Examen de systèmes dynamiques, chaos et applications

Université de Grenoble Alpes. Master 1, Physique.

18 décembre 2017,

Durée 3h00. Documents interdits. Calculatrice autorisée. 1 feuille manuscrite autorisée.

Rédiger séparément la partie 1 (exercices 1 et 2) qui est notée sur 10 et **la partie 2** (exercices 3 et 4) qui est aussi notée sur 10.

Partie 1 « Points fixes, stabilité et bifurcations »

Exercice 1

Le Brusselateur est un modèle simple qui décrit une réaction oscillante basée sur une réaction autocatalytique. En coordonnées réduites (sans dimension) cela s'écrit comme :

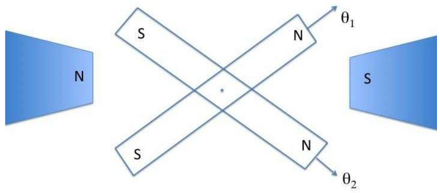
$$\begin{cases} \dot{x} = & 1-(b+1)x+ax^2y \\ \dot{y} = & bx-ax^2y \end{cases}$$

où $a, b > 0$ ce sont des paramètres positifs et $x, y \geqslant 0$ sont des concentrations réduites.

1. Déterminer tous les points fixes du système et étudier leur stabilité.
2. Tracer les isoclines nulles du système.
3. Contruisez une région de piégeage des flots.
4. Montrez qu'une bifurcation de Hopf apparait pour une valeur de paramètre $b = b_c$, où b_c est à déterminer.
5. Est-ce que le cycle limite existe pour $b > b_c$ ou $b < b_c$? Justifiez en utilisant le théorème de Poincaré-Bendixson.

Exercice 2

On considère deux aimants qui peuvent tourner sur un axe de rotation commun, comme le montre la Figure suivante.



Les deux aimants sont placés dans l'entrefer d'un électroaimant. Soit θ_1 et θ_2 les deux angles repérant les pôles nord des aimants par rapport à l'axe horizontal (sens trigonométrique). La dynamique des deux aimants est donnée par le système d'équations , ayant $K > 0$:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = & K\sin(\theta_1 - \theta_2) - \sin(\theta_1) \\ \dot{\theta}_2 = & K\sin(\theta_2 - \theta_1) - \sin(\theta_2) \end{cases}$$

1. Déterminer l'ensemble des points fixes (θ_1^*, θ_2^*) de ce système dans l'interval $[-\pi, \pi]$ et étudier leur stabilité.
2. Tracer le diagramme θ_1^* en fonction de K. Montrer qu'une bifurcation existe pour $K = K_c$. Donner K_c. Quel est le type de la bifurcation ?
3. Montrer qu'il existe une fonction $V(\theta_1, \theta_2)$ telle que $\dot{\theta}_1 = -\partial V/\partial\theta_1$ et $\dot{\theta}_2 = -\partial V/\partial\theta_2$. On donnera son expression.
4. Déterminer les orbites périodiques de ce système dynamique.

Partie 2 « Chaos »

Exercice 3 "dynamique probabiliste"

Dans une montagne, on suppose qu'il y a deux espèces (majoritaires) de fleurs : des gentianes bleues α et des gentianes jaunes β. Pour l'espèce α, la proportion $\tau_\alpha = 20\%$ de sa population disparaît chaque année. L'espèce β a une plus grande durée de vie et seulement $\tau_\beta = 2\%$ de sa population disparaît chaque année. Si une fleur disparait, cela donne un emplacement est libre, et il y a la probabilité $p_\alpha = 90\%$ qu'il soit repeuplé par une fleur de l'espèce α et la probabilité $p_\beta = 1 - p_\alpha = 10\%$ par une fleur de l'espèce β.

1. On note $N_\alpha(n)$ (respect. $N_\beta(n)$) la proportion de fleurs de l'espèce α (respect. de l'espèce β) à l'année $n \in \mathbb{N}$. Écrire la loi d'évolution sous la forme
$$\begin{pmatrix} N_\alpha(n+1) \\ N_\beta(n+1) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} N_\alpha(n) \\ N_\beta(n) \end{pmatrix}$$
avec une matrice M que l'on explicitera en fonction de $\tau_\alpha, \tau_\beta, p_\alpha, p_\beta$. On dessinera le graphe de Markov associé.
2. Pour une situation initiale $\begin{pmatrix} N_\alpha(0) \\ N_\beta(0) \end{pmatrix}$ quelconque, montrer que après un temps caractéristique τ que l'on calculera en années en fonction de $\tau_\alpha, \tau_\beta, p_\alpha, p_\beta$, la proportion de fleurs dans la prairie se stabilise à un état d'équilibre $N^* = \begin{pmatrix} N^*_\alpha \\ N^*_\beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ que l'on calculera en fonction de $\tau_\alpha, \tau_\beta, p_\alpha, p_\beta$. Application numérique : calculer τ et N^* pour les valeurs numériques données.

