Modèle de réaction - diffusion en écologie des populations

(I) Modèle local c'est à dire en un lieu de l'espace.

(1) l'information est :

si $v_1 = 5$ et $v_2 = 0$ alors

$$\frac{dv_1}{dt} = 5 \quad \text{et} \quad \frac{dv_2}{dt} = 1$$

si $v_1 = 0$ et $v_2 = 1$ alors

$$\frac{dv_1}{dt} = -10 \quad \text{et} \quad \frac{dv_2}{dt} = -\mu$$

avec le modèle : $v = (v_1, v_2)$,

$$\begin{cases} \dfrac{dv_1}{dt} = a_{11} v_1 + a_{12} v_2 \\ \dfrac{dv_2}{dt} = a_{21} v_1 + a_{22} v_2 \end{cases}$$

on déduit : $\begin{cases} a_{11} = 1, & a_{12} = -10 \\ a_{21} = \frac{1}{5}, & a_{22} = -\mu \end{cases}$

Scanned by CamScanner

(2) On a vu en cours que si $\frac{dv}{dt} = A v$

alors

on a <u>stabilité</u> cad $v(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$

$\Leftrightarrow$ valeurs propres de A sont τ_+, τ_- avec

$Re(\tau_+) < 0$ et $Re(\tau_-) < 0$

$\Leftrightarrow$ $Tr(A) < 0$ et $\det(A) > 0$.

or $Tr(A) = a_{11} + a_{22} = 1 - \mu$

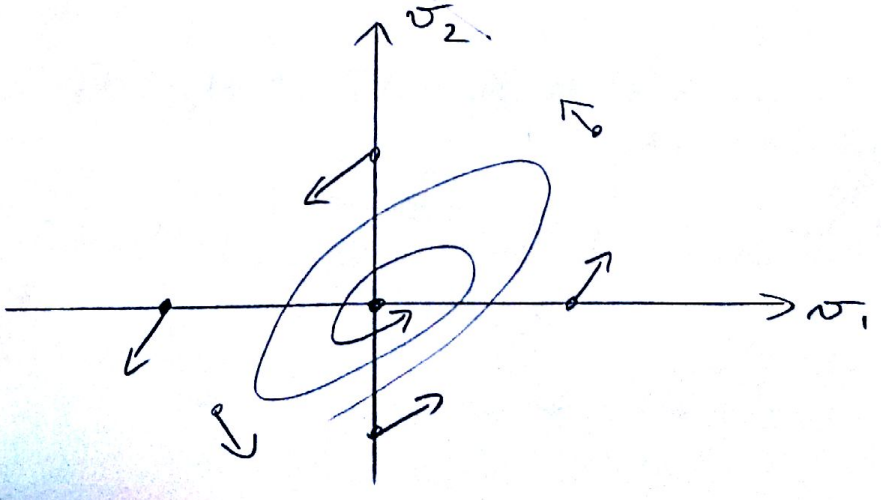
$\det(A) = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} = -\mu + 2$

donc stabilité $\Leftrightarrow$ $1 - \mu < 0$ et $-\mu + 2 > 0$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{1 < \mu < 2}$

