Université de Grenoble Alpes. Master 1, Physique

Examen de systèmes dynamiques, chaos et applications. Décembre 2016.

Durée 3h00. Documents interdits. Calculatrice autorisée. 1 feuille manuscrite autorisée. **Rédiger séparément la partie 1 (exercices 1 et 2)** qui est notée sur 10 et la **partie 2 (exercices 3, 4 et 5)** qui est aussi notée sur 10.

Partie 1 « Points fixes, stabilité et bifurcations »

Exercice 1

Un gouvernement décide de mettre en œuvre une politique de nivellement sur le revenu $S(t)$ des personnes, en rendant le taux de croissance effectif du revenu $\dot{S}/S$ le plus élevé pour les valeurs intermédiaires des revenus $S(t)$. Un exemple simplifié d'un tel modèle (temps t en années, $S(t)$ en unités de 10^4 €) est :

$$\frac{\dot{S}}{S} = r - (S-5)^2$$

où r est un paramètre de croissance économique.

(1) Pour tout $r \in \mathbb{R}$, trouver tous les points fixes de ce modèle.

(2) Déterminer la stabilité de ces points fixes.

(3) Pour $r \in \mathbb{R}$, tracer le diagramme de bifurcation et indiquer quel type de bifurcations se produisent dans ce modèle.

(4) Tracer le salaire $S(t)$ prédit par ce modèle pour différentes conditions initiales (salaires) et avec $r = 4$.

Exercice 2

Soit le système non-linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x} = & ax + y - x\sqrt{x^2+y^2} \\ \dot{y} = & -x + ay - y\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

(1) Montrer que $(x^*, y^*) = (0,0)$ est le seul point fixe du système. Indication : vous pouvez pour cela calculer $\dot{x}y - \dot{y}x = 0$.

(2) Calculer la matrice Jacobienne en $(0,0)$ et déterminer les valeurs propres.

(3) Que peut-on conclure sur la stabilité du point fixe pour $a > 0$, $a = 0$ et $a < 0$?

(4) Montrer que pour $a < 0$, le point fixe est stable au sens de Lyapunov.

(5) Montrer que le système non-linéaire précédant peut s'écrire en coordonnées polaires comme :

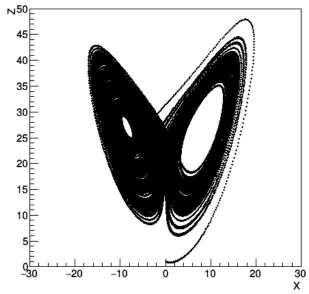
$$\begin{cases} \dot{r} = & r(a-r) \\ \dot{\theta} = & -1 \end{cases}$$

(6) En appliquant le théorème de Poincaré-Bendixson montrer qu'il existe un cycle limite stable pour $a > 0$.

Partie 2 « Chaos »

Exercice 3 « Synchronisation de deux systèmes chaotiques ».

Bien que la synchronisation des systèmes périodiques (ex. pendules) soit étudiée depuis des siècles, la découverte que des systèmes chaotiques puissent se synchroniser est assez récente (Fujsaka 1983 Japon, Afraimovich 1986 URSS, Pecora 1990 USA). Cela a été une surprise car une perturbation dans un système chaotique a tendance à croître. Une synchronisation est cependant possible si les systèmes sont similaires et sont couplés de façon adéquate. Alors quelque soient les conditions initiales différentes, les deux systèmes couplés vont tendre vers une évolution identique. Cet exercice propose de montrer qu'il y a une synchronisation dans un modèle basé sur la dynamique de Lorenz (qui correspond au système mécanique, le « Moulin de Lorenz »).



On considère un système 1, décrit par 3 variables $M(t) = (X(t), Y(t), Z(t)) \in \mathbb{R}^3$ soumises à la loi de mouvement

$$\frac{dX}{dt} = \sigma(-X+Y), \quad \frac{dY}{dt} = rX - Y - XZ, \quad \frac{dZ}{dt} = XY - Z, \tag{0.1}$$

avec $\sigma, r > 0$, constantes.

On considère un système 2, décrit par 3 variables $m(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$ soumises à la loi de mouvement

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(-x+y) - K(x-X), \quad \frac{dy}{dt} = rx - y - xz, \quad \frac{dz}{dt} = xy - z,$$

où $K > 0$ est une constante de couplage et σ, r sont les même que dans (0.1). Noter l'influence du système 1 sur le système 2 par la présence de la variable $X(t)$.

On note $\delta(t) = m(t) - M(t) \in \mathbb{R}^3$ l'écart entre l'état des deux systèmes. Remarquer que la « synchronisation » signifie $\|\delta(t)\| \underset{t\to+\infty}{\rightarrow} 0$.

(1) Ecrire les équations de mouvement pour l'écart $\delta(t) = (\delta_x(t), \delta_y(t), \delta_z(t)) \in \mathbb{R}^3$ sous la forme $\frac{d\delta}{dt} = F(\delta, M)$ que l'on explicitera.

