

Maitrise Science Physique 2002-03
Université Joseph Fourier

Introduction à la RELATIVITE RESTREINTE

(notes de cours de F.Faure, 13 novembre 2002)
[http ://lpm2c.grenoble.cnrs.fr/faure](http://lpm2c.grenoble.cnrs.fr/faure)

Table des matières

1	Introduction	3
1.1	Vue historique générale sur la mécanique	3
1.2	Contenu du cours	5
2	Aperçu des particules élémentaires	7
2.1	Liste des particules élémentaires	7
2.2	Les particules composées	8
3	Mécanique non relativiste du point	10
3.1	Éléments de cinématique	10
3.2	Dynamique de Newton	14
3.3	Remise en cause de la mécanique Newtonienne	15
4	Cinématique relativiste	18
4.1	“Construction” des principes de la relativité	18
4.2	Formules des transformations de Lorentz et invariant relativiste	26
4.3	Aspect mathématique : produit scalaire entre quadri vecteurs	33
5	Dynamique relativiste	37
5.1	La quadri impulsion	37
5.2	Limite non relativiste	38
5.3	Règle de conservation	39
5.4	Référentiel du centre de masse et seuil de réaction (TD)	41
5.5	Défaut de masse et réactions nucléaires (TD)	42
5.6	Loi de Newton relativiste	44
6	Introduction à la relativité générale	48
6.1	Problématique	48
6.2	La solution d’Einstein	49
6.3	Conséquences nouvelles	50
6.4	Exemple du “champs de gravitation uniforme”	51

Chapitre 1

Introduction

Voici pour commencer des grandes étapes historiques où ont été posé des fondements de la mécanique.

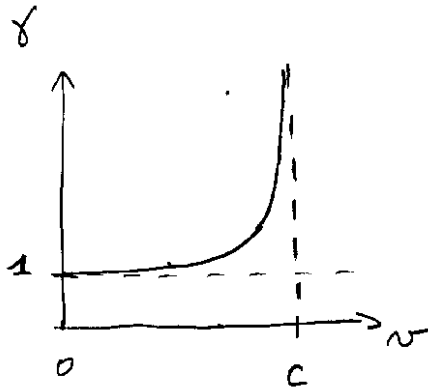
1.1 Vue historique générale sur la mécanique

- 1687 : Le mouvement des objets est décrit par la mécanique classique non relativiste, ou **mécanique de Newton**. Elle permet de décrire le mouvement d'objets ponctuels ou localisés (corps solides) ou de fluides. L'espace-temps est décrit par Galilée (temps universel), et les Lois du mouvement sont celles de Newton.
- 1885 : Maxwell établit les équations qui décrivent la dynamique du **champs électromagnétique classique** (champs magnétique et électrique, ondes radios, lumière, rayons X, ...) en présence de matière chargée. Ces équations ne sont pas compatibles avec l'invariance galiléenne de l'espace-temps. Elles montrent que les ondes dans le vide ont une vitesse absolue : $c \simeq 3.10^8 m/s$. Ces équations sont des précurseurs de la théorie de la relativité.
- 1905 : Einstein reformule les propriétés de l'espace-temps et les lois de la mécanique : **Mécanique classique relativiste (restreinte ou spéciale)**. La relativité se manifeste pour des vitesses d'objets v élevées. La vitesse de la lumière c est la vitesse maximale. Les corrections relativistes font apparaître le facteur

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

avec

$$\begin{aligned} c &= 2,99792458.10^8 m/s \\ &\simeq 3.10^8 m/s \end{aligned}$$



Notation : $\beta = v/c \leq 1$

Exemple :

$v = 10 \text{ km/s}$ donne $\gamma = 1 + 0,5 \cdot 10^{-11}$. Le facteur γ est donc imperceptible, sauf si $v \simeq c$.

- Si $0 \simeq (\gamma - 1) \ll 1$: **c'est le régime non relativiste**
- Si $(\gamma - 1) \simeq 1$: c'est la limite (relativiste)
- Si $\gamma \gg 1$: **régime ultra relativiste**. (Alors $v \simeq c$)

1916 : Einstein formule la **relativité générale** (théorie classique) qui présente la gravitation comme une courbure de l'espace temps. Dans cette théorie, la matière (les étoiles...) courbe l'espace-temps par sa présence.

Cette théorie englobe la mécanique de Newton, et des effets nouveaux se manifestent pour les objets de masses élevées comme les étoiles.

1920 : Planck, Einstein, Schrodinger, Heisenberg... formulent la **mécanique quantique** non relativiste. Dans cette théorie, les objets sont décrits par une onde (quantique)

Les conséquences se manifestent pour des objets de petites tailles Δx , et/ou à petites impulsions Δp telles que :

$$\Delta x \cdot \Delta p \simeq \hbar$$

avec :

$$\hbar = h/2\pi$$

$$h = 6,626 \cdot 10^{-23} \text{ J.s.}$$

Cette théorie est essentielle en physique moléculaire, atomique et en physique du solide.

La fréquence ν de l'onde et sa période T sont reliées à son énergie E par

$$E = h\nu = \frac{h}{T}$$

Sa longueur d'onde λ est reliée à son impulsion p par

$$|\vec{p}| = \frac{h}{\lambda}$$

après-1930 : Dirac, Pauli, Schwinger, Feynmann, ... formulent la mécanique quantique relativiste, ou “**théorie quantique des champs**”. Cette théorie englobe la mécanique quantique des objets matériels, mais aussi elle montre l'aspect quantique du champs électromagnétique (des équations de Maxwell). Le quanta d'onde électromagnétique s'appelle le photon. Cette théorie est essentielle pour la physique des particules (accélérateurs) et pour décrire des processus d'absorption et d'émission de la lumière par la matière (effet photo-électrique, spectre du corps noir, émission spontanée).

On recherche toujours la formulation quantique de la relativité générale (supersymétrie, théorie des cordes, M-théorie,.. ?).

On oppose donc :

Classique et Quantique,

non relativiste et relativiste et relativité générale ;

Cela donne le tableau suivant :

(A droite et en dessous, se trouve chaque fois une théorie plus générale que la précédente.)

	Classique	Quantique
Non relativiste	Mécanique de Newton (1687)	Mécanique quantique(1927)
Relativiste	Relativité restreinte(1905)Équations de Maxwell (1885)	Théorie Quantique des champs(1927)
Relativité Générale	Relativité générale (1916)	...théorie non découverte

1.2 Contenu du cours

Dans ce cours, on présente la mécanique classique relativiste, ou relativité restreinte établie par Einstein en 1905.

En relativité, il est nécessaire de concevoir la mécanique dans l'espace-temps, de façon globale, et non à un instant précis.

Les explications feront donc appel à des schémas espace-temps, souvent 1+1 Dimensions . (c'est à dire 1 dimension d'espace x , et une dimension de temps t).

Plan :

1. Introduction
2. Aperçu des particules élémentaires

3. Rappels de Mécanique classique non relativiste, présentation dans l'espace-temps, pour faire le lien avec la relativité. Expériences mettant à défaut la mécanique de Newton.
4. Cinématique relativiste. On construit les principes de la relativité à partir de faits expérimentaux.
5. Dynamique relativiste (notion de masse, d'impulsion et d'énergie).
6. Introduction à la relativité générale

Bibliographie

- Le cours de R. Feynmann "*Mécanique I*" chapitres 15-16-17 : facile à lire et indispensable.
- R. Penrose "*Les lois de la physique*", chapitre sur la physique : livre de vulgarisation, mais passionnant, d'une justesse extrême, et très pédagogique.
- Taylor, Wheeler "*space-time physics*" 1966 : unique pour ses explication par les illustrations.
- C. Grossetête "*relativité restreinte*" : Ouvrage classique.
- H. Lumbroso "*relativité, pb resolu*" : Exercices pour s'entraîner.
- Wald "*General relativity*" : Livre difficile mais excellent, pour ceux qui veulent en savoir plus et maîtriser la technique.

Chapitre 2

Aperçu des particules élémentaires

La théorie actuelle en accord avec les expériences (le “modèle standard”) date des années 1970-80.

Référence : <http://www-pdg.lbl.gov>.

2.1 Liste des particules élémentaires

2.1.1 La matière

6 quarks

			charge électrique (en e)
“up” u	“charm” c	“Top” t	$+2/3$
“down” d	“Strange” s	“Beauty or Bottom” b	$-1/3$

ces quarks n'existent que par groupes de deux ($q\bar{q}$) ou trois (qqq), où q dénote un quark, et \bar{q} dénote un anti-quark. Ce phénomène s'appelle **le confinement** ; c'est un fait expérimental pas entièrement compris au niveau théorique.

6 Leptons

On indique la masse en MeV/c^2 .

			charge électrique (en e)
électron : e (0.5)	Muon : μ (105)	Tau : τ (1777)	$+1$
Neutrino électronique ν_e	Neutrino Muonique ν_μ	Neutrino Tau ν_τ	0

2.1.2 L'antimatière

Chaque particule a sa particule "image" d'anti-matière. Il y a donc 6 antiquarks, et 6 anti-leptons, de **même masse** que leur image, de **charge électrique opposée**, notés avec une barre. Exemple : $e^+ = \bar{e}^-$ est l'anti-électron, aussi appelé le positron.

Remarque : une particule de matière rencontrant une particule d'anti-matière peut s'annihiler et donner de l'énergie sous forme de rayonnement :

$$\text{matiere} + \text{antimatiere} \rightarrow \text{energie}$$

Ce processus a été très important au début de l'univers. Après une importante phase d'annihilation mutuelle, il est resté de la matière car elle était en excédent de 1%.

2.1.3 Les bosons de Jauge

Ce sont des particules qui transmettent les forces élémentaires.

- Le **photon** γ , de masse $m = 0$, transmet la force électromagnétique entre les particules ayant une charge électrique.
- 8 **gluons** g , de masse $m = 0$, transmettent la "force nucléaire forte" entre les quarks.
- Les **bosons W et Z** : W_0, W_+, W_- de masse $m = 80 \text{ GeV}/c^2$, et Z_0 de masse $m = 91 \text{ GeV}/c^2$, transmettent la "force nucléaire faible" entre les particules de matière et d'anti-matière. (quarks et leptons).

Remarques :

- Les neutrinos ne sont sensibles que à la force nucléaire faible, et n'interagissent donc que très peu. Ils peuvent traverser la Terre facilement. Il y en a 200 par m^3 , provenant d'un reste "fossile" du Big Bang.
- L'interaction gravitationnelle est aussi une force élémentaire, mais on ne sait pas si la théorie quantique s'applique pour elle. Autrement dit, on ne sait pas si il y a une particule de Jauge associée que l'on appellerait le **graviton**.

