Université Joseph Fourier. Master 1 Physique.
TD de système dynamiques et chaos. Frédéric Faure.

---

TD. ***Application logistique et fractale de Mandelbrot***

---

L'application logistique est un modèle introduit par Pierre-François Verhulst (1838) pour modéliser simplement une **dynamique de population** en biologie. Il a ensuite été étudié pour ses aspects chaotiques. En particulier son diagramme de phase appelé "ensemble de Mandelbrot", a été présenté au grand public en 1985 comme « l'objet mathématique le plus complexe jamais découvert », et a permis de découvrir les "fractales".

# 1 Application logistique

1. En biologie des populations, si $x_n \geq 0$ désigne le nombre d'individus (en unité de million d'individus) le jour $n$, on suppose que le jour suivant il y a $x_{n+1} = \alpha x_n$ individus avec $\alpha \geq 0$. Exprimer $x_n$ en fonction de $x_0$ et $\alpha$ et déduire $\lim_{n\to\infty} x_n$.
2. Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ fixés, on considère la fonction $f(x) = \alpha x + \beta$ et le système dynamique $x_{n+1} = f(x_n)$.
   (a) Tracer le graphe de $f$ et pour une valeur initiale $x_0 \in \mathbb{R}$ tracer les premiers points $x_{n\geq 0}$. Trouver le point fixe $f(a) = a$ et discuter leur stabilité.
   (b) Exprimer $x_n$ en fonction de $x_0$ et $n$. Discuter la limite de $x_n$ pour $n \to \infty$ en fonction de $\alpha, \beta$.
3. Pour être plus "réaliste", on suppose que le facteur de reproduction $\alpha$ dépend du nombre d'individus $x$ et décroit avec $x$. Par exemple on suppose $0 \leq x \leq 1$ et $\alpha(x) = \mu(1-x)$ avec $\mu > 0$ un paramètre fixé. Cela représente le fait que trop d'individus implique un manque de ressources et donc une baisse du facteur de reproduction. La loi obtenue est
$$x_{n+1} = \alpha(x_n) \cdot x_n = \mu x_n (1 - x_n) = f(x_n)$$
   avec l'**application logistique**
$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \to \mu x (1-x) \end{cases}$$
   Tracer le graphe de $f$ dans l'intervalle $x \in [0,1]$. Trouver le(s) point(s) fixe(s) $a = f(a)$ et discuter leur stabilité (en linéarisant $f$) en fonction de $\mu$. Commenter la figure 1.
4. On pose $\mu = 3 + \epsilon$ et $x = a + y$. On suppose $\epsilon \ll 1$, $y \ll 1$. Trouver les points fixes de $b = f(f(b))$ (i.e. les points périodiques de $f$ de période deux) et discuter leur stabilité en fonction de $\epsilon$. Tracer le graphe $b(\mu)$ appelé **diagramme de bifurcation**.
5. Par définition, l'**ensemble attracteur** $\mathcal{A}$ pour l'application $f$ est l'adhérence[1] des trajectoires $(x_n)_n$, partant de toute condition initiale $x_0 \in [0,1]$. L'**ensemble répulsif** de $f$ est l'ensemble attracteur pour l'application inverse $f^{-1}$. Commenter la figure 2.

# 2 Fractale de Mandelbrot

L'application logistique $x_{n+1} = f(x_n) = \mu x_n (1 - x_n)$ est un polynome, il est donc possible de considérer cette formule avec des paramètres complexes $x \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathbb{C}$. Trouver le changement de variables $\mu \to c$, $x \to z$ convenable afon d'obtenir la formule (+simple) $z_{n+1} = z_n^2 + c$.

L'ensemble de Mandelbrot est l'ensemble des valeurs de $c \in \mathbb{C}$ t.q. toute condition initiale $z_0 \in \mathbb{C}$ s'échappe vers $\infty$. C'est à dire qu'il n'y a pas (ou plus) d'attracteur. On peut montrer qu'il suffit que $z_0 = 0$ s'échappe à l'$\infty$. Voir figure 3. Référence : Devanney "Chaotic dynamical systems".

