Ergodicité dans les nombres

. le chiffre $c_n \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ est caractérisé par

$$c_n \cdot 10^r \leq u_n < (c_n+1)\, 10^r \qquad \text{avec } r \text{ entier } \geq 0$$

par exemple $2 \cdot 10^2 \leq 243 < 3 \cdot 10^2$

$$\iff \log c_n + r \log 10 \leq \log u_n < \log(c_n+1) + r \log 10$$

$$\iff \frac{\log c_n}{\log 10} + r \leq \frac{\log u_n}{\log 10} < \frac{\log(c_n+1)}{\log 10} + r$$

$$\iff \frac{\log c_n}{\log 10} \leq \frac{\log u_n}{\log 10} \text{ modulo } 1 < \frac{\log(c_n+1)}{\log 10}$$

$$\iff \frac{\log c_n}{\log 10} \leq v_n < \frac{\log(c_n+1)}{\log 10}$$

avec $\quad v_n := \dfrac{\log u_n}{\log 10}$ modulo 1.

On a $\quad v_{n+1} = \dfrac{\log u_{n+1}}{\log 10} = \dfrac{\log(3\, u_n)}{\log 10} = \dfrac{\log 3}{\log 10} + \dfrac{\log u_n}{\log 10}$

$\qquad = v_n + \dfrac{\log 3}{\log 10}$: suite arithmétique

et $r = \dfrac{\log 3}{\log 10} \notin \mathbb{Q}$ est irrationnel car si $\dfrac{\log 3}{\log 10} = \dfrac{a}{b} \iff b \log 3 = a \log 10$

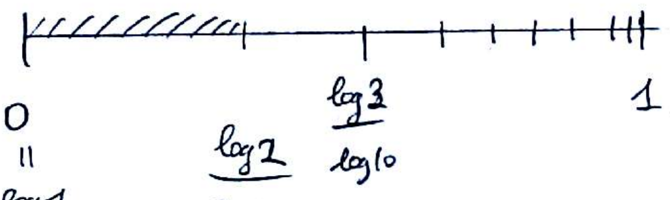
$\iff \log 3^b = \log 10^a \iff 3^b = 2^a 5^a$

impossible si $b \geq 1$.
ou $a \geq 1$.

donc d'après le théorème de Kronecker-Weyl
la suite v_n est uniquement ergodique sur $[0,1[$.
pour la mesure de probabilité uniforme $\mu = dv$

donc $\text{proba}(C_n = k) = \left(\dfrac{\log(k+1)}{\log 10} - \dfrac{\log k}{\log 10}\right)$: longueur de l'intervalle.

$$= \frac{\log\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{\log(10)}$$



en particulier $\text{proba}(C_n = 1) = \dfrac{\log 2}{\log 10} \approx 0.30$

La mesure de proba μ pour c est obtenue par le changement de variable $v = \dfrac{\log c}{\log 10}$

donc $\mu = dv = \left(\dfrac{1}{c \cdot \log 10}\right) dc$

↑ densité de proba