Université Joseph Fourier. Grenoble. Master 1, Physique, 2014-15

Examen de système dynamiques, janvier 2015. (Partie II, notée sur 10).

Documents interdits. Calculatrice autorisée. 1 feuille manuscrite autorisée. **Encadrer les résultats demandés.** Le signe $(\star)$ signifie que le problème peut être traité à cet endroit sans avoir nécessairement résolu les questions qui précèdent.

1 Population d'arbres (dynamique de Markov)

Dans une foret, on suppose qu'il y a deux espèces (majoritaires) d'arbres : A et B. L'espèce A a une grande durée de vie et seulement 1% de sa population disparaît chaque année. Pour l'espèce B, 5% disparaît chaque année. Par contre si un emplacement est libre, il y a une probabilité 25% qu'il soit repeuplé par un arbre de l'espèce A et 75% par un arbre de l'espèce B.

1. $(\star)$ On note $A(n)$ (respect. $B(n)$) la proportion d'arbres de l'espèce A (respect. de l'espèce B) dans la forêt à l'année $n \in \mathbb{N}$. Écrire la loi d'évolution sous la forme

$$\begin{pmatrix} A(n+1) \\ B(n+1) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A(n) \\ B(n) \end{pmatrix}$$

   avec une matrice M que l'on explicitera. On dessinera le graphe de Markov associé. Donner les propriétés de la matrice M (stochastique ?, ergodique ?, mélangeante ?...)

2. Pour une situation initiale $A(0), B(0)$ quelconque, montrer que après un temps caractéristique τ que l'on calculera, la proportion d'arbres se stabilise à un état d'équilibre (A^*, B^*) que l'on calculera.

2 Systèmes dynamiques contractifs

Les deux exercices suivants sont des modèles simplifiés pour comprendre le mécanisme qui définit les directions instables E_u (respect. stables E_s) dans les flots hyperboliques.

Exercice 1. Suite contractive

On considère l'application suivante (que l'on peut considérer comme un système dynamique sur $[-1,1]$ à temps discret n)

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{Z} \times [-1,1] & \to \mathbb{Z} \times [-1,1] \\ (n,y) & \to (n+1, \phi_n(y)) \end{cases}$$

où pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, $\phi_n : \begin{cases} [-1,1] & \to]-1,1[\\ y & \to \phi_n(y) \end{cases}$ est une application strictement contractante c'est à dire qu'il existe $0 < \alpha < 1$ tel que pour tout $y, y' \in [-1,1], n \in \mathbb{Z}$ on a $|\phi_n(y) - \phi_n(y')| < \alpha |y - y'|$. Voir Image 1-(a).

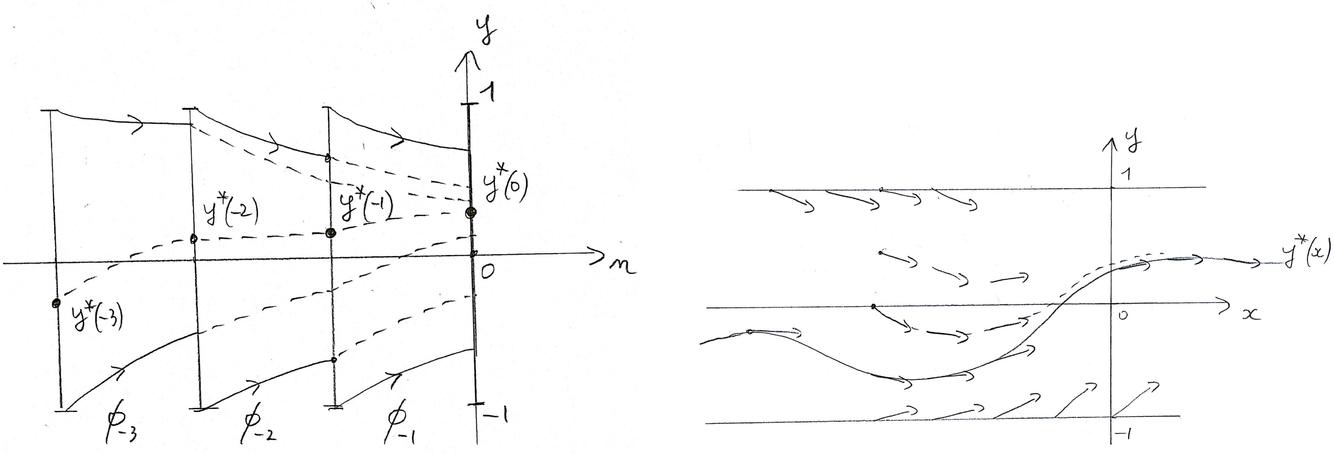

FIGURE 1 – (a) Suite contractive. (b) Flot contractif.

1. $(\star)$ Pour quelles valeurs de $a, b > 0$ l'exemple $\phi_n(y) = ay + b\cos(n)$ convient-il ?
2. $(\star)$ En général, montrer qu'il existe[1] une unique suite infinie de points $y^* : n \in \mathbb{Z} \to y^*(n) \in]-1,1[$ invariante par ϕ, cad vérifiant $\forall n$, $\phi_n(y^*(n)) = y^*(n+1)$ et donner l'expression de $y^*(n)$ à partir de $(\phi_n)_n$.
3. $(\star)$ Donner l'expression de $y^*(n)$ dans l'exemple (1).

Exercice 2. Flot contractif

C'est analogue au problème précédent mais avec un temps continu. On considère la bande $M = \mathbb{R} \times [-1,1]$ avec les coordonnées (x, y) et sur M un champ de vecteur $V = (V_x(x,y), V_y(x,y))$ dont les coordonnées vérifient pour tous x, y : $V_x(x,y) = 1$, $V_y(x,y)$ fonction C^∞, $\frac{\partial V_y(x,y)}{\partial y} < 0$, $V(x,-1) > 0$, $V(x,1) < 0$. On note $\phi_t : (x(0), y(0)) \to (x(t), y(t))$ le flot généré par ce champ de vecteur. Remarquer que $x(t) = x(0) + t$. Voir Image 1-(b).

1. $(\star)$ Montrer que le flot ϕ_t contracte l'élément de volume $dxdy$ (i.e. est dissipatif).
2. $(\star)$ Montrer qu'il existe une unique courbe infinie $y^* : x \in \mathbb{R} \to y^*(x) \in]-1,1[$ qui est une trajectoire de ce champ de vecteur et donner l'expression de $y^*(x)$.

1. On rappelle que si une suite $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ vérifie $|u_{m+k} - u_m| < \alpha^m$ avec $\alpha < 1$ et pour tous $m, k \geq 0$ alors elle est convergente d'après le critère de Cauchy.