Corrigé : Modèle d'une épidémie

1. $\dot{x}+\dot{y}+\dot{z}=0 \Rightarrow (\dot{x+y+z})=0 \Rightarrow x+y+z = cte = N$

2. $\left.\begin{array}{l}\dot{x} = -kxy \\ \dot{z} = ly \Rightarrow y = \dfrac{\dot{z}}{l}\end{array}\right\} \Rightarrow \dot{x} = -kx\dfrac{\dot{z}}{l} \Rightarrow \dfrac{\dot{x}}{x} = -\dfrac{k}{l}\dot{z}$

Après intégration $\left.\begin{array}{l}\ln x(t) = -\dfrac{k}{l}z + cte \\ t=0 \Rightarrow \ln x_0 = cte\end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x(t) = x_0 \exp\left[-\frac{k}{l}z(t)\right]$$

3. $x(t) = x_0 \exp\left[-\dfrac{k}{l}z(t)\right]$

$x+y+z = N$

$\dot{z} = ly \Rightarrow \dot{z} = l(N-x-z) = l\left(N - z - x_0 \exp\left[-\dfrac{k}{l}z(t)\right]\right)$

4. Si on pose $u = \dfrac{kz}{l} \Rightarrow z = u\dfrac{l}{k}$

$$\Rightarrow \frac{l}{k}\dot{u} = lN - \frac{l^2}{k}u - x_0 l \exp(-u) \quad / x_0 l$$

$$\Rightarrow \frac{1}{kx_0}\frac{du}{dt} = \frac{N}{x_0} - \frac{l}{kx_0}u - \exp(-u)$$

Soit $\tau = kx_0 \cdot t$; $a = \dfrac{N}{x_0}$; $b = \dfrac{l}{kx_0} > 0$

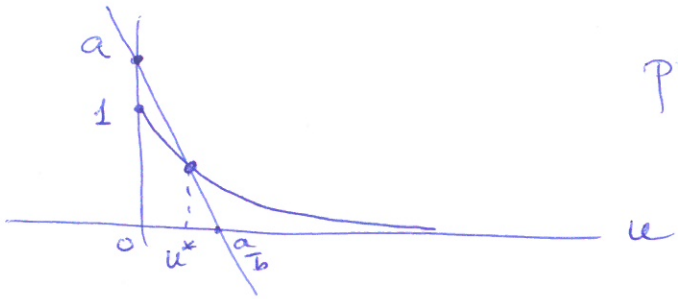
l'équation en u devient alors :

$$\frac{du}{d\tau} = a - bu - e^{-u}$$

Comme $N = x_0 + y_0 + z_0 \geq x_0 \Rightarrow a = \dfrac{N}{x_0} \geq 1$

5. $\dot{u} = f(u) = a - bu - e^{-u}$; $a \geq 1$, $b > 0$

$\dot{u} = 0 \Rightarrow a - bu^* = e^{-u^*}$, le point fixe sera à l'intersection de la droite $a-bu$ avec e^{-u} (pour $u \geq 0$ et $a \geq 1$, $b > 0$)



Il n'y a donc qu'un seul point fixe $0 \leq u^* < \frac{a}{b}$

Stabilité : $f'(u^*) = -b + e^{-u^*} = -b + a - bu^* =$

$= a - b(u^* + 1) < a - b\left(\frac{a}{b} + 1\right)$

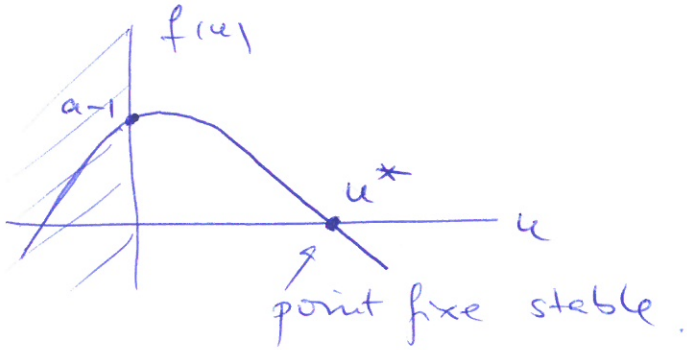
$f'(u^*) < \cancel{a} - \cancel{a} - b \Rightarrow f'(u^*) < 0$ point fixe stable.

