Exercice : Matrice de $SL_2(\mathbb{R})$

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Det}(M) = ad - bc = 1$$

$$T = \mathrm{Tr}(M) = a + d$$

polynome caractéristique : $D(x) = \mathrm{Det}(M - xI)$

$$= \mathrm{Det}\begin{pmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{pmatrix}$$

$$= (a-x)(d-x) - bc$$

$$= x^2 - (a+d)x + ad - bc$$

$$= x^2 - Tx + 1$$

Les valeurs propres $x_\pm$ sont solution de $D(x_\pm) = 0$

$$\longrightarrow \quad x_\pm = \frac{T \pm \sqrt{\Delta}}{2} \qquad \text{avec } \Delta = T^2 - 4$$

1) si $|T| > 2 \iff T^2 - 4 > 0 \iff \Delta > 0$,

alors $x_\pm$ sont réelles, $x_+ \cdot x_- = \mathrm{Det}(M) = 1$

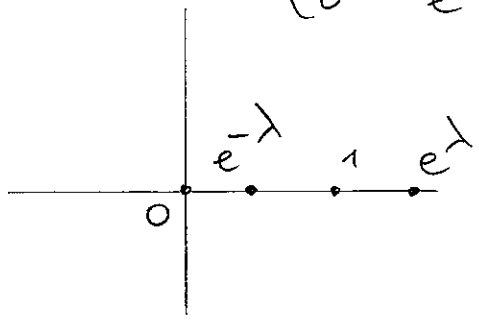
$$x_+ > 1 \text{ et } x_- = \frac{1}{x_+} < 1.$$

On peut noter $x_+ = e^\lambda$, $\lambda > 0$ et $x_- = e^{-\lambda}$.

$$\lambda = \log(x_+) = \log\left(\frac{T + \sqrt{\Delta}}{2}\right).$$

- <u>Dans la base des vecteurs propres</u>, on a $M \propto \begin{pmatrix} e^\lambda & 0 \\ 0 & e^{-\lambda} \end{pmatrix}$

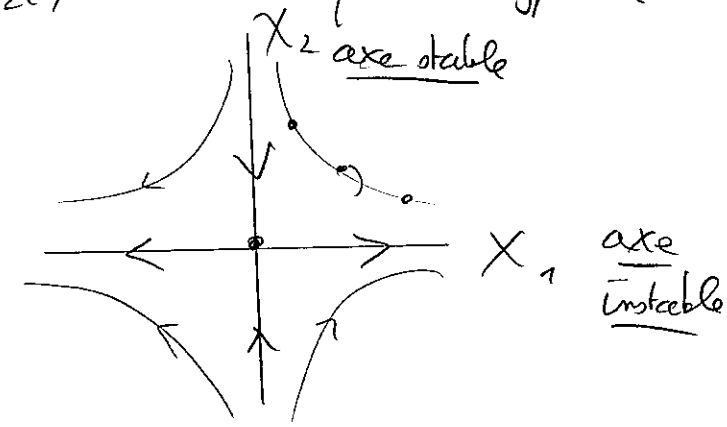
donc $M^n \propto \begin{pmatrix} e^{n\lambda} & 0 \\ 0 & e^{-n\lambda} \end{pmatrix}$



la dynamique d'un point (X_1, X_2) est donc :

$$\begin{cases} X_1(n) = X_1(0) \cdot e^{n\lambda} \longrightarrow \infty \\ X_2(n) = X_2(0)\, e^{-n\lambda} \longrightarrow 0 \end{cases}$$

on a $X_1(n) \cdot X_2(n) = X_1(0)\, X_2(0) = cte$: équ d'1 hyperbole



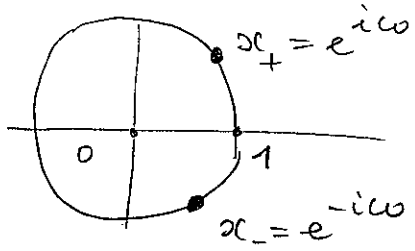
② si $T \in]-2;2[$ alors $T^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow \Delta < 0$

$$\rightarrow x_\pm = \frac{T \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2}$$

on a $x_- = \overline{x_+}$ (conjugué)

et $|x_\pm| = \frac{1}{4}\left(T^2 + |\Delta|\right) = \frac{1}{4}\left(T^2 + 4 - T^2\right) = 1$

donc $x_+ = e^{i\omega}$, $x_- = e^{-i\omega}$ sont de module 1.

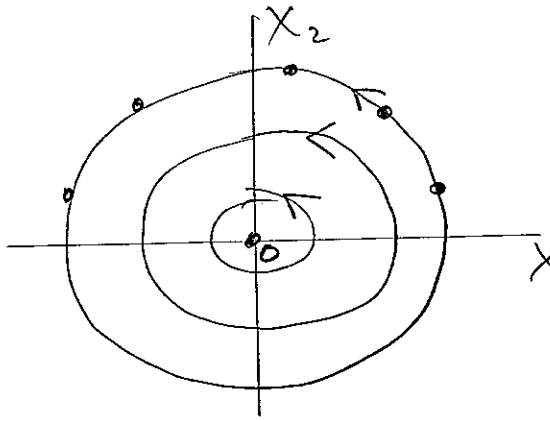


Les vecteurs propres V_+, V_- sont aussi complexes,

Mais soit $\left.\begin{array}{l} V_1 = Re(V_+) \\ V_2 = Im(V_+) \end{array}\right\}$ vecteurs réels.

dans cette base, un point de coordonnées X_1, X_2 aura la dynamique

$$\begin{cases} X_1(n) = |X_1(0)| \cdot \cos(\omega n + \varphi_0) \\ X_2(n) = |X_2(0)| \cdot \sin(\omega n + \varphi_0) \end{cases}$$



mouvement sur des cercles

car :

$$\left(X_1^2 + X_2^2\right) = |X(0)|^2 = \text{cste}.$$

Le point $(0,0)$ est <u>stable</u>.

3 si $T = \pm 2$, alors $\Delta = 0$,

$$x_+ = x_- = \frac{T}{|T|} = \begin{cases} 1 & \text{si } T = 2 \\ -1 & \text{si } T = -2. \end{cases}$$

Si la matrice est diagonalisable alors $M \propto \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \pm Id$.

sinon (th. de Jordan), $M \propto \pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

la dynamique dans ce cas est dans cette base :

$$\begin{cases} X_1(1) = X_1(0) + X_2(0) \\ X_2(1) = X_2(0) \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} X_1(n) = X_1(0) + n \cdot X_2(0) \\ X_2(n) = X_2(0) = \text{cste} \end{cases}$$

Le point $(0,0)$ n'est pas stable, mais l'écart (l'instabilité) est linéaire en n.