2.1.4 Particules élémentaires stables

Il y a donc peu de particules élémentaires. Surtout que la plupart cités ci-dessus sont instables : elles ont une durée de vie très courte. Elles apparaissent lors de collisions énergétiques, et se désintègrent très rapidement. Les particules élémentaires stables sont

$$e^-, \text{neutrinos}, \gamma$$

les quarks q et les gluons g n'existent pas à l'état individuel.

2.2 Les particules composées

La richesse et la diversité de la nature vient que ces particules élémentaires s'assemblent pour former des "particules composées" très variées.

2.2.1 Les mésons :

les **mésons** sont composés de deux quarks $q\bar{q}$ avec des gluons qui les lient. Par exemple le méson Pi_0 est une superposition quantique :

$$\pi_0 \equiv (|d\bar{d}\rangle - |u\bar{u}\rangle)$$

de masse $m = 140 \text{ MeV}/c^2$, de charge 0.

2.2.2 Les baryons :

Les **baryons** sont composés de trois quarks qqq avec des gluons qui les lient. Par exemple :

$$\begin{aligned} \text{Proton } p : & \quad (uud) \quad \text{masse} = 939 \text{ MeV}/c^2, \quad \text{charge} +1 \\ \text{Neutron } n : & \quad (udd) \quad \text{masse} = 940 \text{ MeV}/c^2, \quad \text{charge } 0 \end{aligned}$$

2.2.3 Noyau nucléaire

Un **noyau nucléaire** est composé de protons et neutrons. Par exemple

$$\text{Helium}_4 : \quad (ppnn)$$

Il faut une proportion de neutron et protons adéquate pour former un noyau.

Ensuite, les noyaux s'entourent d'électrons pour former des atomes, les atomes s'assemblent pour former des molécules, des matériaux,...

2.2.4 Particules composées stables

Les particules composées stables sont : le proton p , les noyaux nucléaires légers (He, C, O, \dots) les atomes, les matériaux,...

Remarque :

- le neutron isolé est instable, avec une durée de vie de 15mn.
- L'antimatière serait stable sans l'environnement de la matière. On a fabriqué des atomes d'anti-Hydrogène.
- En 2007, le LHC au CERN, va faire des collisions $p + \bar{p}$ à hautes énergies. On espère de nouvelles découvertes.

Chapitre 3

Mécanique non relativiste du point

Dans ce chapitre, on rappelle les fondements et les caractéristiques de la mécanique de Newton (1687).

Tout d'abord un rappel sur le vocabulaire :

- La **cinématique** concerne les propriétés de l'espace-temps et la description des trajectoires des objets (vitesse, accélération). La cinématique ne se soucie pas des causes du mouvement (que sont les forces). La cinématique dira par exemple qu'une pomme est tombée de l'arbre de 3m de haut, avec une accélération constante vers le bas.
- La **dynamique** relie les effets cinématiques (trajectoire d'un objet) aux causes du mouvement (forces extérieures qui agissent sur l'objet). La dynamique dira par exemple que la pomme est tombée parce qu'elle est attirée par la Terre selon la loi $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$.

3.1 Eléments de cinématique

3.1.1 Quatre notions de cinématique

Les quatre notions (bien connues) de cinématique présentée ci-dessous sont valables pour la cinématique non-relativiste comme pour la cinématique relativiste.

1. Les mouvements s'effectuent dans l'espace-temps. Le **temps** repéré par une variable t , (de dimension 1).
L'**espace** est de dimension 3. A un instant donné, on repère un objet par ses trois coordonnées x, y, z dans un **repère**. (un repère consiste en une origine O et 3 axes Ox, Oy, Oz).
L'espace-temps est donc de dimension $3+1 = 4$.
2. Un **référentiel** est le choix de repère à chaque instant. (ex : référentiel terrestre, référentiel du train...).
3. Un **évènement** se passe à un instant précis, en un lieu précis (pas de durée, pas d'extension) ;

Dans un référentiel donné, un évènement est caractérisé par *un point dans l'espace-temps* (x, y, z, t)

Ex : une explosion, un évènement historique,...

C'est une notion simple mais *très importante*.

4. La **trajectoire** d'un objet est caractérisée dans un référentiel par $(x(t), y(t), z(t))$ et forme une **ligne d'univers** dans l'espace-temps.

Voir sur la figure 1 l'exemple d'une balle qui rebondit à 1 dimension x (cela donne un espace temps de dimension 2+1), et l'exemple d'un point qui tourne à vitesse angulaire constante dans le plan (x, y) (cela donne un espace-temps de dimensions 2+1).

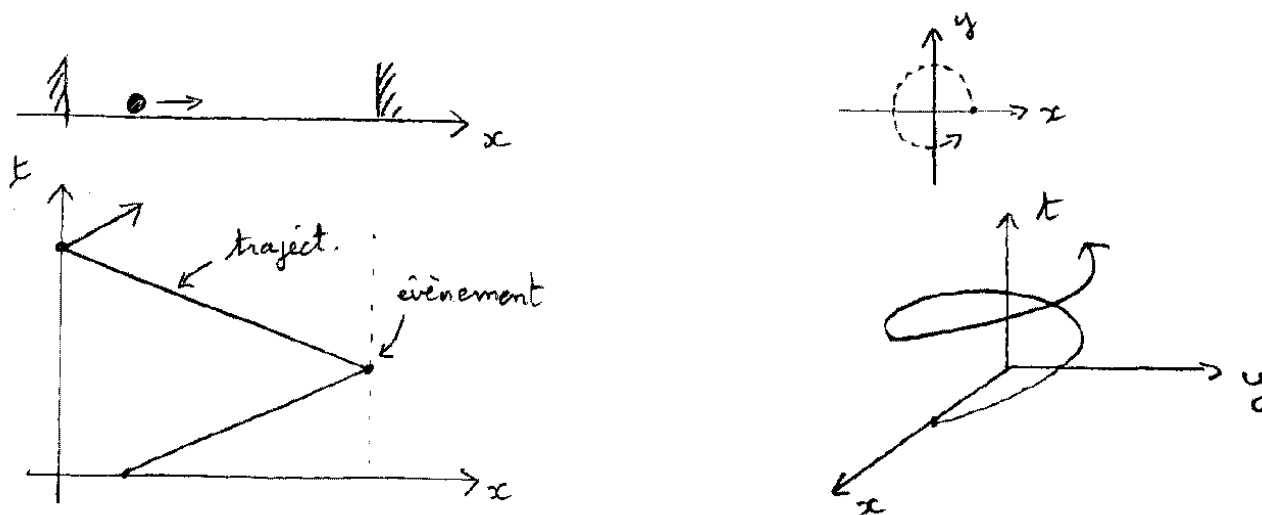
Sur ce schéma,

la pente de la ligne d'univers est reliée à la vitesse : $\Delta t / \Delta x = 1/v$.

La pente devient nulle dans la limite où la vitesse devient infinie.

Pour tout objet, on peut choisir un référentiel tel que à tout instant, cet objet soit immobile et au centre $x = y = z = 0$ (Mais l'orientation est arbitraire). Dans ce cas, la ligne d'univers de cet objet se confond donc avec l'axe t . (voir exemple ci-dessous)

Remarque : la ligne (courbe) d'univers d'un objet ne peut s'interrompre en général. En effet, une ligne possédant une extrémité vers le futur correspondrait à un objet qui disparaît subitement. Cela peut se produire dans le cas d'une particule instable qui se désintègre. Réciproquement, une particule qui apparaît, possède une ligne d'univers qui a une extrémité vers le passé. Voir figure 16.



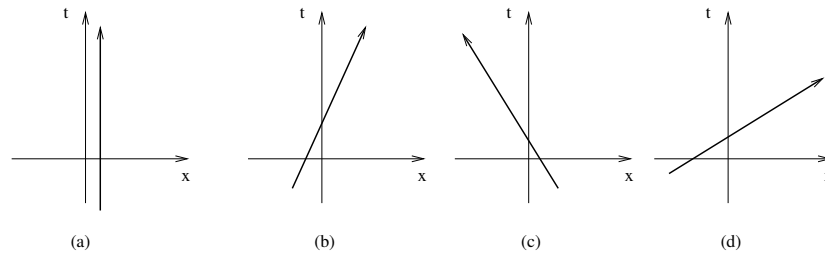
Petit exercice de compréhension :

Voici 4 schémas montrant une ligne d'univers d'une particule dans un référentiel donné.

On note $v \in \mathbb{R}$ la vitesse de la particule

1. Classer les schéma par vitesse v_x (algébrique) croissante.

2. Classer les schéma par module de vitesse $|v|$ croissante.



Solution : 1 : (c-a-b-d) ; 2 :(a-b-c-d).

3.1.2 Caractéristiques de la mécanique Newtonienne

Les notions ci-dessous sont aussi des “piliers” de la mécanique de Newton et Galilée, mais sont remises en cause en physique relativiste. La notion la plus importante est celle de simultanéité.

Simultanéité en physique non relativiste :

La notion de **durée** $\Delta t = t_2 - t_1$ qui est le temps écoulé entre deux évènements est une notion **absolue**, i.e. indépendante du référentiel.

En particulier, la **simultanéité** (lorsque la durée est $\Delta t = 0$) est une notion absolue .

Imaginons que l’on relie ensemble tous les évènements de l’espace temps qui sont simultanés entre eux. On obtient un espace-temps “feuilleté“ (voir figure 2).

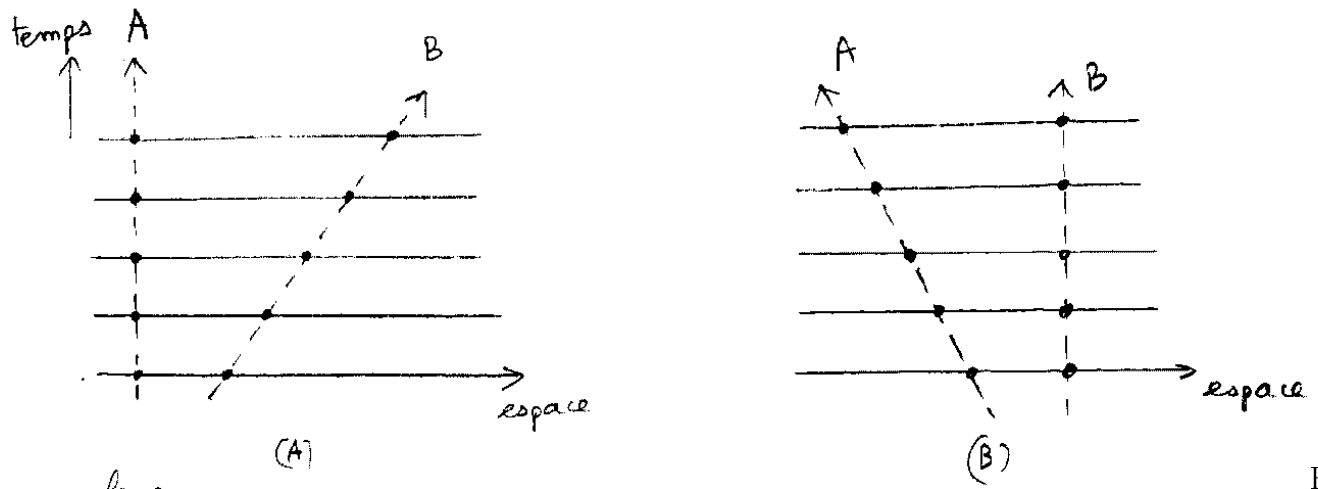
Exercice :

2 objets A et B confondus à $t = 0$ s’éloignent l’un de l’autre dans la direction x à la vitesse $v = 1m/s$. Chacun clignote à intervalle régulier et simultanément.

