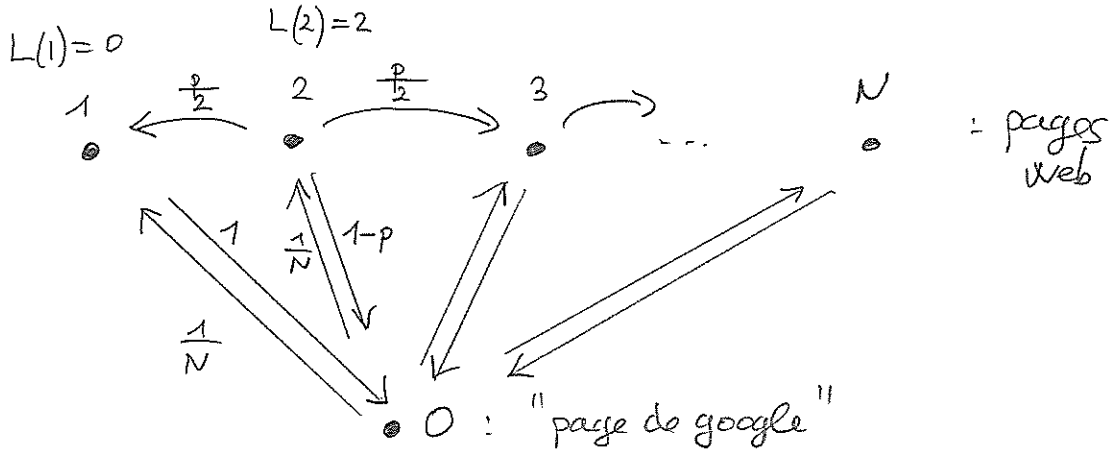
Internet google Rank — Solution

Schéma du graphe associé à la matrice P :



$$P = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & & N \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \\ \\ \\ N \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1-p & \cdots & \\ \frac{1}{N} & 0 & \frac{p}{2} & & \\ \frac{1}{N} & \vdots & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \frac{p}{2} & \ddots & \\ & \vdots & 0 & & \\ \frac{1}{N} & 0 & 0 & & \end{pmatrix} \end{array}$$

dans la première colonne on a :

$$\sum_j P_{j0} = N \cdot \left(\frac{1}{N}\right) = 1$$

dans une colonne $i \geq 1$ telle que $L(i) = 0$, on a

$$\sum_j P_{ji} = P_{0i} = 1 \qquad \text{(ex. } i = 1 \text{ sur le schéma)}$$

dans une colonne $i \geq 1$ telle que $L(i) > 0$, on a

$$\sum_j P_{ji} = (1-p) + L(i) \cdot \left(\frac{p}{L(i)}\right) = 1$$

donc pour tous i, $\sum_j P_{ji} = 1$,

c'est à dire que la matrice P est <u>stochastique</u>.

- Il est clair que au temps $n = 4$ on peut aller du sommet i à j pour tous i, j, en passant par 0.

$$i \to 0 \to j \to 0 \to j$$

et $$0 \to a \to b \to 0 \to j$$

$$j \to 0 \to a \to b \to 0$$

où a, b sont deux sites connectés. (on suppose qu'ils existent).

D'après le théorème de Perron Frobenius,

$$P^n = \Pi + O(\lambda_1^n)$$

avec $\Pi = |u\rangle\langle 1|$: projecteur sur l'état d'équilibre u

$u = (u_0, u_1, \dots, u_N)$, : état d'équilibre

avec $u_i > 0, \forall i$, $\sum_{i=0}^{N} u_i = 1$

u_i : représente la <u>probabilité de séjourner</u> sur la page i, si l'on "surfe au hasard sur le web".

$0 < \lambda_1 < 1$ est indépendant de N. (à vérifier !)

- Google classe les pages web i par l'ordre décroissant :

$$u_{i_1} \geq u_{i_2} \geq u_{i_3} \dots$$

- Algo pour calculer u : on part de $u(0) = (0, \frac{1}{N}, \frac{1}{N}, \dots)$ cad équirépartition et on calcule $u(1) = Pu(0), \dots, u_n = Pu(n-1)$ pour n assez grand ($n \approx 10$).

alors $u_n \simeq u_{equilibre} + \underbrace{O(\lambda^n)}_{\text{petite erreur}}$.

- Si la matrice P a un seul changée, on recalcule $u_{equil.}$, de même en partant de l'état précédent.