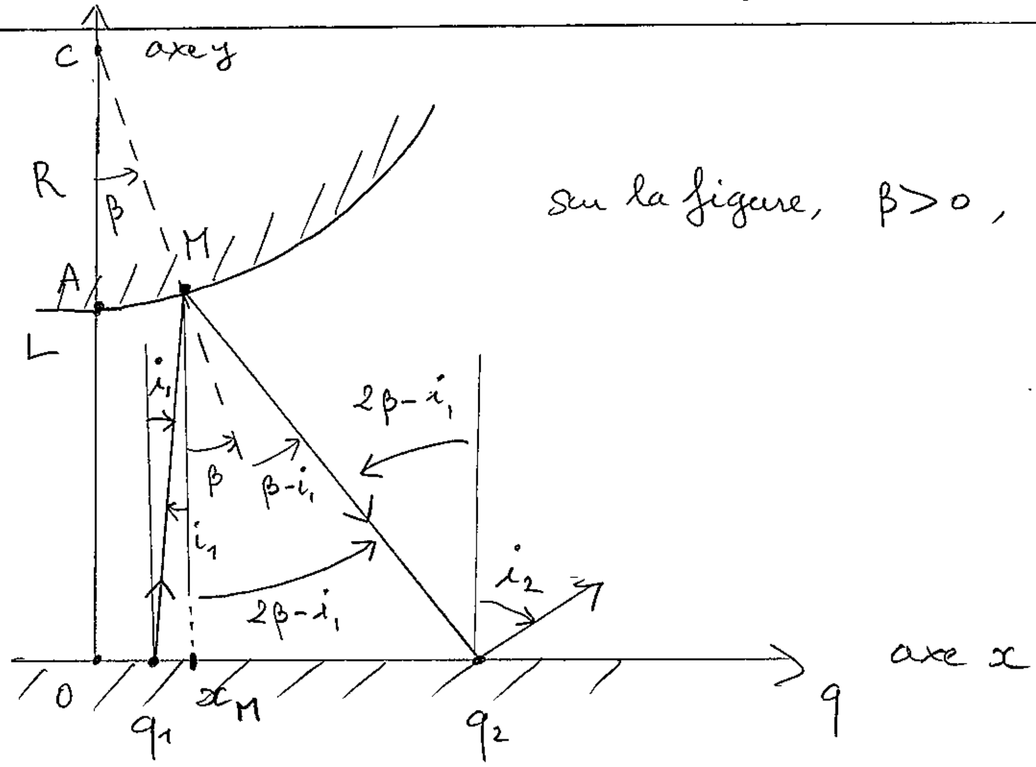
Exercice : Stabilité d'une trajectoire verticale



sur la figure, $\beta > 0$, $i_1 < 0$

La trajectoire OA verticale est périodique.

Soit $q_1 \ll 1$ et angle $i_1 \ll 1$.

On cherche q_2 et i_2 au 1er ordre. On appelle M le point de rebond.

D'après la figure, on a : $\quad i_2 = -(2\beta - i_1) = i_1 - 2\beta$

avec $\quad \beta = \text{angle}\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CM}\right)$

Au premier ordre, on a $\begin{cases} x_M = R\sin(\beta) \simeq R\beta \\ y_M \simeq L \end{cases}$

et aussi $\quad x_M \simeq q_1 - L\sin(i_1) \simeq q_1 - L i_1$

et $\quad q_2 \simeq x_M + L\sin(2\beta - i_1) \simeq x_M + L(2\beta - i_1) = q_1 - 2L i_1 + 2L\beta$

donc $\quad \beta = \dfrac{x_M}{R} = \dfrac{1}{R}(q_1 - L i_1)$

$$i_2 = i_1 - 2\beta = i_1 - \frac{2}{R}(q_1 - L i_1) = i_1\left(1 + \frac{2L}{R}\right) - \frac{2}{R} q_1$$

$$q_2 = q_1 - 2L i_1 + L\left(\frac{2}{R}(q_1 - L i_1)\right) = q_1\left(1 + \frac{2L}{R}\right) - 2 i_1 L\left(1 + \frac{L}{R}\right)$$

or $p = \sin(i) \simeq i$

donc
$$\begin{cases} p_2 \simeq i_2 = p_1 \left(1 + \frac{2L}{R}\right) - \frac{2}{R} q_1 \\ q_2 = q_1\left(1 + \frac{2L}{R}\right) - p_1 2L \left(1 + \frac{L}{R}\right) \end{cases}$$

soit $\begin{pmatrix} q_2 \\ p_2 \end{pmatrix} = DM \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \end{pmatrix}$

avec
$$DM = \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{2L}{R}\right) & -2L\left(1 + \frac{L}{R}\right) \\ -\frac{2}{R} & \left(1 + \frac{2L}{R}\right) \end{bmatrix}$$

(2) on a
$$\mathrm{Det}(DM) = \left(1 + \frac{2L}{R}\right)^2 - \frac{4L}{R}\left(1 + \frac{L}{R}\right)$$
$$= 1 + \cancel{\frac{4L}{R}} + \cancel{\frac{4L^2}{R^2}} - \cancel{\frac{4L}{R}} - \cancel{\frac{4L^2}{R^2}} = 1$$

comme attendu (th. de Liouville pour l'applic. de Poincaré)

Soit $T = \mathrm{Tr}(DM) = 2\left(1 + \frac{2L}{R}\right) = 2 + \frac{4L}{R}$

Rappel :