1. Tracer dans l’espace-temps les lignes d’univers de A et B. On fera un schéma dans le référentiel (x, t) de A et un schéma dans le référentiel (x', t') de B. Solution : voir figure 2.
2. Tracer les lignes de simultanéité aux clignotements.
3. Tracer la position d’un évènement M : $x_M = 3m, t_M = 3s$. Calculer et tracer (x'_M, t'_M) .

Solution : $x'_M = BM = BA + AM = -AB + AM$. Or $AB = v.t$ et $AM = x$, donc $x' = x - vt = 0$. Et $t' = t = 3s$.

Remarques importantes : Les axes x, x' sont des **axes de simultanéité**, et les axes t et t' sont des **axes d'immobilité** pour chacun des objets A et B. Remarquer que les 2 schémas sont deux points de vue équivalents : ils décrivent la même situation physique, de deux points de vues (référentiels) différents. C'est une illustration du **principe de relativité de Galilée**.



Fig

2

(A) : dans le référentiel de A

(B) : dans le référentiel de B. (@@ à corriger)

Autres caractéristiques de la physique non relativiste :

- A un instant donné, il n'y a pas de repère privilégié (absolu). Il y a **invariance par translation** (i.e. on a mis du temps à l'admettre, mais on n'est pas au centre du monde), et **invariance par rotation** (Pour un cosmonote qui flotterait dans l'espace, il n'y a ni haut ni bas).
- La distance entre deux évènements a un sens absolu seulement s'ils sont simultanés. **Contre-exemple :** Pour la lampe de l'objet B entre deux éclairs, sur la figure 2, il y a une distance 1 sur la figure A, et une distance 0 sur la figure B. Autre exemple : décollage et atterissage d'un même avion.
- Il y a des référentiels privilégiés appelés **référentiels Galiléens** ou **référentiels d'inertie**. Il y a celui qui est immobile par rapport aux étoiles et Galaxies qui nous entourent (où le rayonnement fossile à 3 degrés Kelvin, est immobile), et ceux qui sont en **translation rectiligne et uniforme** par rapport à celui ci.
 Ex : le référentiel terrestre en 1ere approximation est un référentiel Galiléen (en considérant sur un laps de temps, que la Terre avance en ligne droite dans l'espace). De même pour le référentiel d'un train à vitesse constante, etc..

Contrex : le référentiel tournant d'un tourniquet ou celui d'une voiture qui accélère, etc... sont des référentiels non Galiléens.

— Schéma de référentiels accélérés 1+1 Dimensions :figure 3.1

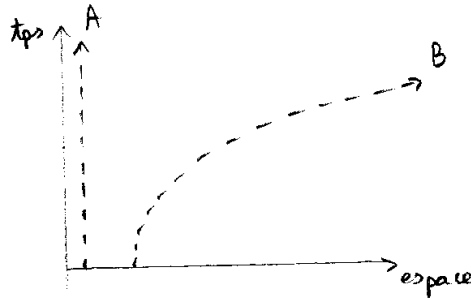


FIGURE 3.1 – B s'éloigne de A en mouvement accéléré.

— Vitesse et accélération : ce sont des vecteurs qui dépendent du référentiel considéré.

$$v_x = \frac{dx}{dt} \dots$$

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} \dots$$

(Formules de composition de vitesses, voir TD ;).

Cependant, l'accélération est la même dans tous les référentiels Galiléens. (exercice : à démontrer).

3.2 Dynamique de Newton

Les formules ci-dessous ne sont pas valables en relativité d'Einstein.

Un objet est caractérisé par sa **masse** m .

S'il subit des forces extérieures à chaque instant \vec{F} alors son accélération \vec{a} , dans tout référentiel Galiléen est selon la **Loi de Newton** :

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

Son **impulsion** est

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Son **énergie cinétique** est

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

Remarque : la Loi de Newton s'écrit aussi :

$$d\vec{p}/dt = \vec{F} \quad (3.1)$$

Exemple : accélération d'un électron par champs électrique \mathcal{E} constant. Alors $F = q\mathcal{E}$, donc $md^2x/dt^2 = F = q\mathcal{E}$, donc :

$$x(t) = \frac{1}{2} \frac{q\mathcal{E}}{m} t^2 \quad (3.2)$$

si $v(0) = x(0) = 0$. L'électron devrait donc atteindre la vitesse c au bout du temps

$$t = \frac{cm}{q\mathcal{E}}$$

Mais cette conclusion est fautive car le domaine de validité de la théorie de Newton non relativiste se limite aux vitesses $v \ll c$.

3.3 Remise en cause de la mécanique Newtonienne

Raisons historiques :

— **Invariance de Lorentz et équations de Maxwell :**

Les équations de Maxwell établies en 1885 décrivent le comportement des ondes électromagnétiques (la lumière, les ondes radio, les rayons X, les champs électriques et magnétiques statiques en sont des cas particulier). Elles possèdent une invariance sous les transformations de Lorentz relativistes (voir plus loin). Elles contiennent la vitesse c comme paramètre. Cela est mystérieux et incompris à l'époque. A ce propos, lire Feynmann chap 15-2.

— **Expérience de Michelson-Morley (1887) (voir TD) :**

Cette expérience avait pour but de mettre en évidence la vitesse de la Terre ($v = 2\pi R/T = 30\text{km/s}$) par rapport à "l'éther". L'éther était une substance hypothétique au XIXème, qui serait le support des ondes électromagnétiques (comme l'air pour le son). D'après la loi de composition des vitesses, on s'attendait à observer une modification de la vitesse de la lumière au cours de l'année. Voir figure 4 ; BC'B' prend du retard ; BE'B' prend plus de retard. Lorentz a montré que la non observation de décalage correspond à une contraction de longueur selon le mouvement d'un facteur

$$L' = L\sqrt{1 - (v/c)^2}$$

Calcul : cf TD, cf Feynmann 15-3.

Conclusion de l'expérience : il n'y a pas d'éther, et **la vitesse de la lumière est indépendante du référentiel**. La loi de composition des vitesses est donc mise à défaut.

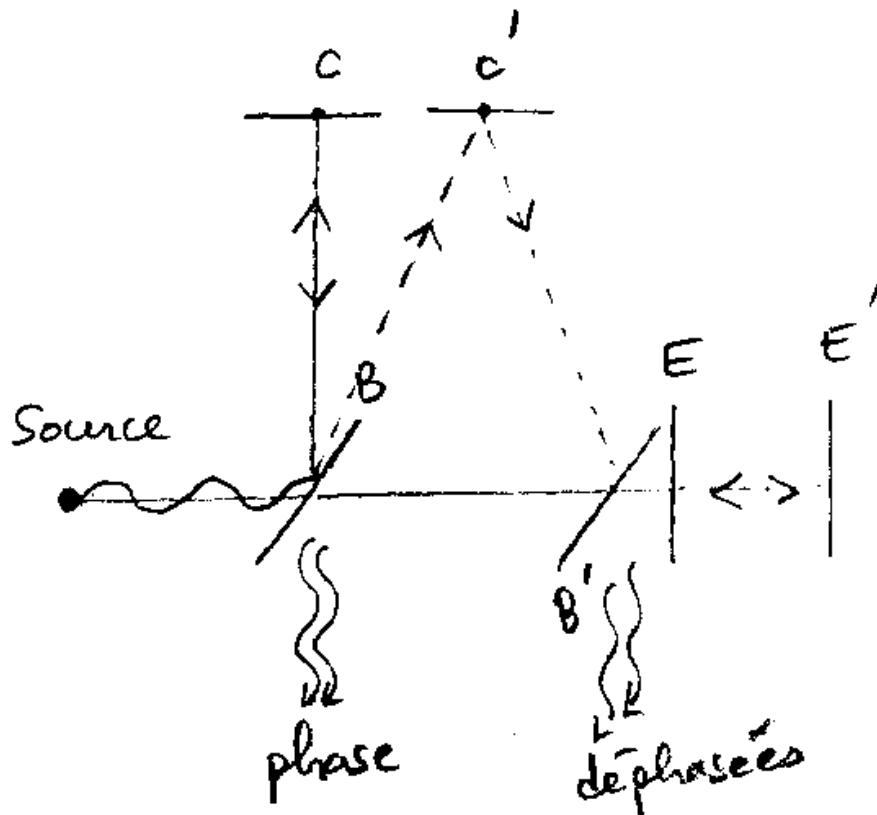


Fig 4

Schéma de l'expérience de Michelson

Cette conclusion surprenante et inexplicable à l'époque, peut s'exprimer de la façon suivante : si un personnage A envoie un pulse lumineux dans la direction x , le pulse part à la vitesse c . Si le personnage B part dans cette direction à la vitesse $c/2$, la mécanique de Galilée prédit qu'il devrait voir le pulse lumineux s'éloigner à la vitesse $c/2$. Or l'expérience montre qu'il voit le pulse s'éloigner encore à la vitesse c (comme pour A).

Expériences plus récentes

La non universalité de la durée du temps se manifeste dans la désintégration des muons cosmiques qui ont des vitesses v proches de c . Ces muons naissent en haut de l'atmosphère ($h = 10\text{km}$) et s'observent sur Terre. La durée de vie moyenne du muon mesurée en laboratoire (sur des muons presque immobiles) est

$$\tau = 2.10^{-6}\text{s}$$

(Précisément cela signifie qu'une grande population de n_0 muons va décroître selon la loi exponentielle $n(t) = n_0 e^{-t/\tau}$).

Donc la distance maximale que devrait pouvoir parcourir le muon dans l'atmosphère est

$d = c\tau = 600m$. Ils devraient donc se désintégrer tous en haute atmosphère, et on ne devrait pas en observer à la surface de la Terre.