(3) Dans le modèle linéaire précédent $\frac{dv}{dt} = Av = F(v)$

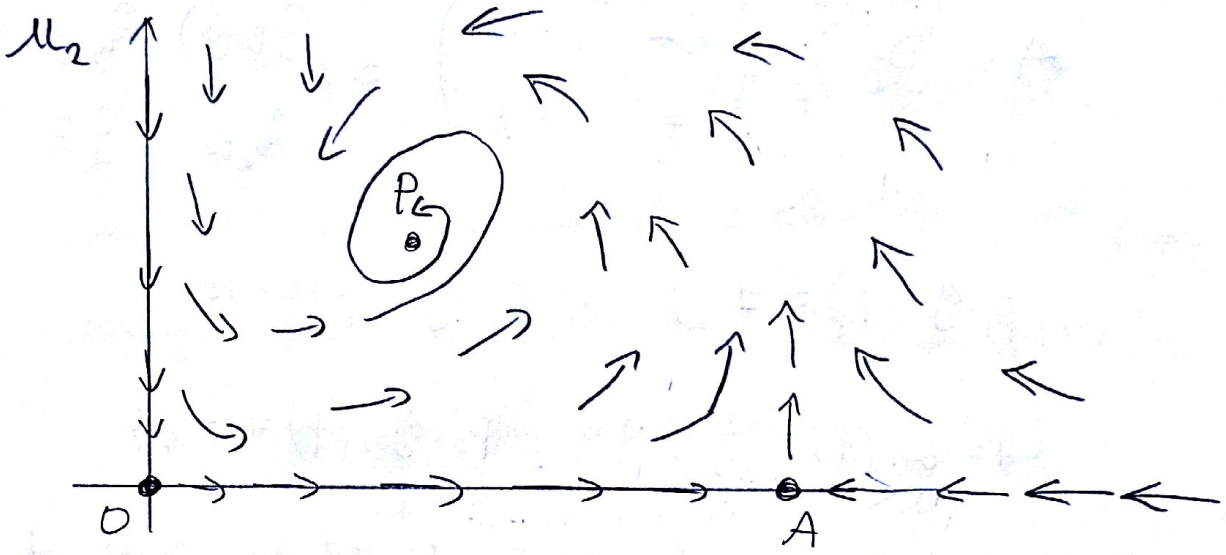
on interprète $F(v) = Av$ comme un champ de vecteurs "linéaire" dont voici l'allure :



Scanned by CamScanner

• ce champ de vecteur n'est pas réaliste si $|v|$ est grand

Voici un champ de vecteur "réaliste" dans le plan (u_1, u_2) avec $u_1 \geq 0$, $u_2 \geq 0$:



il y a 3 points fixes : O
P
et A qui correspond à une population constituée uniquement de souris.

<u>equation</u> : $\frac{du}{dt} = f(u) \iff \begin{cases} \frac{du_1}{dt} = f_1(u_1, u_2) \\ \frac{du_2}{dt} = f_2(u_1, u_2) \end{cases}$

noter que $\begin{cases} \text{si } u_1 = 0 \text{ alors } f_1 = 0 \\ \text{si } u_2 = 0 \text{ alors } f_2 = 0 \end{cases}$

Comme $f(O) = 0$, $f(P) = 0$, $f(A) = 0$,

il est naturel de proposer la formule :

Scanned by CamScanner

$$\begin{cases} f_1(u_1,u_2) = u_1 \cdot \left(g_{11}(u)\,(u_1 - p_1) + g_{12}(u)(u_2 - p_2) \right) \\ f_2(u_1,u_2) = u_2 \cdot \left(g_{21}(u)\,(u_1 - p_1) + g_{22}(u)\cdot(u_2 - p_2) \right) \end{cases}$$

avec des fonctions $g_{jk}(u_1,u_2)$ que l'on peut construire d'après la contrainte :

$$A = (Df)_p = \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ \frac{1}{5} & -\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{u_1} f_1(p) & \partial_{u_2} f_1 \\ \partial_{u_2} f_2 & \partial_{u_2} f_2 \end{pmatrix}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} p_1 \cdot g_{11}(p) = 1 \; ; & p_1 \cdot g_{12}(p) = -10 \\ p_2\, g_{21}(p) = \frac{1}{5} \; ; & p_2 \cdot g_{22}(p) = -\mu \end{cases}$$

et de même pour le point o et le point A.

Scanned by CamScanner

II Diffusion en espace

① L'équation

$$\frac{dv_k}{dt}(x_j) = d_k \left(v_k(x_{j+1}) - v_k(x_j) \right) + d_k \left(v_k(x_{j-1}) - v_k(x_j) \right)$$

pour $k = 1$ (souris) ou $k = 2$ chouettes, et $d_k > 0$, signifie que une différence $v_k(x_{j+1}) > v_k(x_j)$ va augmenter la population $v_k(x_j)$ et de même si $v_k(x_{j-1}) > v_k(x_j)$ (et inversement diminuer si $v_k(x_{j+1}) < v_k(x_j)$).

