Exercice : "Billard circulaire"

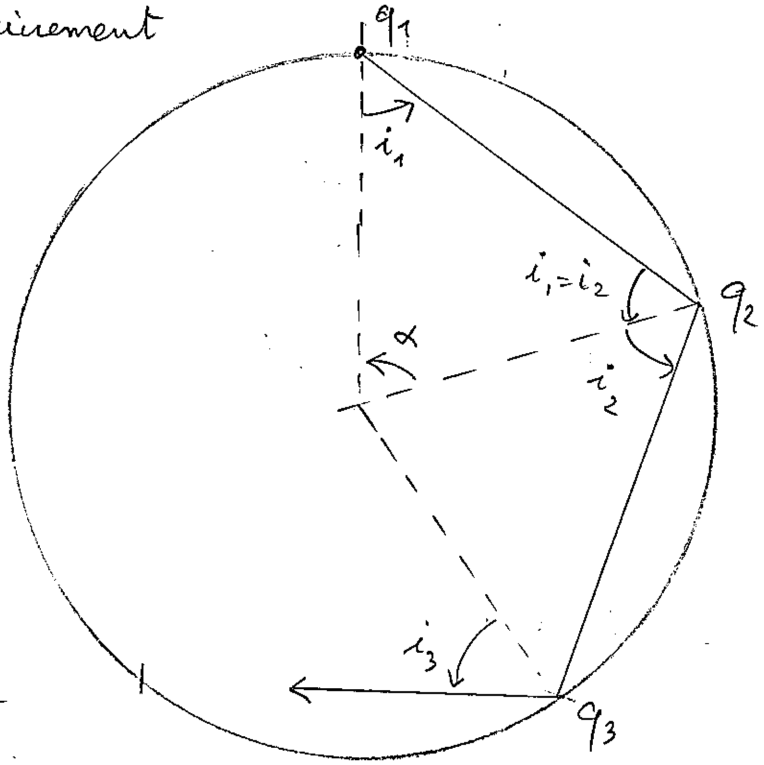
1) Il apparaît clairement que $i_2 = i_1$

etc...

$i_n = \dots = i_1$

l'angle est le même à chaque rebond.

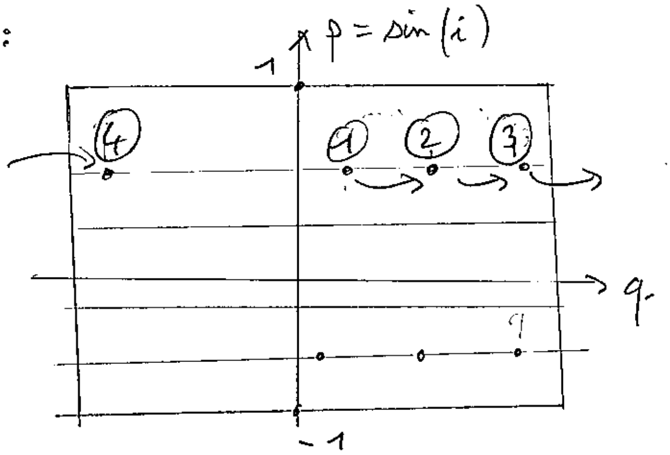
(Mais dépend de l'état initial).



Donc

$p_1 = p_2 = p_3 = \dots$ etc

et sur la section de Poincaré :



Les trajectoires sont sur des lignes horizontales.

2) D'après le schéma, $2i + \alpha = \pi$ (angles d'un triangle).

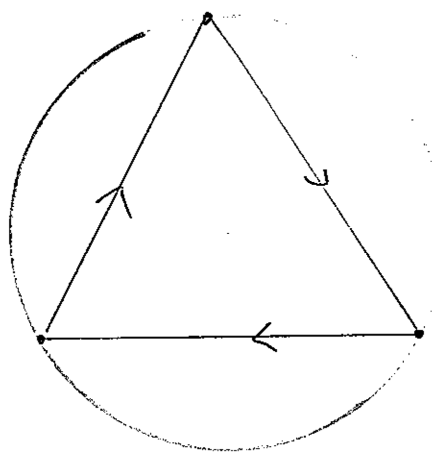
et la trajectoire se referme (périodique) après m rebonds et après n tours,

$\Longleftrightarrow \quad m \cdot \alpha = n\, 2\pi \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = \left(\frac{n}{m}\right) 2\pi$ ← nombre rationnel.