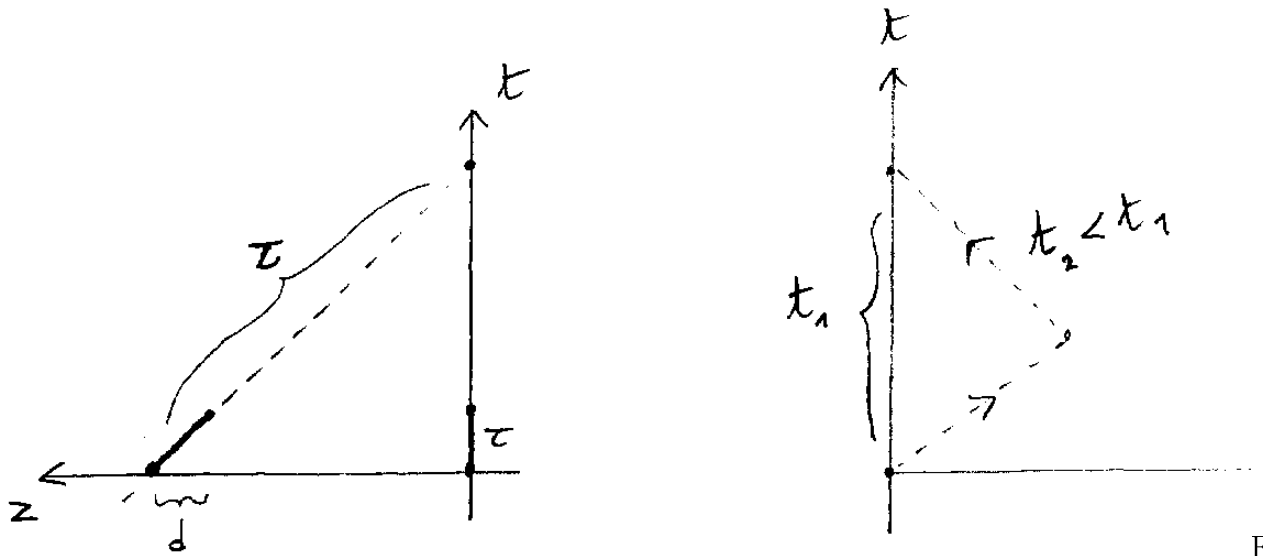
Autrement dit, si ils avançaient à la vitesse de la lumière c , pour traverser toute l'atmosphère ils leur faut le temps

$$t = \frac{h}{c} = \frac{10km}{c} = 3,3 \cdot 10^{-5} s = 16\tau$$

bien supérieur à leur durée de vie τ .

Et pourtant, l'expérience montre que les muons atteignent le sol. Comment l'expliquer ? Quelles conséquences cela a-t-il ?

En admettant qu'un muon a une durée de vie τ en toutes circonstances, ce phénomène montre que les muons "voient" une atmosphère d'épaisseur $d = 600m$, et la traversent dans la durée τ . Par contre un "terrien" immobile perçoit une atmosphère d'épaisseur $h = 10km$, et observe que les muons la traverse en la durée $t = 16\tau$! D'après cette expérience, on doit conclure que la mesure des durées et des distances dépendent donc de l'observateur ! (contrairement à ce qu'énonce la mécanique de Newton). Voir figure 5.



Fig

5

- (a) : Schéma de la ligne d'univers des muons
- (b) : Ligne d'univers de deux horloges atomiques

Des expériences récentes de synchronisation d'horloges atomiques, une qui reste sur Terre, et l'autre qui part dans un avion supersonique faire un tour et qui revient, illustrent le "paradoxe des jumeaux de Langevin". Voir figure 5 et TD.

En conclusion : Le temps s'écoule différemment selon les observateurs (les référentiels).

Ces expériences remettent en cause la figure 2, et le feuilletage par un temps universel.

Chapitre 4

Cinématique relativiste

On va essayer de suivre la démarche, effectuée par Einstein (1905) : pour expliquer les faits surprenants énoncés ci-dessus, il faut **redéfinir les propriétés géométriques de l'espace-temps**.

Remarque (ref : Weinberg “Cosmologie” chap 1) : Einstein n’a pas mentionné l’expérience de Michelson. Il est plutôt parti de l’invariance des lois de l’électromagnétisme par changement de référentiel.

4.1 “Construction” des principes de la relativité

Dans cette section on cherche les lois de transformation lors de changement de référentiels (formules de Lorentz).

On prendra comme principe (imposé par l’expérience de Michelson) que **la vitesse de la lumière est constante, et indépendante du référentiel**.

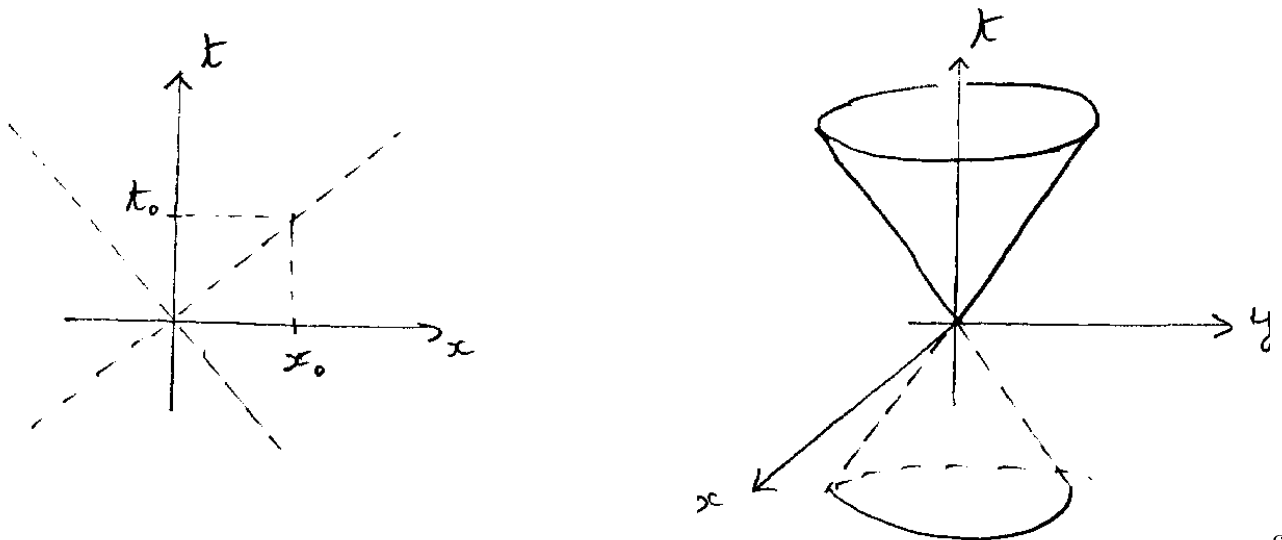
On va faire cette construction en deux étapes, en imaginant **deux expériences**, et à l’aide de schémas dans l’espace-temps.

4.1.1 Le cône de lumière

Une première conséquence de la constante de la vitesse c de la lumière, est que : dans tout référentiel d’espace-temps (x, y, z, t) , la ligne d’univers d’un pulse lumineux se trouve sur le **cône de lumière** de pente c qui a pour équation :

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = ct$$

figure 6 : schéma à (1+1) dimensions et (1+2) dimensions.



fig

6

Remarque : il est courant de reporter ct sur l'axe temporel, et donc d'utiliser les axes (ct, x) . Chacun a la dimension d'une longueur. par rapport à ces axes, le cône de lumière a une pente à 45° .

Cela revient aussi à choisir une distance unité x_0 , et un temps unité $t_0 = x_0/c$ (ex : $x_0 = 1m$, $t_0 = 3,3 \cdot 10^{-9}s. = 3,3ns.$ ou $x_0 = 300000km$, $t_0 = 1s.$).

Autrement dit, le cône de lumière sert à **grader les axes x et ct l'un par rapport à l'autre**, en envoyant un pulse lumineux de l'évènement $(t = 0, x = x_0)$ vers l'évènement $(t = t_0, x = 0)$.

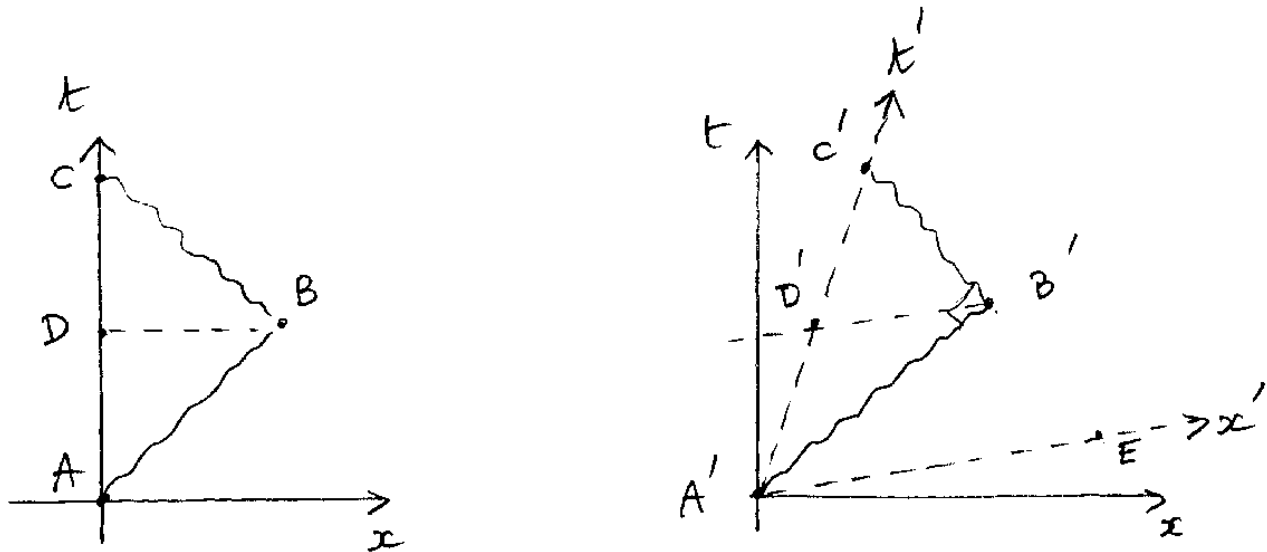
4.1.2 Notion de simultanéité et axes des référentiels d'inertie

Imaginons un observateur O lié au référentiel (x, ct) , et quatre évènements :

1. A : il émet un pulse lumineux dans la direction x, et déclenche un chronomètre.
2. B : réflexion du pulse lumineux vers l'observateur.
3. C : réception du pulse lumineux, et arrêt du chrono, qui marque T.
4. D : évènement mi-temps $T/2$ pour l'observateur et le chrono, entre A et C.

