④ Matrice de Jordan . Solution

on écrit $J = \lambda \, Id + J_1$

avec $J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$

on calcule $J_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$

et $J_1^k = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & & 1 & & \\ & \ddots & \vdots & \ddots & \\ & & \ddots & & 1 \\ & & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & & & & \end{pmatrix} \\ \uparrow \qquad \uparrow \qquad \uparrow_{m-1} \\ \text{position } k \end{array}$

donc $J_1^m = 0$.

Donc

$$J^n = \left(\lambda \, Id + J_1\right)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \lambda^{n-k} J_1^k \qquad : \text{car } J_1 \text{ et } Id \text{ commuttent.}$$

$$= \sum_{k=0}^{\min(n, m-1)} C_n^k \lambda^{n-k} J_1^k$$

$$= \lambda^n + n \lambda^{n-1} J_1 + \cdots$$