(2) On note $V(t) := \|\delta(t)\|^2$. Exprimer $\frac{dV}{dt}$ sous la forme :

$$\frac{dV}{dt} = -2\left((\delta_z + \alpha\delta_x)^2 + (\delta_y + \beta\delta_x)^2 + \gamma\delta_x^2\right)$$

avec α, β, γ que l'on précisera.

(3) On admet que $D := \left\{M = (X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3, \quad X^2 < 4\sigma r, \quad Y^2 \leq r^2, \quad 0 \leq Z \leq 2r\right\}$ est une région captée pour le système 1 c'est à dire que si la condition initiale $M(0) \in D$ alors $M(t) \in D$ pour tout $t \geq 0$. Montrer qu'il existe une constante de couplage seuil $K_0 > 0$ que l'on précisera telle que pour toute condition initiale $M(0) \in D$ et constante $K > K_0$ alors $\frac{dV}{dt} < 0$. Conclure.

Exercice 4 « Dimension fractale »

On rappelle que par définition, si $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble de points, soit $\mathcal{N}_\epsilon$ le nombre minimal de boules (ou boites) de rayon $\epsilon > 0$ qui recouvrent $\mathcal{A}$. La **dimension fractale de Minkowski** de $\mathcal{A}$ est

$$\dim_M(\mathcal{A}) := \lim_{\epsilon \to 0} \left(\frac{\log \mathcal{N}(\epsilon)}{\log(1/\epsilon)} \right)$$

1) Ensemble de Cantor : On considère l'intervalle $E_0 = [0,1]$ que l'on divise en trois parties égales $1, 2, 3$ de largeur $1/3$ chacune. On définit E_1 comme étant l'union des deux parties $1, 3$. Chaque segment est redivisé en 3 parties égales et E_2 est formé de 2^2 intervalles (le 1 et 3 de chaque) de largeur $1/3^2$. Etc, E_n est formé de $\mathcal{N} = 2^n$ intervalles de largeur $\epsilon = 1/3^n$. Ces ensembles E_n sont contenus les uns dans les autres et on appelle F l'ensemble limite, appelé ensemble de Cantor. Calculer $\dim_M(F)$.

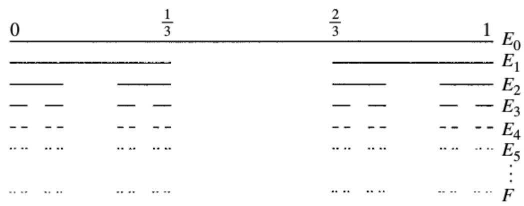


FIGURE 0.1 – Ensemble de Cantor

2) Fractale A La figure 0.2 (A) montre une fractale F et son « générateur » en bas à gauche. La construction itérative est la suivante : au départ E_0 est le générateur. Pour l'étape suivante E_1 on remplace chaque segment par une copie miniature du générateur. Calculer $\dim_M(F)$ de l'ensemble limite.

3) Une fractale arborescente B : La figure 0.2 (B) montre une fractale F et son « générateur » en bas à gauche. La construction itérative est la suivante : au départ E_0 est le générateur. Pour l'étape suivante E_1 on remplace chaque segment par une copie miniature du générateur. Calculer $\dim_M(F)$ de l'ensemble limite.

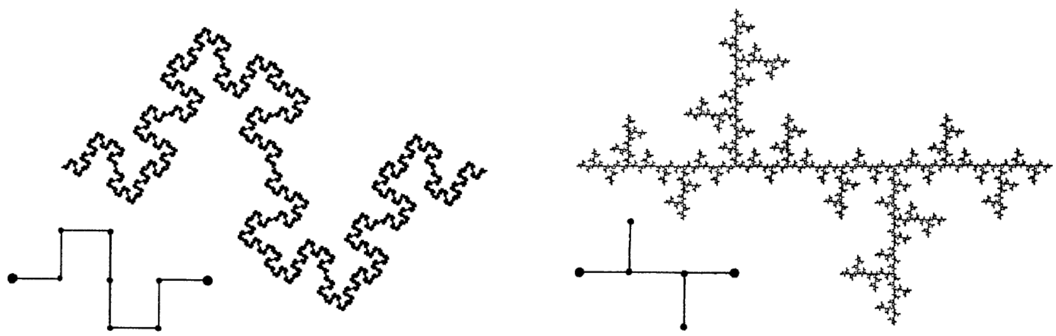


FIGURE 0.2 – (A) Fractale A. (B) Fractale arborescente B.

Exercice 5 « Ergodicité dans les nombres »

On considère la suite $u_n = 3^n$ avec $n \in \mathbb{N}$. On note c_n le premier chiffre de u_n en base 10. Voici les premières valeurs de c_n marquées en gras :

$$u_n = \mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{9}, \mathbf{2}7, \mathbf{8}1, \mathbf{2}43, \mathbf{7}29, \mathbf{2}187, \mathbf{6}561, \mathbf{1}9683, \mathbf{5}9049, \mathbf{1}77147, \ldots$$

(1) Expliquer pourquoi et pour quelle mesure de probabilité la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniquement ergodique et donner la probabilité de l'évènement $c_n = \mathbf{1}$, c'est à dire que le premier chiffre de u_n soit 1.

(2) Quelle manifestation de ce phénomène imaginez vous en physique ou dans la vie courante ?