Exercice :

Placer les quatres évènements dans le référentiel (x, ct) . Solution : figure 7 (a)



7

Fig

Par définition, on dira que :

D et B sont deux évènements simultanés pour l'observateur O.

Remarques :

1. Comment définir autrement la simultanéité pour deux évènements distants? Cette définition semble la plus naturelle.
2. L'axe d'espace x du référentiel de l'observateur O est parallèle à DB. **L'axe x (qui contient les évènements caractérisés par $t = 0$), est donc un axe de simultanéité pour O.**
3. L'axe ct du référentiel de l'observateur O est confondu avec sa ligne d'univers. **L'axe ct est donc un axe d'immobilité pour O.**

Exercice :

Considérons un autre observateur O' dont le référentiel propre est (x', ct') , qui a la vitesse v par rapport à O. Il fait la même expérience : il émet un pulse lumineux en $A'=A$ dans la même direction, et de même on définit les évènements B', C', D' . Les axes (x', ct') sont des axes de simultanéité et d'immobilité pour O' .

Construction : Voir figure 7 (b).

Il en découle les propriétés suivantes :

1. Sur la figure, l'axe x' est le symétrique de l'axe ct' par rapport à la trajectoire lumineuse $A'B'$.

Démonstration : soit A'E symétrique de A'C' par rapport à A'B'. On a A'EC' triangle isocèle et A'B' orthog à EC', donc B' milieu de EC', or D' milieu de A'C', donc A'E // D'B' (théorème de Thalès).

2. D' et B' simultanés pour O' ne le sont pas pour O, car pour O, D' est antérieur à B'.

De même pour O', B est antérieur à D.

3. Les graduations sur les axes x' et ct' sont les mêmes, cad A'E=A'C' (imaginer le signal retour). Mais on ne connaît pas encore la valeur de cette graduation (voir paragraphe suivant).

Conclusion du paragraphe :

En relativité la disposition relative des axes (x, ct) et (x', ct') de deux référentiels figure 7, est différente du cas non relativiste, figure 2, où les axes x et x' étaient confondus. **On a perdu la notion de simultanéité absolue.** Elle devient relative à l'observateur (référentiel).

4.1.3 Graduation des axes

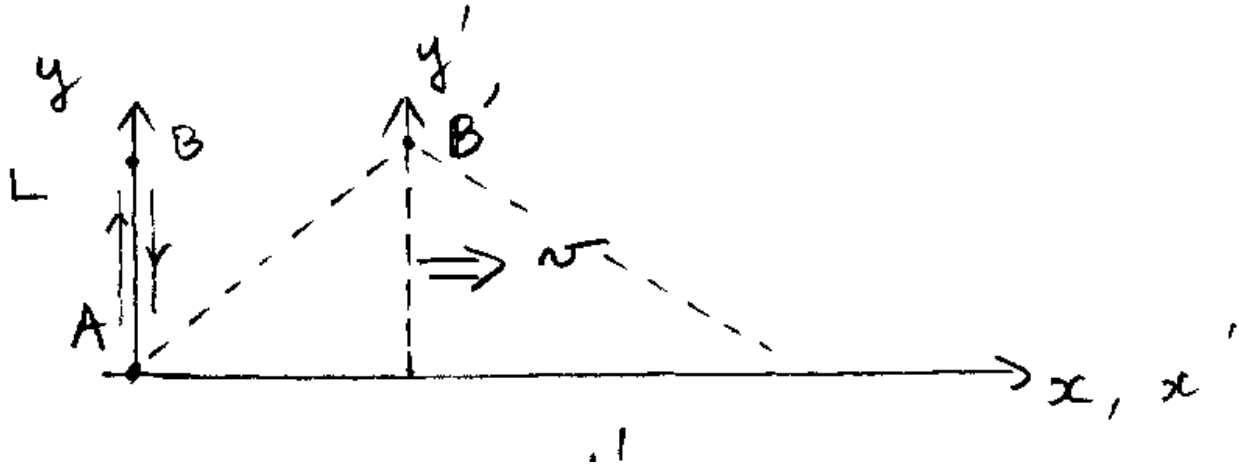
Pour connaître la façon dont le temps et l'espace sont mesurés selon les observateurs O et O', il nous reste à connaître la graduation en unités sur les axes (x, ct) et (x', ct') de la figure 7.

Pour cela nous allons construire un événement sur l'axe t' , et voir comment il est perçu par O.

Il nous faut imaginer une expérience dans l'espace-temps (x, y, ct) lié à l'observateur O. Notons L une unité de longueur.

L'observateur O' est en mouvement par rapport à O, à la vitesse v selon la direction x . On considère deux événements :

1. A : O' envoie un pulse lumineux selon la direction verticale y' à l'instant $t' = 0$.
2. B' : réflexion en $y' = L$. Ainsi le temps écoulé entre A et B' est l'unité de temps pour O'.



8a

Fig

Exercice

1. Calculer les coordonnées (x', ct') de l'évènement B' dans le référentiel de O'.
2. Quelle relation y a-t-il entre x et ct (coordonnées de l'évènement de B' dans le référentiel de O) ?
3. Placer l'évènement B' dans un schéma espace-temps avec les axes (x, ct) et (x', ct') ?

Solution :

calcul sur la fig 8a ;

Dans le référentiel de O', $x' = 0$ et $ct' = L = ct_0$ puisque la lumière se propage à la vitesse c dans le référentiel de O'.

et :

$$ct = AB' = \sqrt{x^2 + L^2}$$

donc

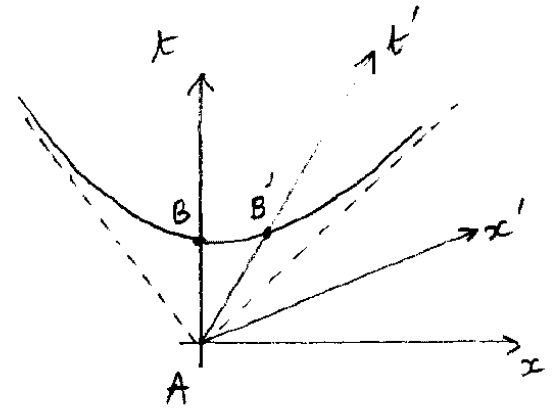
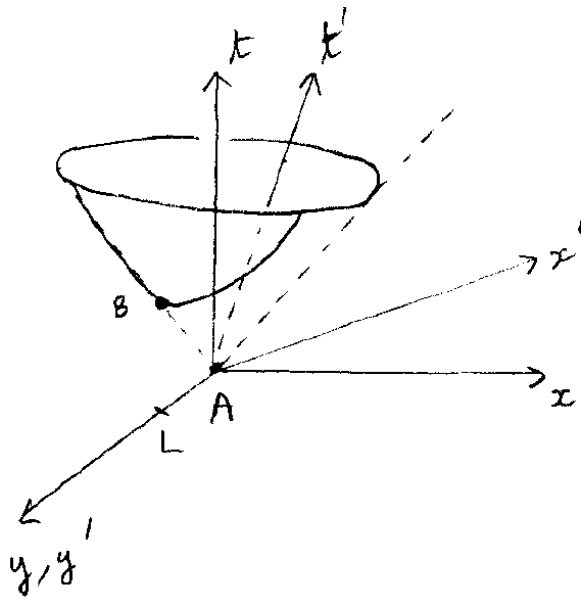
$$(ct)^2 - x^2 = L^2 = (ct_0)^2$$

qui montre que dans le plan (x, ct) l'évènement B' appartient à une **hyperbole**.

Dans le cas où $v = 0$ B et B' sont confondus sur la figure 8b. Autrement dit, d'après la graduation de l'axe t , entre A et B il s'est passé la durée t_0 .

On déduit :

Interprétation de l'hyperbole : l'hyperbole relie la même graduation sur deux axes ct et ct' différents.



Fig

8b

On a établi ci-dessus que l'axe x' est symétrique de l'axe ct' par rapport au cône de lumière. Voir figure 7. On a peut construire des hyperboles symétriques par rapport au cone de lumière Voir figure 9.

Exercice :

Placer un évènement B quelconque et lire graphiquement ses coordonnées (x, ct) et (x', ct') . Voir figure 9. Les formules qui relient (x, ct) et (x', ct') sont appelées les formules de **transformation de Lorentz** et seront établies ci-dessous.

Remarques :

- Solution équivalente de l'exercice sans calcul par un dessin dans l'espace temps (2+1) dim plus délicat. voir schéma : fig8a-b. Les axes y et y' sont confondus. L'évènement B' se trouve donc à l'intersection : du plan $y = y' = L$, et du cône de lumière issu de A du plan $x' = 0$.
 Tout d'abord l'intersection $y = L$ et du cône forme une hyperbole
 On projette l'hyperbole sur le plan (x,t) , ce qui donne l'hyperbole ci-dessus.

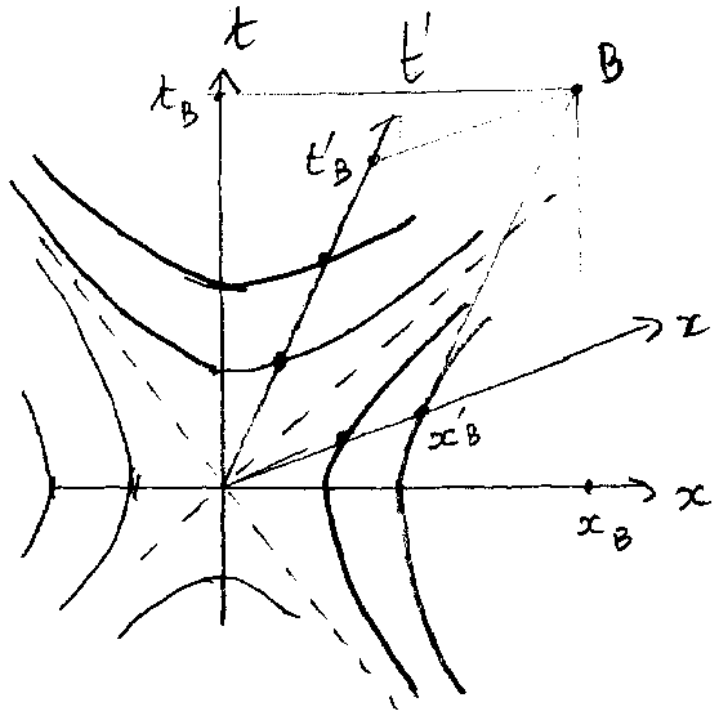


Fig 9

- Si l'on devait identifier les graduations de t et t' à l'aide d'un compas, (ce qui est courant en géométrie du plan), l'hyperbole serait remplacée par un cercle. On dit que cette géométrie est la "géométrie Euclidienne" ou "géométrie Riemannienne". Par contre, on dit que la géométrie de l'espace-temps est la "géométrie hyperbolique" ou "géométrie de Minkowski" ou "géométrie Pseudo-Riemannienne".
- Pour (2+1) Dim, les hyperboles sont remplacées par des hyperboloïde à 1 nappe et deux nappes. d'équation

