Université Joseph Fourier. Master 1 Physique.
TD de système dynamiques et chaos. Frédéric Faure.

TD. ***Rouleaux de convections de Rayleigh-Bénard. Equations de Lorenz.***

Les questions (*) sont indépendantes des précédentes.

Dans un article historique, Lorenz a établi en 1963 un modèle atmosphérique très simplifié qui possède "une forte sensibilité aux conditions initiales". Cette propriété explique le comportement "chaotique" des solutions du modèle. Dans ce TD nous obtenons ce modèle. Comme aide, on peut utiliser ces notes de cours, chapitre "modèle de Lorenz".

Voir Figure 1. On considère un fluide dans une couche d'épaisseur h c'est à dire dans le domaine $(x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, h]$. On va supposer que les phénomènes sont indépendants de la variable y. Dans cette couche on veut étudier la dynamique du **champ de température** $T(x, z, t) \in \mathbb{R}$ et du **champ de vitesse** $\vec{v}(x, z, t) = (v_x, v_z) \in \mathbb{R}^2$.

Sur la surface inférieure $z = 0$, on impose à tout instant $t \in \mathbb{R}$, la valeur $T(x, z = 0, t) = T_0$ et sur la surface supérieure $z = h$, on impose $T(x, z = h, t) = T_0 - \delta T$ avec une différence de température $\delta T \in \mathbb{R}$ donnée.

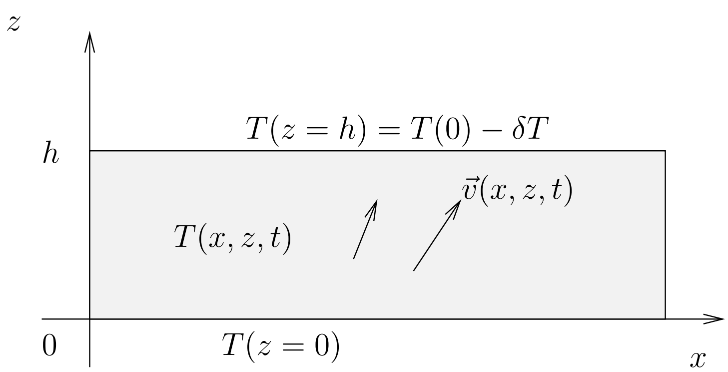

FIGURE 1 – Modèle de Rayleigh.

1 Equations de Saltzmann

1. Si $\rho(x, z, t) \in \mathbb{R}$ est la densité (masse volumique), $\vec{g} = (0, -g) \in \mathbb{R}^2$ est l'accélération de la pesanteur ($g = 9.8m/s^2$), $p(x, z, t)$ est le champ de pression, $\mu > 0$ est la viscosité, Ecrire l'équation de Navier Stokes qui découle de la loi de Newton et exprime que le fluide est soumis à son poids, aux forces de pression et aux forces de cisaillement.
2. (*) Si $\mathcal{D} > 0$ est le coefficient de diffusion thermique, écrire l'équation de la chaleur (loi de Fourier) qui exprime que l'énergie thermique diffuse du chaud vers le froid.

3. Montrer que le changement de variable suivant

$$x' = \frac{1}{h}x, \quad z' = \frac{1}{h}z, \quad t' = \frac{\mathcal{D}}{h^2}t,$$

donne des variables sans dimension. Ecrire l'expression de la vitesse sans dimension $\vec{v}'$ à partir de $\vec{v}$. Dans la suite, on oublie les '.

4. On introduit une fonction courant $\psi(x, z, t)$ telle que

$$\vec{v} = (v_x, v_z) = (\partial_z \psi, -\partial_x \psi)$$

. On introduit $\theta(x, z, t)$ définit par

$$T(x, z, t) = (T_0 - z\delta T) + \delta T\, \theta(x, z, t)$$

et qui représente les fluctuations de températures par rapport au profil linéaire. Montrer que les équations de Navier-Stokes et de la chaleur donnent les équations suivantes de Saltzmann [1]

$$\partial_t \Delta\psi + \{\Delta\psi, \psi\} - R\sigma\partial_x\theta - \sigma\Delta^2\psi = 0. \quad (1)$$

$$\partial_t \theta - \{\psi, \theta\} + \partial_x\psi - \Delta\theta = 0. \quad (2)$$

avec le nombre de Rayleigh $R := \frac{\alpha g h^3 \rho_0 \delta T}{\mu \mathcal{D}}$ et le nombre de Prandtl $\sigma := \frac{\mu}{\rho_0 \mathcal{D}}$ et $\rho_0 := \rho(T_0)$, $\alpha := -\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{d\rho}{dT}\right)(T_0) > 0$ est le coefficient d'expansion thermique. Rem : on utilisera α que dans le terme de gravité (approx. de Boussinesq).