De proche en proche, une forte valeur en x_j va diffuser sur les sites voisins.

$d_1 = 1 < d_2 = 50$ signifie que la population de chouettes diffuse plus vite, car ils se déplacent plus vite.

Scanned by CamScanner

(2) Limite du continuum

on suppose $x_{j+1} - x_j = \delta$: pas spatial,

et $v_k(x_j)$ "varie peu" en fonction de x_j ;

Ainsi : $v_k(x_{j+1}) = v_k(x_j + \delta)$

$$= v_k(x_j) + \delta\, \partial_x v_k + \frac{1}{2}\delta^2 (\partial_x^2 v_k) + O(\delta^3)$$

(Taylor)

$$v_k(x_{j-1}) = v_k(x_j - \delta)$$

$$= v_k(x_j) - \delta (\partial_x v_k) + \frac{1}{2}\delta^2 (\partial_x^2 v_k) + O(\delta^3)$$

donc

$$\frac{\partial v_k}{\partial t}(x_j, t) = d_k \left(v_k(x_{j+1}) - v_k(x_j) \right) + d_k \left(v_k(x_{j-1}) - v_k(x_j) \right)$$

$$= d_k \, \delta^2 (\partial_x^2 v_k)(x_j) + O(\delta^3)$$

$$= D_k \cdot (\partial_x^2 v_k)(x_j) + O(\delta^3)$$

$\Leftrightarrow$

$$\boxed{\frac{dv}{dt} = \mathbb{D}\, \partial_x^2 v,} \quad \mathbb{D} = (D_1, D_2), \quad D_k = d_k \delta^2 : \text{"coefficient de diffusion"}.$$

c'est "l'équation de la chaleur", une EDP linéaire à coef. constants, que l'on résout par la transf. de Fourier en x :

$$v_k(x,t) := \frac{1}{(\sqrt{2\pi})} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x}\, \tilde{v}_k(\xi, t)\, d\xi$$

Scanned by CamScanner

qui donne :

$$\frac{\partial \tilde{v}_k(\xi,t)}{\partial t} = -D_k \xi^2 \tilde{v}_k(\xi,t)$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{v}_k(\xi,t) = \tilde{v}_k(\xi,0)\, e^{-D_k \cdot \xi^2 \cdot t}$$

$$\xrightarrow[t\to\infty]{} 0 \quad : \text{si } \xi \neq 0$$

ainsi tous les modes de Fourier s'atténue sauf celui $\xi = 0$:

$$v_k(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x}\, e^{-D_k \xi^2 t}\, \tilde{v}_k(\xi,0)\, d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \iint e^{i\xi x}\, e^{-D_k \xi^2 t}\, e^{-i\xi y}\, v_k(y,0)\, dy\, d\xi$$

or on a l'intégrale Gaussienne :

$$\int e^{i\xi(x-y)}\, e^{-D_k \xi^2 t}\, d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{D_k t}}\, e^{-\frac{(y-x)^2}{4 D_k t}}$$

car $$\int_{\mathbb{R}} e^{-(Ax^2+Bx)}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{A}}\, e^{\frac{B^2}{4A}}$$

ici $A = D_k t$, $B = i(y-x)$, $\frac{B^2}{4A} = -\frac{(y-x)^2}{4 D_k t}$

donc

$$\boxed{v_k(x,t) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{D_k t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(y-x)^2}{4 D_k t}}\, v_k(y,0)\, dy}$$

Scanned by CamScanner

c'est à dire convolution de $v_k(y,0)$ par une Gaussienne de largeur $\sim \sqrt{D_k t}$.

Cela signifie que la population se moyennise spatialement, s'uniformise,

ainsi $\phi_t(y) := \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{D_k t}} \, e^{-\frac{y^2}{4 D_k t}}$,

ona $v_k(t) = (\phi_t * v(0))$

produit de convolution

et $\int \phi_t(y)\, dy = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{D_k t}} \int e^{\frac{-y^2}{4 D_k t}} dy$

$=$ intégrale Gaussienne $\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{D_k t}} \sqrt{\pi 4 D_k t}$

$= 1$.