$$(ct)^2 - (x^2 + y^2) = L^2$$

Voir figure 10

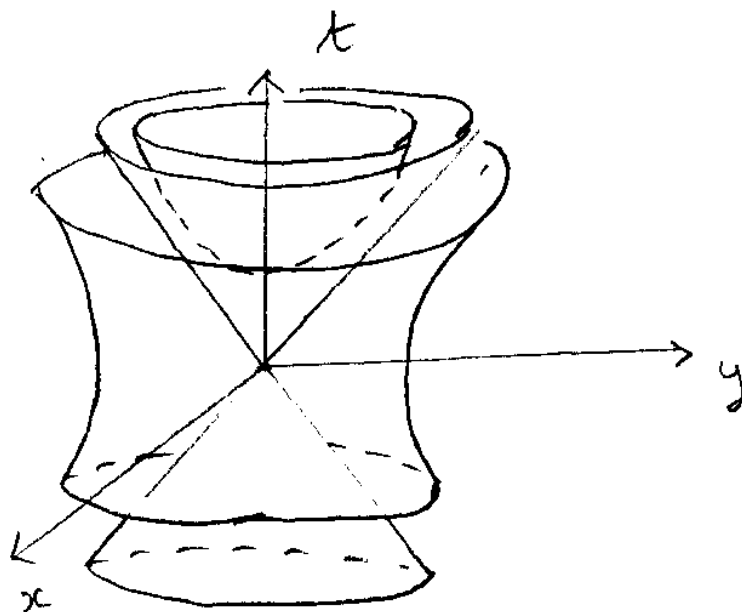


Fig 10

— Dessin de différents référentiels possibles à (1+1) Dim. Voir figure 11

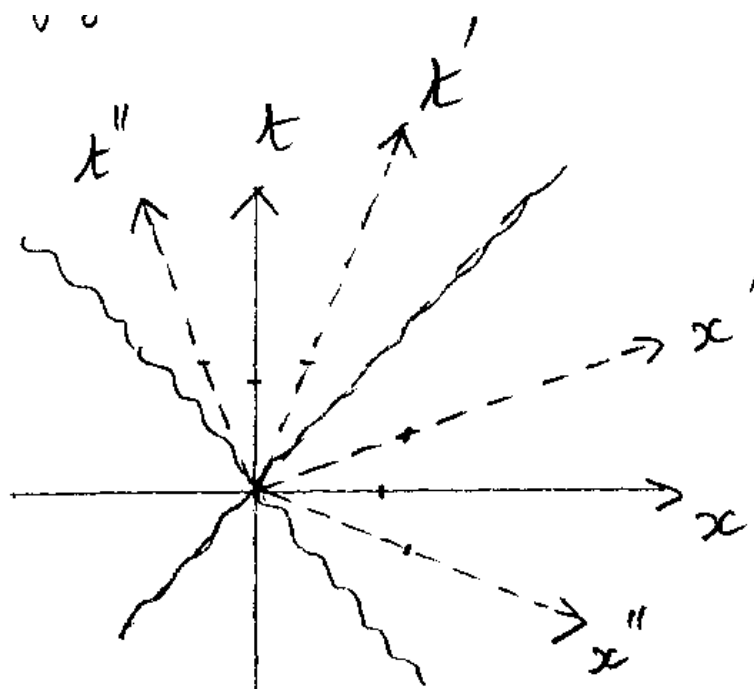


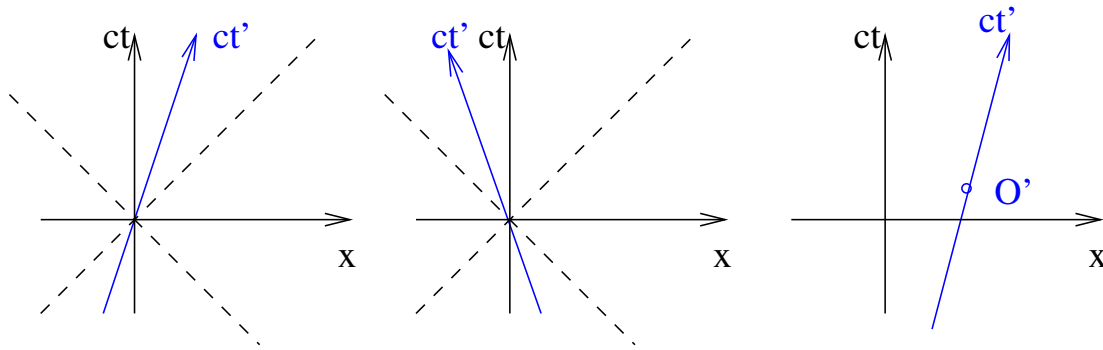
Fig 11

En ondulé les cones de lumière.
Le référentiel (x,t) est immobile

Le réf (x', t') va vers la droite
 Le réf (x'', t'') vers la gauche.

- Pour des vitesses faibles, $t' = t$, si on approxime le fond de l'hyperbole par sa tangente.
 Cela redonne le feuilletage de la mécanique classique où le temps est absolu.

Exercice : Dessiner les axes (ct', x') dans les cas suivants



4.2 Formules des transformations de Lorentz et invariant relativiste

4.2.1 Etablissement des formules

Exercice :

Considérons deux évènements distincts A et B. L'écart AB entre les deux évènements est appelé un **quadri-vecteur**.

Considérons deux référentiels (x, ct) (x', ct') de vitesse relative v selon la direction x .

Dans le référentiel (x, ct) , on note :

$$t = t_B - t_A$$

$$x = x_B - x_A$$

et de même dans le référentiel (x', ct') .

Le quadri-vecteur AB est donc repéré par ses coordonnées (x, ct) et (x', ct') . (A est à l'origine sur la figure 9).

Trouver les relations entre (x, ct) et (x', ct') en fonction de v ?

Solution :

ce sont des transformations linéaires, donc de la forme :

$$\begin{aligned}x' &= ax - b(ct) \\(ct') &= -ex + d(ct)\end{aligned}$$

Il faut trouver les coefs inconnus a, b, c, d en fonction de la vitesse v .

indice 1 : si B est sur l'axe t' alors : $x' = 0$ et $v = x/t$.

indice 2 : symétrie par rapport au cône de lumière. Les solutions sont donc invariantes par le changement :

$$\begin{aligned}x &< - > (ct) \\x' &< - > (ct')\end{aligned}$$

indice 3 : Si B est sur l'axe ct' , ses coordonnées (x, ct) vérifient l'équation d'une hyperbole (figure 8b) :

$$\begin{aligned}x' &= 0 \\(ct)^2 - x^2 &= (ct')^2\end{aligned}$$

Tout cela donne

$$\begin{aligned}a &= d = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \gamma \\b &= e = \sqrt{a^2 - 1} = \frac{(v/c)}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \gamma(v/c)\end{aligned}$$

Sous forme matricielle **la transformation de Lorentz** s'écrit finalement :

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}$$

avec

$$\beta = v/c$$

et

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Il n'y a pas modif des longueurs dans les directions transverses au mouvement :

$$\begin{aligned}y' &= y \\z' &= z\end{aligned}$$

4.2.2 Composition de deux transformations (*)

Pour composer deux transformations de Lorentz, il suffit d'effectuer le produit des matrices. (cf TD). On observe alors que

$$\chi = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + v/c}{1 - v/c} \right)$$

(qui s'appelle la **rapidité**) s'additionne.

4.2.3 Distance invariante entre deux évènements AB

A partir de la transformation de Lorentz ci-dessus, on obtient que :

$$g(AB) = (ct)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = (ct')^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) \quad (4.1)$$

$g(AB)$ est donc **une grandeur invariante**, (i.e. indépendante du référentiel dans lequel on la calcule) qui caractérise donc **l'intervalle** séparant les évènements A et B.

(C'est une propriété essentielle, très utile pour les exercices).

Preuve : par le calcul ou graphiquement sur la figure 9, on lit facilement la valeur de $g(AB)$: elle est donnée par l'hyperbole à laquelle appartient l'extrémité B, lorsque A est placé à l'origine.

4.2.4 Les différents types de quadrivecteurs.

On peut alors classer l'évènement B par rapport l'évènement A dans une des 3 catégories :

1. Intervalle de **type temps** : si $g_{AB} > 0$.

Cela signifie qu'il existe un référentiel (x, t) appelé **référentiel propre de AB**, pour lequel $x_A = x_B = 0$. Dans ce référentiel, A et B sont au même endroit, en des temps différents t_A, t_B . Il existe une ligne d'univers passant en A et B.

Pour tous les observateurs, A et B se suivent dans le même ordre temporel. Par exemple A est l'écriture d'une Lettre par Jules. B est la réception de la lettre par Sophie.

Remarquons que dans ce référentiel

$$g(AB) = c^2(t_B - t_A)^2 \quad (4.2)$$

On appelle $\tau = (t_B - t_A) = \sqrt{g(AB)}/c$ le **le temps propre** entre A et B.

2. Intervalle de **type lumière** : si $g_{AB} = 0$

Cela signifie qu'il existe un pulse lumineux qui passe en A et B ; A et B se trouvent sur le même cône de lumière.

3. Intervalle de **type espace** : si $g_{AB} < 0$

Dans ce cas, il existe un référentiel pour lequel $t_A = t_B = 0$. Dans ce référentiel, A et B sont des évènements simultanés, en des lieux différents x_A, x_B , et $g(AB) = -(x_B - x_A)^2$. Pour certains référentiels A est avant B, et pour d'autres, B est avant A.

Il ne peut donc pas y avoir de relation de cause à effet entre A et B. On dit que B est dans "**l'ailleurs**" de A.