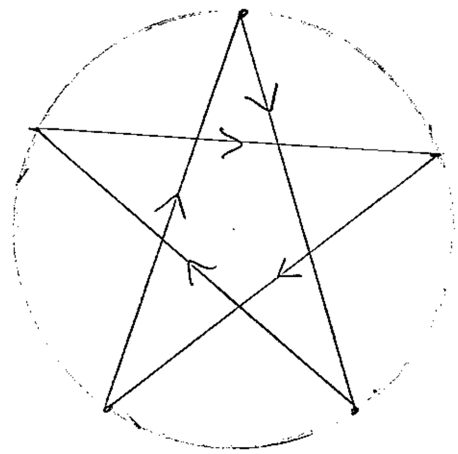
$$\Longleftrightarrow \quad i = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} = \pi \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{n}{m}\right) = \frac{\pi}{2}\left(\underbrace{\frac{m-2n}{m}}_{\text{nombre rationnel}}\right)$$

Inversement si $i = \frac{\pi}{2}\left(\frac{p}{q}\right)$ avec $\frac{p}{q}$ ← entier, ← entier : rationnel,

alors la trajectoire est périodique
et fait $m = q$ rebonds après n tours,
avec $p = m - 2n \Leftrightarrow n = \frac{q-p}{2}$



$n = 1$ tour
$m = 3$ rebonds



$n = 2$ tours
$m = 5$ rebonds

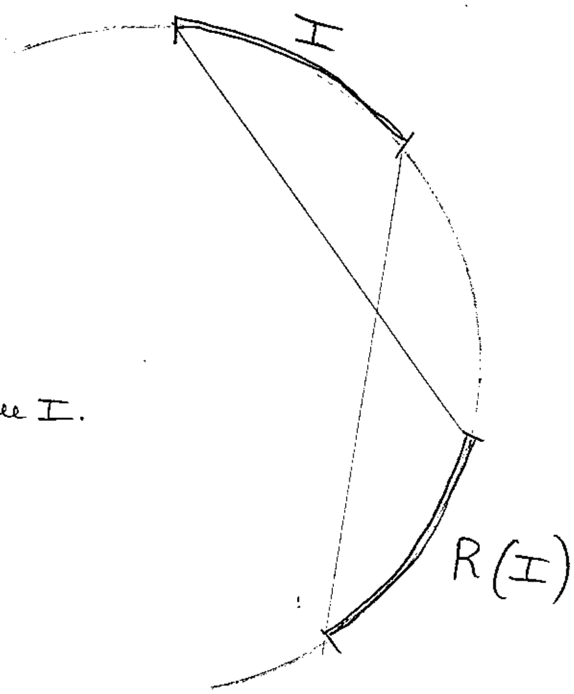
(3) Entre 2 rebonds, d'après la figure, la longueur parcourue est $d = 2R\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Donc $L = m.d = m\,2R\sin\left(\frac{n}{m}.\pi\right)$

où R est le rayon.

④ (Solution de Katok-Hasselblatt p. 27).

On suppose qu'il y a un intervalle I sur le bord non atteind par la trajectoire, et que cet intervalle est le <u>plus grand</u>.
On a vu que à chaque rebond le point tourne d'un angle $(-\alpha)$. On note R la rotation d'un angle $(-\alpha)$



- Comme la rotation préserve la longueur, $R(I)$ a la même longueur que I et n'est pas atteind non plus.
- les intervalles I, $R(I)$, $R^2(I)$ etc ne se coupent pas sinon cela ferait un intervalle pas atteind plus grand que I.
- Comme $\frac{i}{\pi}$, donc $\frac{\alpha}{\pi}$ est irrationnel,

  on ne peut pas avoir $R^m(I) = I$ pour un certain m (sinon le bord de l'intervalle montre que la trajectoire est périodique).
- Donc les intervalles sont disjoints et de longueur égale. Il y en a une infinité. Cela est impossible car la longueur du cercle $2\pi R$ est finie.