Les valeurs propres d'une matrice 2×2 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

est solution de
$$0 = \Delta(\lambda) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{pmatrix}$$
$$= (\lambda - a)(\lambda - d) - bc = \lambda^2 - (a+d)\lambda - bc + ad$$
$$= \lambda^2 - T\cdot\lambda + D$$

avec $D = \mathrm{Det}(A)$, $T = \mathrm{Tr}(A)$

Ici $\operatorname{Det}(DM) = 1$, donc

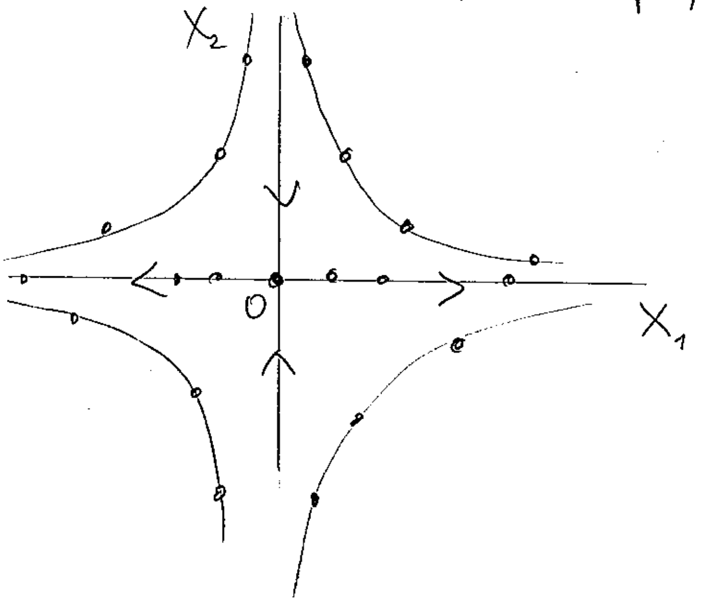
λ est solution de $\lambda^2 - T\lambda + 1 = 0$

$\rightarrow$ valeurs propres : $\lambda_\pm = \dfrac{T \pm \sqrt{T^2 - 4}}{2}$

on a $T^2 - 4 = 4\left(\frac{L}{R}\left(1+\frac{L}{R}\right)\right)^{1/2} \geqslant 0$.

on a
$$1 = \operatorname{Det}(DM) = \lambda_+ \cdot \lambda_-$$
donc
$$0 < \lambda_- < 1 < \lambda_+$$

Donc dans les axes des vecteurs propres, on a :



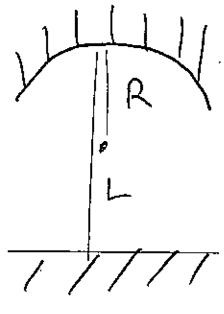
$$\begin{cases} X_1(n) = \lambda_+^n \cdot X_1(0) \to \infty \\ X_2(n) = \lambda_-^n \cdot X_2(0) \to 0 \end{cases}$$

$$X_1(n) \cdot X_2(n) = (\underbrace{\lambda_+ \lambda_-}_{1})^n X_1(0) X_2(0) = X_1(0)\, X_2(0) = \text{cte}$$

$\rightarrow (X_1, X_2) \in$ hyperbole

L'orbite (OA) est donc <u>instable</u> (hyperbolique).

- Le cas $R < 0$ correspond à une courbure inversée :



Il y a instabilité $\iff T^2 - 4 > 0$

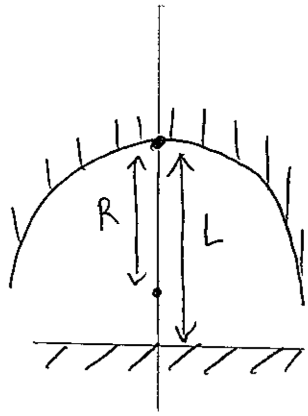
$\iff \frac{L}{R}\left(1 + \frac{L}{R}\right) > 0$

dans le cas $R, L > 0$ c'est toujours vérifié,

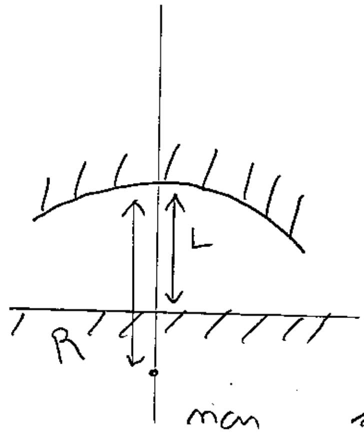
mais dans le cas $R < 0$, $|R| = (-R)$

cela donne $1 - \frac{L}{(-R)} < 0 \iff |R| < L$

cad :

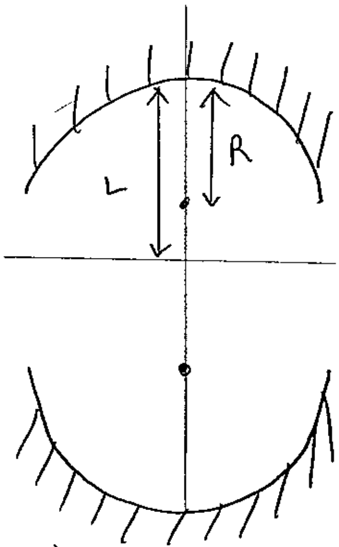


<u>instable</u> si $L > R$
hyperbolique



non si $L < R$
hyperbolique

(3) Pour traiter le cas suivant :
il faut penser que c'est
le problème précédent avec
une "image miroir"



On a donc de même :

$L > R \longrightarrow$ instable hyperbolique

$L < R \longrightarrow$ elliptique (cf exo suivant)