SCHEMA fig 12

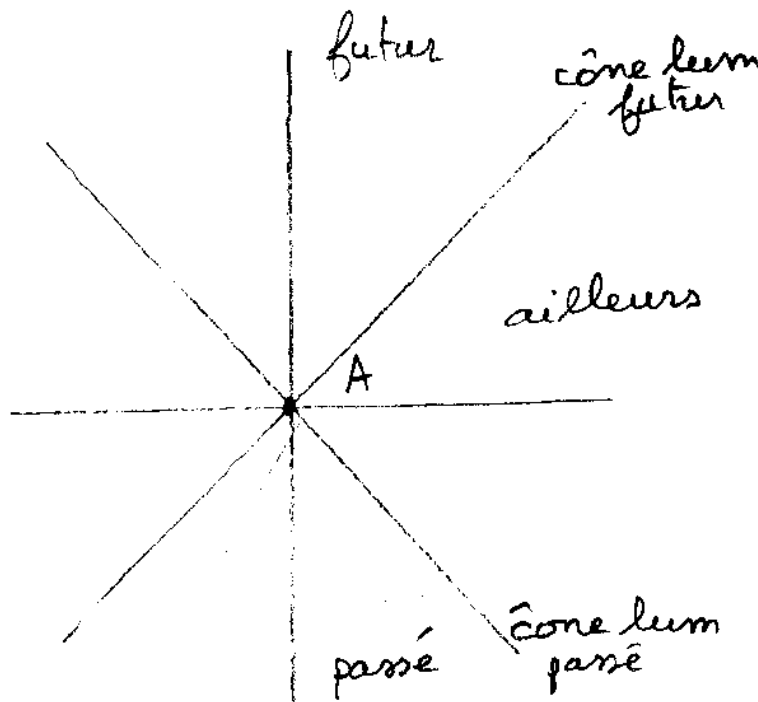


Fig 12

En fait, B se situe par rapport à A dans une des cinq catégories : **futur, cône de lumière futur, ailleurs, cône de lumière passé, passé.**

A et B peuvent être reliés par une relation de cause à effet seulement si l'un est dans le cône de l'autre (et réciproquement).

4.2.5 Vitesse maximale d'un objet macroscopique : c

Un objet macroscopique ne peut se déplacer plus vite que la lumière c .

En effet imaginons que cet objet soit un être humain, ou autre objet complexe, dont le devenir B dépend du passé A (i.e. flèche du temps bien définie, entropie croissante, ou complexité croissante).

Par exemple : A : verre qui tombe ; B : verre qui casse ; ou A : écriture d'une lettre ; B :

reception de cette lettre.

Si dans un référentiel, la vitesse de l'objet pour passer de A à B est supérieure à c , les deux évènements A et B sont séparés par un intervalle de type espace ; B est donc dans "l'ailleurs" de A ;

Il est donc possible d'imaginer un autre observateur pour lequel B serait antérieur à A, cf fig 11, ce qui est absurde !

(Ce raisonnement n'est pas valable au niveau des particules élémentaires. Peut-on espérer observer des **tachyons** particules qui iraient plus vite que la lumière?)

4.2.6 Phénomène de dilatation du temps

Reprenons l'expérience de désintégration des muons cosmiques. soit v sa vitesse de chute dans le référentiel terrestre, et τ sa durée de vie (temps de vie moyen dans son propre référentiel).

On note A l'évènement d'apparition du muon, et B sa désintégration. On note (z, ct) les coordonnées dans le référentiel terrestre, et (z', ct') les coordonnées dans le référentiel du muon.

Exercice

Calculer la durée de vie t du muon dans le référentiel terrestre.

(a) Réponse en utilisant la distance invariante entre A et B :

D'une part, on a :

$$x_B - x_A = v(t_B - t_A)$$

et $t = t_B - t_A$, $\tau = t'_B - t'_A$, $x'_B = x'_A$.

On remarque que τ est le temps propre entre A et B.

$$c^2(t_B - t_A)^2 - (x_B - x_A)^2 = (c\tau)^2$$

donc

$$t = t_B - t_A = \frac{\tau}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \gamma\tau$$

avec

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \geq 1$$

Donc

$$t = \gamma\tau \geq \tau$$

Ce résultat s'appelle la dilatation du temps, et est bien visible sur la figure 13.

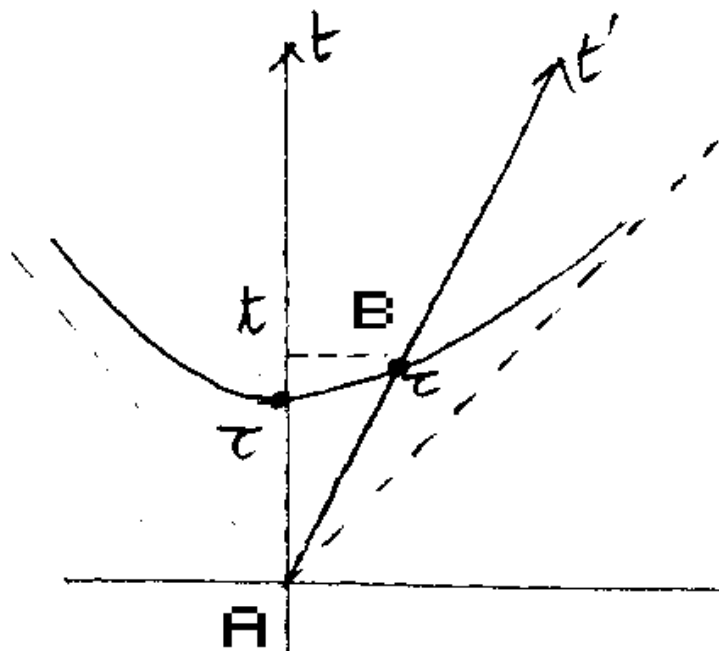


fig 13

(b) Réponse en utilisant la transformation de Lorentz :

$$0 = x - \beta ct$$

$$c\tau = \gamma(-\beta x + ct)$$

donc

$$x = vt$$

$$c\tau = \gamma\left(-\frac{v^2}{c} + c\right)t$$

donc $t = \gamma\tau$.

Application numérique :

Supposons que pour les muons $h = vt = 10km$. (épaisseur de l'atmosphère)

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{c\tau}{h}\right)^2} \simeq 1 - (c\tau/h)^2$$

$$= 1 - (0,6/10)^2 = 1 - 0,0036$$

donc

$$v = (0,9964)c$$

donc

$$\gamma \simeq \frac{h}{c\tau} = \frac{100}{6} = 16,6$$

Les muons sont donc "très-relativistes".

4.2.7 Phénomène de contraction des longueurs

Exercice :

Imaginons une barre de longueur fixe ($L = 1\text{m}$) immobile pour l'observateur O.

L'observateur O' avance à la vitesse v dans la direction de la barre.

Quelle est la longueur L' de la barre perçue par l'observateur O' ?

(a) Réponse en utilisant l'invariant relativiste de AB :

d'après la figure 14, on voit que $L' \leq L$. C'est la contraction des longueurs.

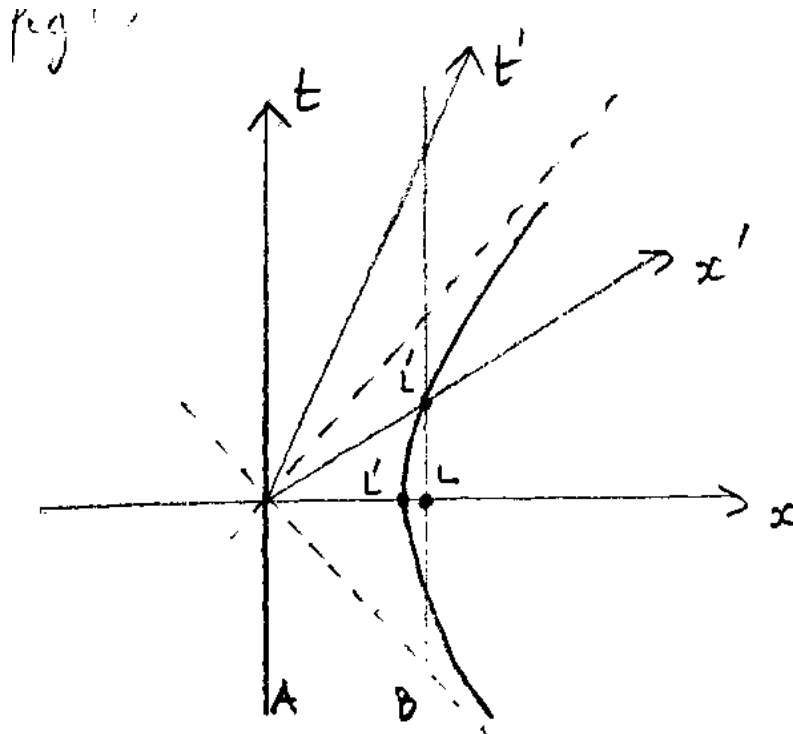


Fig 14

Pour faire le calcul, on note (x, t) et (x', t') les référentiels respectifs de O et O'. Considérons les événements A et B qui sont situés aux deux extrémités de la barre et à la date $t'_A = t'_B$ (simultanés pour O').

On a $x' = x'_B - x'_A = L'$, $t' = t'_B - t'_A = 0$, $x = x_B - x_A = L$, $t = t_B - t_A$.

$$(ct)^2 - L^2 = -L'^2$$

or

$$\frac{ct}{L} = v/c$$

donc

$$L' = L\sqrt{1 - (v/c)^2} = \frac{L}{\gamma} \leq L$$

(b) Réponse en utilisant les formules de Lorentz :

On a :

$$\begin{aligned} L' &= \gamma(L - \beta ct) \\ 0 &= -\beta L + ct \end{aligned}$$

On déduit le même résultat.

Conséquence de la contraction des longueurs : Un ballon de foot relativiste apparaît aplatis dans la direction du mouvement et donc comme une assiette. Il y a donc contraction des surfaces et des volumes. Mais seulement selon la direction x du mouvement !

4.2.8 Effet doppler relativiste et non relativiste

voir TD.

4.3 Aspect mathématique : produit scalaire entre quadri vecteurs

Dans ce paragraphe, on présente des techniques de géométrie relativiste.

4.3.1 Le produit scalaire

Soit $u = AB$ est un **quadri-vecteur**.

Dans un référentiel (t, x, y, z) , les composantes de u sont sa partie temporelle u^{ct} et spatiale $\vec{u} = (u^x, u^y, u^z)$ qui est un vecteur ordinaire :

$$u = (u^{ct}, \vec{u}) = (u^{ct}, u^x, u^y, u^z) = (u^\mu)_{\mu=ct,x,y,z}$$

Convention de notation :

remarquer que **les indices sont en haut**. En abrégé, un indice quelconque est noté par **une lettre grecque** : $\mu = ct, x, y, z$.