Ou graphiquement :

$u = 0 \Rightarrow f(u) = a - 1 > 0$

$u \to \infty \Rightarrow f(u) \to -\infty$

$u \to -\infty \Rightarrow f(u) \to -\infty$



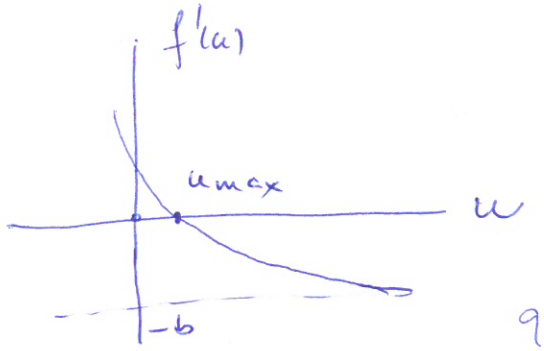
6. $u = \frac{k}{\ell} z \Rightarrow \dot{u} = \frac{k}{\ell} \dot{z}$ et $\dot{z} = \ell y$ $\Rightarrow \dot{u} = \frac{k}{\ell} \dot{z} = k y$

Les 3 fonctions donc $\dot{u}$, $\dot{z}$ et y sont proportionnelles avec les 2 constantes positives et auront donc la même evolution temporelle $\Rightarrow$ le maximum (s'il existe au même moment).

7. Un extremum existe si $f'(u) = 0 \Rightarrow b = e^{-u}$

$\Rightarrow \ln b = -u \Rightarrow u_{max} = -\ln b$

Si $b < 1 \Rightarrow \ln b < 0 \Rightarrow u_{max} > 0 \Rightarrow t_{max} > 0$



et $f''(u) = -e^{-u} \Rightarrow f''(u_{max}) = -b$

donc c'est un maximum.

Au point fixe, $f(u^*) = 0 \Rightarrow$ quand $t \to \infty$, $\dot{u} \to 0$ et donc $y(t \to \infty) \to 0$ aussi.

8. Si $b > 1 \Rightarrow u_{max} = -\ln b < 0$, donc pour les valeurs de $u \geq 0$, $f(u)$ ne fait que décroître. Donc à $t = 0$ il y aura la valeur maximale de la fonction $f(u)$. Donc $t_{max} = 0$.

9. La condition $b = 1$ est le seuil à partir duquel on a une épidemie : $b = \frac{\ell}{kx_0} = 1 \Rightarrow \boxed{kx_0 = \ell}$

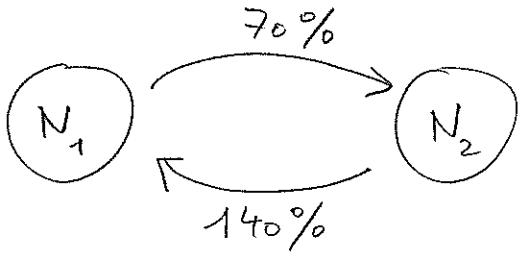
Ce qui veut dire que le taux de mortalité ℓ = taux de transmission initial kx_0

Si $b > 1 \Rightarrow kx_0 < \ell \Rightarrow$ taux de transmission < taux de mortalité

$b < 1 \Rightarrow kx_0 > \ell \Rightarrow$ taux de transmission > taux de mortalité

Plante bisannuelle

(1)



$$N_1(n) = N_1(0) \times \underbrace{\left((0.7) \times (1.4) \times (0.7) \times \cdots\right)}_{n}$$

$$= N_1(0) \cdot (0.7)^{\frac{n}{2}} \cdot (1.4)^{\frac{n}{2}} \quad \text{si } n \text{ pair}$$

$$= N_1(0)\,(0.98)^{n/2} \quad "$$

$$N_1(n) = N_1(0) \cdot (0.7)^{\frac{n+1}{2}} (1.4)^{\frac{n-1}{2}} \quad \text{si } n \text{ impair}$$

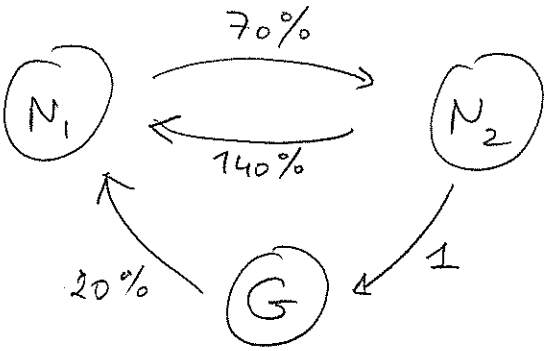
$$= N_1(0) \cdot (0.98)^{\frac{n-1}{2}} \cdot (0.7) \quad "$$

de même,

$$N_2(n) = N_2(0) \cdot (0.98)^{n/2} \quad \text{si } n \text{ pair}$$

$$= N_2(0) \cdot (0.98)^{\frac{n-1}{2}} \cdot (1.4) \quad \text{si } n \text{ impair}$$

(2)



$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1.4 & 0.2 \\ 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(3)

$$\begin{pmatrix} N_1(n) \\ N_2(n) \\ G(n) \end{pmatrix} = P^n \begin{pmatrix} N_1(0) \\ N_2(0) \\ G(0) \end{pmatrix}$$

• La matrice P est irréductible (par ex. P^5 est > 0)

D'après le Th. de Perron Frobenius,

pour $n \gg 1$ on a :

$$\begin{pmatrix} N_1(n) \\ N_2(n) \\ G(n) \end{pmatrix} \simeq \lambda_0^n \cdot \Pi_0 \begin{pmatrix} N_1(0) \\ N_2(0) \\ G(0) \end{pmatrix}$$

où $\lambda_0 \approx 1,05$ est la val. p. dominante

et Π_0 le projecteur spectral associé.
sur l'"état d'équilibre"

il y a donc croissance de 5% par an de la population,
à long terme.

