposons que le mode homogène (i.e. avec $\xi = 0$) est stable en l'absence de diffusion (i.e. si $\mathbb{D} = 0$).

1. Montrer que en augmentant D_1, D_2 (et supposant $D_2 \geq D_1$), il apparait une première instabilité pour un certain mode $\xi_c \in \mathbb{R}$ si et seulement on a la condition appelée “condition d'instabilité de Turing” :

$$D_1 a_{22} + D_2 a_{11} = 2\sqrt{D_1 D_2 \det\left(\mathbb{A}\right)}$$

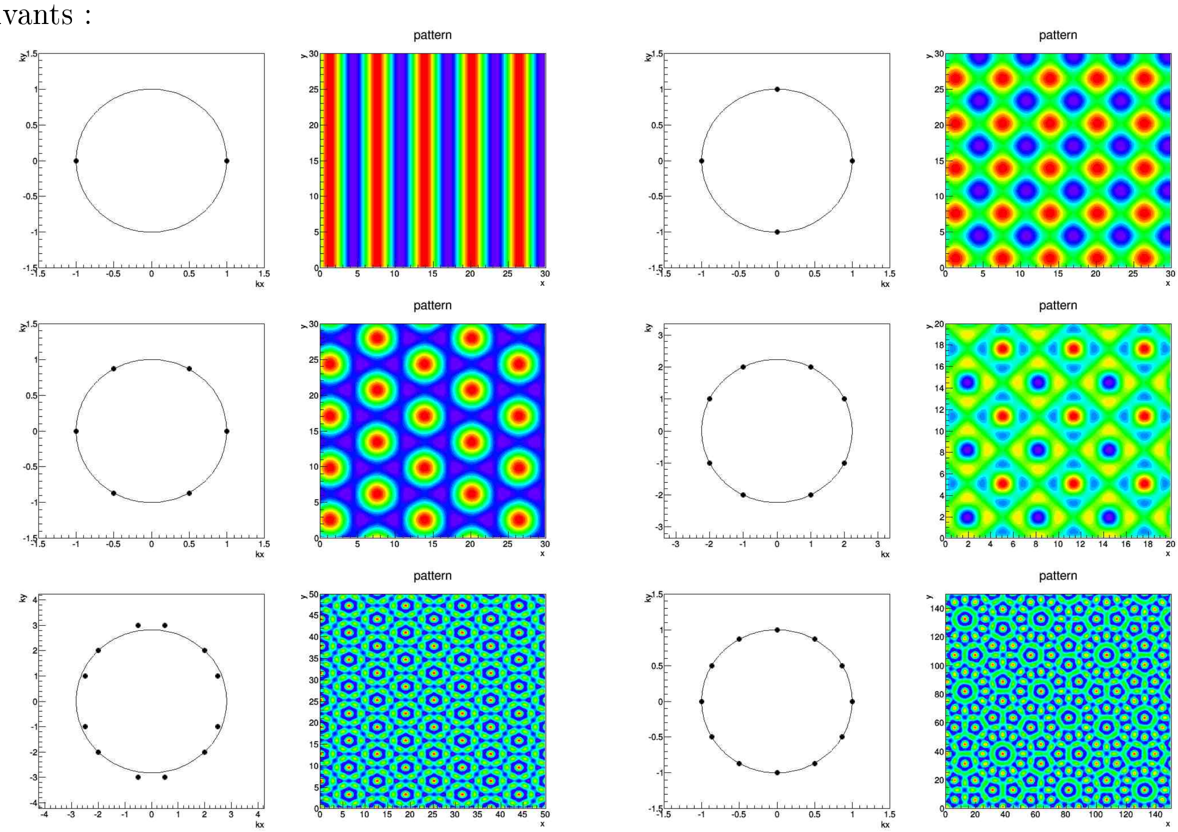
   et alors $\xi_c = \pm \left(\frac{\det(\mathbb{A})}{D_1 D_2}\right)^{1/4}$ donnant l'instabilité d'un pattern dont la longueur d'onde est $\lambda_c = \frac{2\pi}{\xi_c}$.
2. Montrer que cela implique $a_{11} > 0$, $a_{22} < 0$ et $D_2 - D_1$ assez grand, c'est à dire que la diffusion doit être anisotrope.

3 Motifs en dimension deux

On considère une fonction sur le plan $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ qui est une superposition de modes de Fouriers ("ondes planes") :

$$u\left(\vec{x}\right) = \sum_{i=1}^{N} \exp\left(i\vec{k}_i.\vec{x}\right)$$

avec $\vec{k}_i \in \mathbb{R}^2$ vecteur d'onde. Expliquer le motif de $u\left(\vec{x}\right)$ obtenu (échelle bleu =max, rouge = min) à partir du choix des vecteurs des vecteurs $\vec{k}_i$ (points noirs) dans les six exemples suivants :



Lequel de ces motifs n'est pas périodique mais **quasi-périodique** ?
Aide :

— réseau périodique $\Leftrightarrow \exists \vec{a}, \vec{b}$ t.q. $\vec{k}_i = n\vec{a} + m\vec{b}$ avec $m, n \in \mathbb{Z}^2$. On appelle $\Lambda = \mathbb{Z}\vec{a} + \mathbb{Z}\vec{b}$ le réseau dual.

— réseau quasi-périodique $\Leftrightarrow$ l'ensemble des $\vec{k}_i$ est discret.

References

[1] Michael Cross and Henry Greenside. *Pattern formation and dynamics in nonequilibrium systems.* Cambridge University Press, 2009.