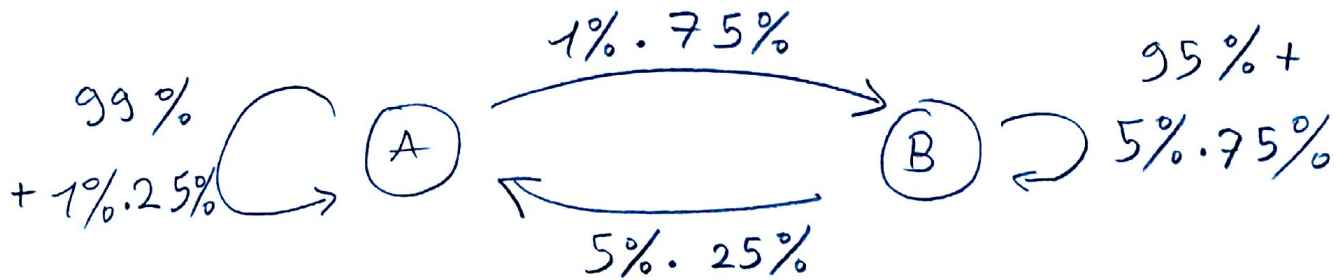


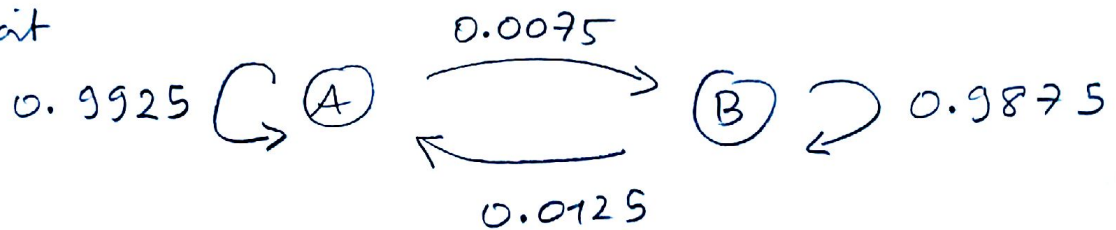
Population d'arbres

①

Le graphe de Markov est :



soit



donc

$$M = \begin{pmatrix} 0.9925 & 0.0125 \\ 0.0075 & 0.9875 \end{pmatrix}$$

C'est une matrice stochastique car la somme dans les colonnes est $= 1$

mélangante (donc ergodique).

② D'après le théorème de Perron Frobenius,

M a deux valeurs propres:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 \text{ avec } |\lambda_2| < 1.$$

et l'état d'équilibre (A^*, B^*) est vecteur propre de M associé à $\lambda_1 = 1$.

Calcul de λ_2 : on a $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{Trace}(M)$

$$\Leftrightarrow 1 + \lambda_2 = 1.98$$

$$\Leftrightarrow \lambda_2 = 0.98$$

Le temps caractéristique τ est déterminé par

$$e^{-n/\tau} = \lambda_2^n$$

$$\Leftrightarrow \tau = \frac{1}{\log\left(\frac{1}{\lambda_2}\right)} = 49,5 \text{ ans.}$$

Calcul de A^*, B^* :

$$M \begin{pmatrix} A^* \\ B^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^* \\ B^* \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^* + B^* = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0.9925 A^* + 0.0125 (1 - A^*) = A^* \\ A^* + B^* = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A^* = 0.625 = 62,5 \% \\ B^* = 0.375 = 37,5 \% \end{cases}$$