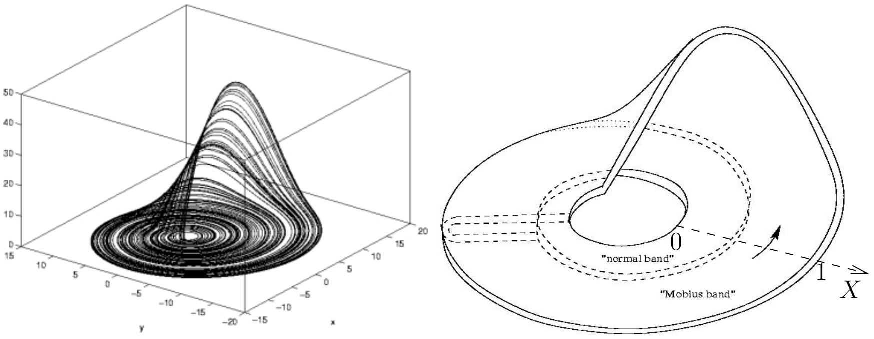
Exercice 4 "Dynamique chaotique de Rössler"

En 1976, E.Rössler a proposé le modèle suivant qui décrit l'évolution de trois variables $x(t), y(t), z(t) \in \mathbb{R}$ en fonction du temps $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = & -y(t) - z(t) \\ \frac{dy}{dt} = & x(t) + ay(t) \\ \frac{dz}{dt} = & b + (x(t) - c)\, z(t) \end{cases} \tag{1}$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ sont des paramètres fixés. Ces équations se rencontrent en chimie pour décrire l'évolution de la concentration de certains composés dans une réaction spécifique. Ce modèle est aussi interessant par lui même car il possède un attracteur étrange chaotique comme le modèle de Lorenz, en étant plus simple par certains aspects.

1. Préciser si le système dynamique (1) est : (a) à temps continu ou temps discret ? (b) déterministe ou non déterministe ? (c) linéaire ou non linéaire ?
2. Trouver le nombre de points fixes du système (1) et leur position (x, y, z) en fonction des paramètres a, b, c.
3. La figure (a) suivante montre l'attracteur $\mathcal{A}$ du système (1) pour les paramètres $a = b = 0.2$, $c = 5.7$ obtenu par simulation numérique. Le schéma (b) qui suit montre que les trajectoires tournent autour d'un



(a) (b)

FIGURE 1

point fixe instable dans une "bande". La partie intérieure de cette bande appelée "bande normale" reste dans le plan horizontal, s'étire en largeur, fait un tour puis se place dessous. La partie extérieure appelée "bande de Moebius" fait aussi un tour en s'étirant, mais s'élève et se retourne, avant de se placer dessus. Etc.

Dans ce mécanisme, on suppose que les deux bandes sont remplies de trajectoires de façon dense et reviennent contractées en épaisseur d'un facteur $\epsilon < 0.5$. Rappeler la définition de la dimension fractale d'un ensemble de points. Calculer la dimension fractale de l'attracteur $\dim\mathcal{A}$ en fonction de ϵ. Application numérique : calculer $\dim\mathcal{A}$ si $\epsilon = 1/16$?

4. On appelle $X \in [0,1]$ la position transverse d'une trajectoire lorsqu'elle traverse l'axe X de la figure (b). On note $f : X_n \to X_{n+1} = f(X_n)$ l'application de retour de Poincaré après un tour. En observant la figure (b), tracer l'allure du graphe de la fonction $Y = f(X)$.
5. On souhaite simplifier le modèle.
   (a) Pour approcher la fonction $f(X)$ avec $X \in [0,1]$, quelle fonction proposez vous parmi les fonctions f_1 et f_2 suivantes ?

   $$f_1(X) = \begin{cases} 2X & \text{si } X < 1/2 \\ 2X - 1 & \text{si } X > 1/2 \end{cases}, \qquad f_2(X) = \begin{cases} 2X & \text{si } X < 1/2 \\ 2 - 2X & \text{si } X > 1/2 \end{cases},$$

   (b) Pour les fonctions $f = f_1$ puis $f = f_2$, décrire précisément la valeur en temps long $n \gg 1$ du système dynamique $X_{n+1} = f(X_n)$ à partir de la valeur initiale X_0 est écrit en base 2, c'est à dire $X_0 = 0, b_0 b_1 b_2 b_3 \dots$ avec des bits $b_j \in \{0,1\}$.

   (c) Soit $\delta \ll 1$ l'incertitude sur X_0 à la date $n = 0$. Après quel temps $n(\delta)$ cette petite incertitude $\delta \ll 1$ rend la prévision impossible ?