Scanned by CamScanner

III Réaction locale et Diffusion

$$\frac{du}{dt} = f(u) + D\partial_x^2 u$$

avec $u = p + v$, $p \in \mathbb{R}^2$: point fixe,

donc $$\frac{dv}{dt} = f(p+v) + D\partial_x^2 v$$

Comme en cours, on suppose $|v| \ll 1$,

donc $$f(p+v) = \underbrace{f(p)}_{0} + \underbrace{(Df)(p)}_{A} \cdot v + O(v^2)$$

$$= Av$$

donnant l'EDP linéarisé :

$$\frac{dv}{dt} = Av + D\partial_x^2 v$$

On a $\mathrm{Tr}\,A < 0$ et $\det A > 0$: stabilité du mode $\xi = 0$,

et on applique le théorème de Turing (vu en cours)

qui dit que il y a des modes instables ssi :

$$\gamma a_{11} + a_{22} - 2\sqrt{\gamma}\sqrt{\det A} > 0$$

avec $\gamma := \frac{D_2}{D_1} > 0$

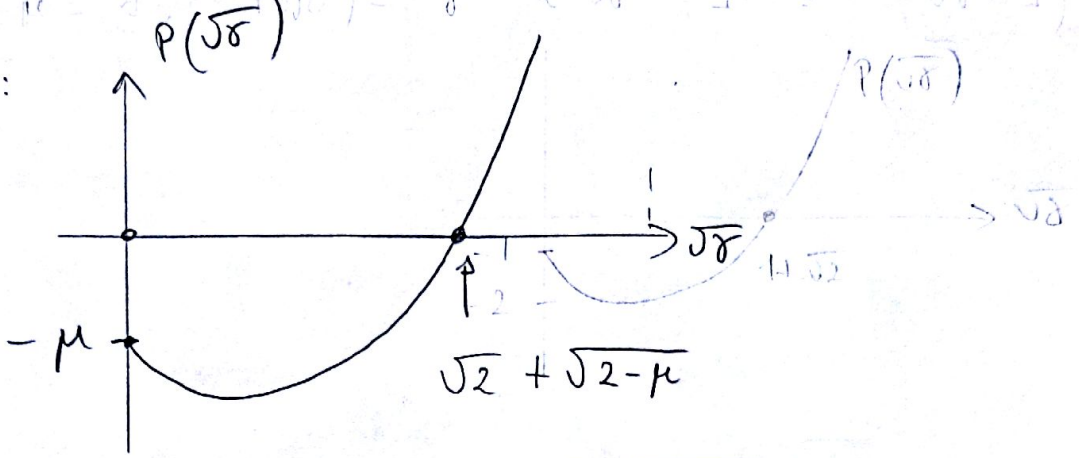
$$P(\sqrt{\gamma}) := \gamma - \mu - 2\sqrt{\gamma}\sqrt{2-\mu} > 0$$

: polynôme du second degré

Scanned by CamScanner

• rappel : $1 < \mu < 2$ et $\gamma > 0$,

graphe :



donc $P(\sqrt{\gamma}) > 0 \iff \boxed{\gamma > \sqrt{2} + \sqrt{2-\mu}}$

: condition d'instabilité.

avec $\gamma = \frac{D_2}{D_1} = \frac{d_2}{d_1}$.

La condition est vérifiée si $\frac{d_2}{d_1} = 50 = \gamma$.

② La longueur d'onde au seuil d'instabilité est

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{\xi_c} = \delta \cdot 2\pi \left(\frac{d_1 d_2}{2-\mu}\right)^{1/4}$$

avec $\xi_c = \left(\frac{\det A}{D_1 D_2}\right)^{1/4} = \left(\frac{2-\mu}{d_1 d_2 \delta^4}\right)^{1/4} = \left(\frac{2-\mu}{d_1 d_2}\right)^{1/4} \cdot \frac{1}{\delta}$

Application numérique : $2 - \mu = 0.5$,

$d_1 = 1$, $d_2 = 50$,

donne :

$\lambda_c \simeq 20 \cdot \delta \simeq 2$ km.

Scanned by CamScanner