2 Modèle de Lorenz

On suppose à priori que le fluide a une structure périodique en x de période a. Cela signifie que les fonctions $\psi(x, z, t)$ et $\theta(x, z, t)$ sont périodiques en x de période a. On trouvera la valeur de a à la fin du calcul. Cette périodicité se justifie dans le cadre de l'étude de la morphogénèse. Voir Figure 2.

On peut développer les fonctions ψ et θ en modes de Fourier selon x, z. **Lorenz a décidé de ne considérer que les trois modes de plus basse fréquence** en posant :

$$\psi(x, z, t) := \tilde{X}(t) \sin(\pi z) \sin\left(2\pi \frac{x}{a}\right), \quad (3)$$

$$\theta(x, z, t) := \tilde{Y}(t) \sin(\pi z) \cos\left(2\pi \frac{x}{a}\right) - \tilde{Z}(t) \sin(2\pi z)$$

où $\tilde{X}(t), \tilde{Y}(t), \tilde{Z}(t), a \in \mathbb{R}$ sont maintenant les inconnues du problème.

1. où

$$\{A, B\} := \partial_x A \partial_z B - \partial_z A \partial_x B$$

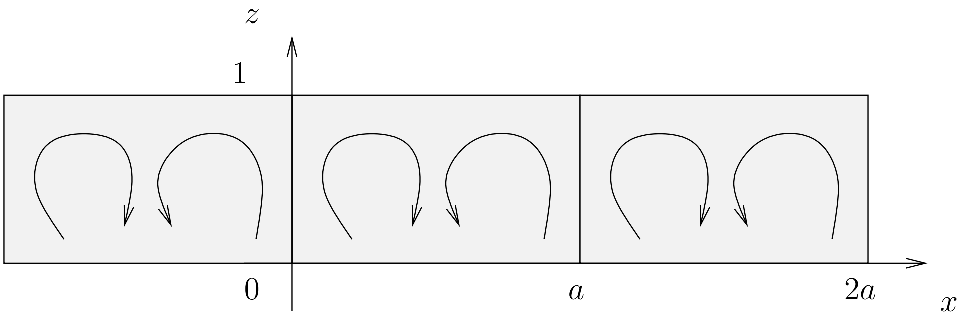

FIGURE 2 – Structure du fluide périodique en x.

1. (*) Montrer que ce choix est compatible avec les conditions aux bords qui sont de température constante donc $\theta(z=0,1)=0$ et vitesse verticale et force de cisaillement nulles $v_z(z=0,1)=\partial_x\psi(z=0,1)=0$, $\partial_z v_x(z=0,1)=\partial_z^2\psi(z=0,1)=0$. Sinon, ce choix de Lorenz n'est pas justifié, il n'est pas correct rigoureusement.
2. (*) Montrer que les équations (1) donnent

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{X}}{d\tilde{t}} &= -\sigma\pi^2\left(1+\frac{4}{a^2}\right)\tilde{X}+\frac{2R\sigma}{a\pi\left(1+\frac{4}{a^2}\right)}\tilde{Y}\\
\frac{d\tilde{Y}}{d\tilde{t}} &= \left(\frac{2\pi}{a}\right)\tilde{X}-\pi^2\left(1+\frac{4}{a^2}\right)\tilde{Y}-\frac{2\pi^2}{a}\tilde{X}\tilde{Z}\\
\frac{d\tilde{Z}}{d\tilde{t}} &= -(2\pi)^2\tilde{Z}+\frac{\pi^2}{a}\tilde{X}\tilde{Y}
\end{aligned}$$

3. (*) Afin de simplifier cette expression on fait le changement d'échelle $\left(\tilde{t},\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z}\right)\Leftrightarrow(t,X,Y,Z)$ donné par :

$$\tilde{t}=\alpha t,\quad \tilde{X}=\beta X,\quad \tilde{Y}=\gamma Y,\qquad \tilde{Z}=\delta Z,$$

avec des coefficients $\alpha,\beta,\gamma,\delta>0$ que l'on recherche. Monter que l'on obtient les équations de Lorenz

$$\begin{aligned}
\frac{dX}{dt} &= \sigma(-X+Y)\\
\frac{dY}{dt} &= rX-Y-XZ\\
\frac{dZ}{dt} &= XY-bZ
\end{aligned}\tag{4}$$

avec des paramètres que l'on exprimera en fonction de a,R,σ.
4. (*) Trouver les points fixes du champ de vecteur (4) et étudier leur stabilité selon les paramètres σ,r,b.

5. (*) En particulier écrire la condition sur R, a pour que $(X, Y, Z) = (0, 0, 0)$ soit un point fixe instable. Pour quelle valeur minimale de R et quelle valeur de la période a a t-on cette instabilité ?
6. (*) Optionel : en langage informatique python ou C++, résoudre numériquement les équations de Lorenz, et faire une animation du point (x, y, z). Observer l'attracteur étrange. Dans son article de 1963, Lorenz a étudié ces équations pour les paramètres $\sigma = 10$, $r = 28$, $b = 8/3$. Faire une animation du champ de température. Aide.