1. En mathématique, l'adhérence d'une suite $x_n$ sont les points $x$ près duquel s'accumulent une infinité de termes de la suite.

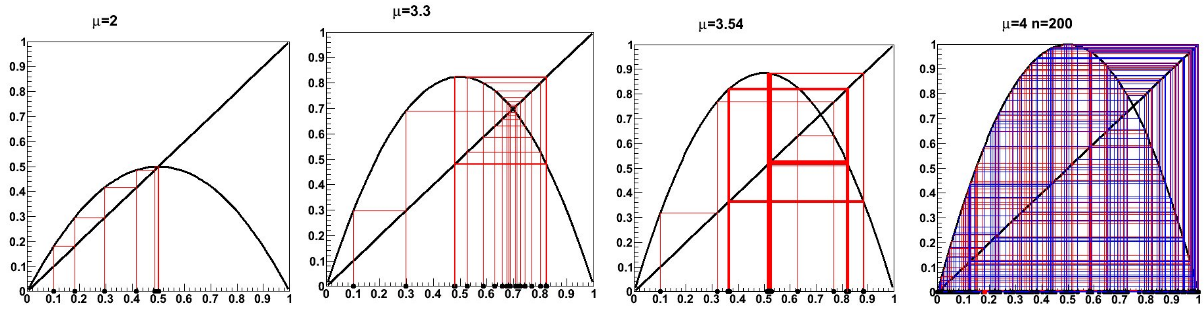


FIGURE 1 – Dessin d'une trajectoire partant de $x_0 = 0.1$, pour différentes valeurs de $\mu$. On observe que la trajectoire converge vers un point (si $\mu = 2$), ou une séquence de 2 points (si $\mu = 3.3$) ou une séquence de 4 points (si $\mu = 3.54$). Cet attracteur ne dépend pas du point initial. Pour $\mu = 4$, la trajectoire a un comportement "chaotique" sur tout l'intervalle $[0, 1]$.

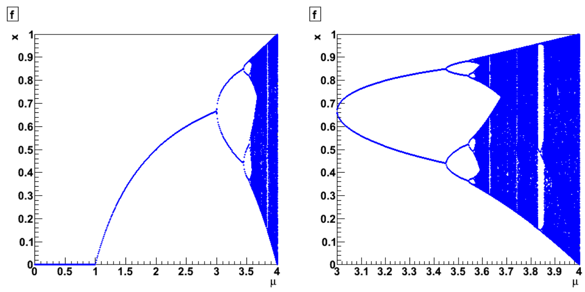


FIGURE 2 – Dessin de l'ensemble attracteur de $f$ en fonction de $\mu$. (L'image de droite détaille l'intervalle $\mu \in [3, 4]$).

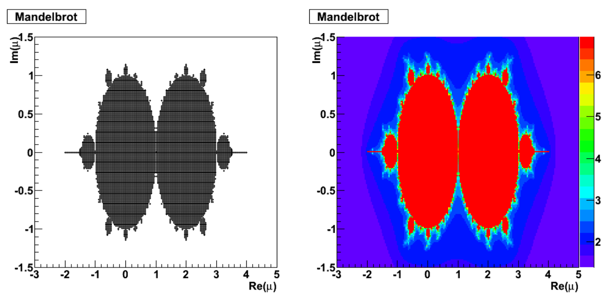


FIGURE 3 – Ensemble de Mandelbrot $\mathcal{M}$ pour l'application logistique (en noir à gauche et rouge à droite). Sur la figure de droite, les couleurs sont $\log \tau(\mu)$ où $\tau(\mu) := \max\left\{n, \text{ t.q. } \left|f_\mu^n\left(\frac{1}{2}\right)\right| < 10^3\right\}$ est le "temps d'échappement".