Trajectoires périodiques sur un graphe et fonction zéta.

1) $N_3 = 4$. Ce sont les chemins :

$1 \to 1 \to 1 \to 1$
$1 \to 1 \to 2 \to 1$
$1 \to 2 \to 1 \to 1$
$2 \to 1 \to 1 \to 2$

On a vu en cours que

$$(P^n)_{j,i} \equiv \text{nombre de chemins de } i \text{ à } j \text{ en temps } n$$

donc

$$N_n = \sum_i (P^n)_{i,i} = \mathrm{Tr}(P^n)$$

2)
$$\begin{aligned} \zeta(z) &= \exp\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} N_n z^n \right) \\ &= \exp\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \mathrm{Tr}(P^n) z^n \right) \\ &= \exp\left(\mathrm{Tr}\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} (zP)^n \right) \right) \\ &= \exp\left(\mathrm{Tr}\left(-\log(1-zP) \right) \right) \\ &= \det(1-zP)^{-1} \end{aligned}$$

par ex. si $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors $(1-zP) = \begin{pmatrix} 1-z & -z \\ -z & 1 \end{pmatrix}$

$$\zeta(z) = \left(\det(1-zP)\right)^{-1} = (1-z-z^2)^{-1}$$

$$\frac{\zeta'}{\zeta} = -\frac{d}{dz}\log\zeta = \sum_{n\geq 1} N_n z^{n-1} = \frac{(2z+1)}{(1-z+z^2)^2}$$

c'est la fonction génératrice de la suite $(N_n)_n$.

Billard Dispersif

(1) $i' = i$

et au premier ordre, $x' = x + L \cdot \operatorname{tg} i$

$= x + L \cdot i + \theta(i^2)$

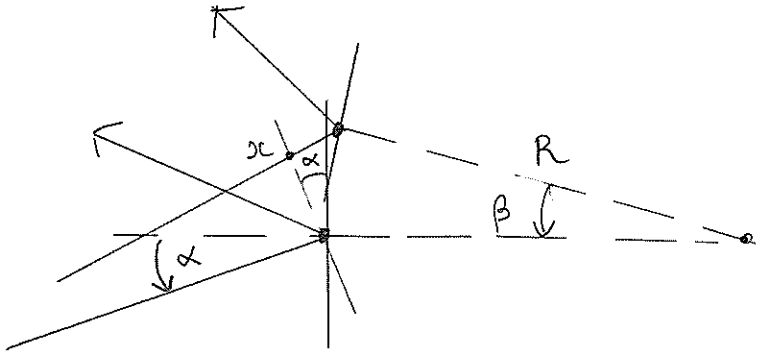
donc

$$\begin{pmatrix} x' \\ i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ i \end{pmatrix}$$

(2) Dans le cas d'une paroi plane on a :

$x' = x$ et $i' = i$

dans le cas d'une paroi avec rayon de courbure R,



on a au premier ordre : $(R\beta)\cos\alpha = x + \theta(x^2)$

donc $\beta \approx \dfrac{x}{R\cos\alpha}$

et $i' \approx i + 2\beta + \theta((x,i)^2)$

donc

$$\begin{pmatrix} x' \\ i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{R\cos\alpha} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ i \end{pmatrix}$$

(3) $\begin{pmatrix} x' \\ i' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ i \end{pmatrix}$

avec : $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{R\cos\alpha} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ \frac{2}{R\cos\alpha} & \frac{2L}{R\cos\alpha} + 1 \end{pmatrix}$

on a $\det M = 1$

$$T = \mathrm{Tr}\, M = 2 + \frac{2L}{R\cos\alpha} > 2$$

c'est donc une matrice hyperbolique.

Ses valeurs propres sont :

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(T + \sqrt{T^2 - 4}\right) > 1 \quad : \text{ coef d'instabilité.}$$

et $\lambda^{-1} < 1$.

Si les obstacles sont suffisamment "denses" de sorte que la particule rencontre forcément un obstacle de "face" avant de pouvoir parcourir la longueur $L = 10$ (par ex.), alors on déduit qu'il y a un coef d'instabilité $\overline{\lambda} > 1$ par unité de longueur uniforme.

Rem : on peut ainsi déduire que la dynamique est "Anosov".