Ci-dessus, eq.4.1, on a défini la longueur invariante du quadri-vecteur u comme étant :

$$g(u) = u^{ct2} - \vec{u}^2 = u^2 - (u^{x2} + u^{y2} + u^{z2})$$

Si $w = (w^{ct}, w^x, w^y, w^z)$ est un autre quadri vecteur, on définit le **produit scalaire** entre u et w noté (u, w) par :

$$\begin{aligned} (u, w) &= u^{ct}w^{ct} - \vec{u} \cdot \vec{w} = u^{ct}w^{ct} - (u^xw^x + u^yw^y + u^zw^z) \\ &= \sum_{\mu, \nu} u^\mu g_{\mu, \nu} w^\nu \end{aligned}$$

sur la dernière ligne, le produit scalaire est réécrit à l'aide de la matrice diagonale $(g_{\mu, \nu})$:

$$g_{\mu, \nu} = \begin{pmatrix} +1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

appelée "**métrique de la relativité**". (Remarquer l'alternance des signes : $(+1, -1, -1, -1)$ appelée la signature du produit scalaire).

On déduit que en particulier :

$$g(u) = (u, u)$$

Exercice :

(TD) montrer que les vecteurs des axes d'un repère sont ortho-normés. Faire le dessin de deux vecteurs orthogonaux, voir fig11. Montrer que sur un schéma, **deux vecteurs symétriques par rapport au cône de lumière sont orthogonaux**.

4.3.2 Le gradient relativiste

Considérons une fonction sur l'espace temps, c'est à dire une fonction $f(M) = f(ct, x, y, z)$, où M est un point de l'espace-temps (évènement).

Comme en géométrie euclidienne, on a les relations :

$$\begin{aligned} f(M + dM) &= f(M) + \partial_\mu f \cdot dM^\mu \\ &= f(M) + (\vec{\nabla} f, d\vec{M}) \end{aligned}$$

avec $dM^\mu = d\vec{M} = (cdt, dx, dy, dz)$ une variation du point M , et $\partial_\mu f = (\frac{\partial f}{\partial ct}, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$ la **différentielle de la fonction f** au point M (indice en bas).

La dernière ligne est la définition habituelle du **quadri-vecteur gradient**, que l'on notera $\vec{\nabla} f = \partial^\mu f$ (indice en haut, comme pour tous les quadri-vecteurs).

La présence du produit scalaire dans la définition, impose des signes négatifs dans les composantes de $\vec{\nabla} f$:

$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{c\partial t}, -\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, -\frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

Remarque : (*)

On va justifier pourquoi cette définition est naturelle.

Cette définition ressemble à la définition du gradient en géométrie Euclidienne, à la différence des signes -.

Si on se donne une fonction $f(x, y)$ sur un espace Euclidien, on sait que par définition, **le vecteur gradient est un vecteur orthogonal aux lignes de niveaux** $f(x, y) = cste$ (points où la fonction a la même valeur). Les lignes de niveaux sont des courbes intrinsèquement liées à la fonction f , mais la notion d'orthogonal dépend du produit scalaire. rien de surprenant donc qu'en relativité le gradient fait intervenir l'orthogonalité et le produit scalaire et sa signature $(+1, -1, -1, -1)$.

Construction du gradient

Soit une fonction $f(t, x)$ sur l'espace-temps. Soit un point M de coordonnées (t, x) et un point proche $M + dM$ de coordonnées $(t + dt, x + dx)$. On suppose que M et $M + dM$ sont sur la même ligne de niveau de f , donc que $f(M) = f(M + dM)$. Donc :

$$f(t, x) = f(t + dt, x + dx)$$

En développant cette égalité au premier ordre, on obtient :

$$0 = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx$$

Notons $\vec{\nabla} f = (a, b)$ les coordonnées du gradient que l'on cherche. On veut que $\vec{\nabla} f$ soit orthogonal à $dM = (cdt, dx)$. Cela donne :

$$\begin{aligned} 0 &= (\vec{\nabla} f, dM) = a(cdt) - bdx \\ &= acdt + b \frac{\partial f / \partial t}{\partial f / \partial x} dt \end{aligned}$$

donc

$$b = -ca \frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial t}$$

Le vecteur gradient franchit les lignes de niveau de f . On a

$$f(M + \vec{\nabla} f) = f(t + a/c, x + b) = f(M) + a/c \cdot \frac{\partial f}{\partial t} + b \cdot \frac{\partial f}{\partial x}$$

Si l'on impose de plus que l'accroissement de f selon le déplacement $\vec{\nabla} f$ soit $f(M + \vec{\nabla} f) - f(M) = \left(\frac{\partial f}{c\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2$, cela donne bien : $b = -\frac{\partial f}{\partial x}$ et $a = \frac{\partial f}{c\partial t}$.

Remarque : le gradient est orthogonal aux lignes de niveau de la fonction, donc sur un schéma la direction du gradient est symétrique à celles des lignes de niveau par rapport au cône de lumière.

Application :

Considérons une onde plane électromagnétique $A(t, x, y, z)$ de fréquence ω et vecteur d'onde $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$.

(A est un nombre complexe pour simplifier)

Ecrire l'expression de $A(t, x, y, z)$, calculer le gradient de sa phase complexe $\varphi : \vec{\nabla} \varphi$

Calculer l'invariant $(\vec{\nabla} \varphi, \vec{\nabla} \varphi)$.

Représentation des lignes de niveau de φ et de $\vec{\nabla} \varphi$ dans le cas où $k_y = k_z = 0$.

Solution :

$$A(t, x, y, z) = \exp(i\varphi)$$

$$\varphi(t, x, y, z) = \omega t - (k_x x + k_y y + k_z z)$$

et

$$\vec{\nabla} \varphi = \left(\frac{\omega}{c}, k_x, k_y, k_z\right)$$

La vitesse de l'onde électromagnétique est

$$c = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{|k|}$$

donc

$$(\vec{\nabla} \varphi, \vec{\nabla} \varphi) = \omega^2/c^2 - |k|^2 = 0$$

qui montre que le gradient est un quadri-vecteur sur le cône de lumière, parallèle aux lignes de niveaux de φ .

Conservation de la charge.@@

Le Laplacien relativiste@@

Chapitre 5

Dynamique relativiste

Une propriété physique : La **masse** m (en kg) est une caractéristique de toute particule. C'est un invariant relativiste. (indépendant de la vitesse).
Ex : photons, neutrinos ont $m = 0$.

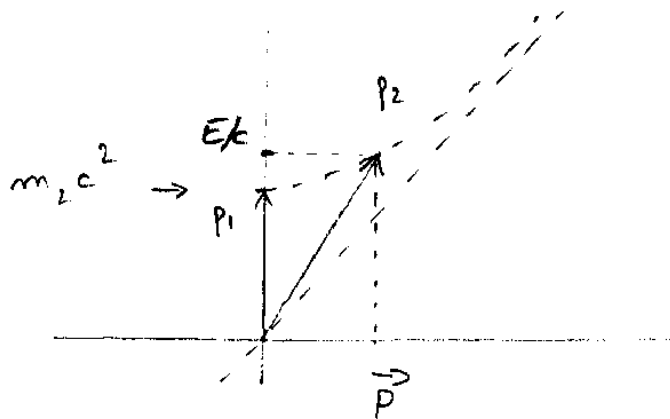
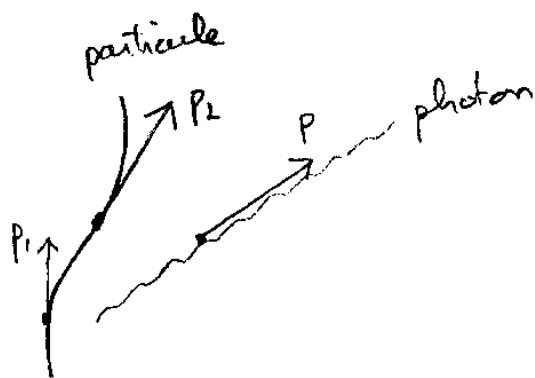
5.1 La quadri impulsion

Considérons une particule de masse m .

définition : à un instant donné, la quadri impulsion p de la particule est le **quadrivecteur tangent à la ligne d'univers de la particule** et de longueur invariante $m^2 c^2$ fixée par la masse :

$$(p, p) = m^2 c^2$$

Voir figure15



Fig

Les composantes temporelles et spatiales de ce quadri-vecteur sont l'**énergie** (Joules) l'**impulsion** :

$$p = (p^{ct}, \vec{p}) = (E/c, \vec{p})$$

On a donc les relations :

$$m^2 c^2 = p^{ct2} - \vec{p}^2 = E^2/c^2 - \vec{p}^2$$

et

$$\frac{\vec{p}}{E/c} = \frac{\vec{v}}{c}$$

car la \vec{p} est tangent à la ligne d'univers, et (v/c) est l'inverse de la pente de la ligne d'univers.

— Donc dans le cas où $v < c$ cad $m \neq 0$, on obtient :

$$E = \gamma m c^2$$

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v}$$

avec

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

— Dans le cas où $m = 0$ pour le photon ou neutrino de masse nulle, on obtient

$$E = pc$$

Son énergie n'est pas liée à sa vitesse qui est toujours c ! (Mais à son impulsion p ou à sa fréquence en description ondulatoire : $E = h\nu$)

Rem : p étant un quadri vecteur, les formules de transf de Lorentz sont applicables sur ses composantes (p^{ct}, \vec{p}) pour tout changement de référentiel.

5.2 Limite non relativiste

— Si $v \ll c$ alors

$$\vec{p} = m\vec{v} + \dots$$

$$\begin{aligned} E &= c^2 \sqrt{m^2 c^2 + \vec{p}^2} = mc^2 + \frac{p^2}{2m} + \dots \\ &= mc^2 + \frac{1}{2} m \vec{v}^2 + \dots \end{aligned}$$

— La valeur minimum : $E_0 = mc^2$ s'appelle l'**énergie au repos** ou **énergie de masse** de la particule.

Le terme suivant $E_c = \frac{1}{2} m v^2$ est l'**énergie cinétique**.

— Rem : C'est l'approximation du fond de l'hyperbole $E(p)$ par une parabole, cf Fig 15 (b).

5.3 Règle de conservation

Règle :

Lors d'une interaction entre plusieurs particules (isolées du reste) la quadri impulsion totale (somme vectorielle) est conservée.

$$p_{tot} = \sum p_i = \sum p_f$$

Cela signifie à la fois la conservation de l'énergie E_{tot} (composante temporelle de p_{tot}), et de l'impulsion spatiale \vec{p}_{tot} .

Exercice :

un pion π_0 immobile, de masse $m_\pi c^2 = 140 \text{ MeV}$ se désintègre en deux photons. calculer l'énergie de ces photons.

solution :

Schéma fig 16. on a

$$p_{\pi 0} = p_{\gamma 1} + p_{\gamma 2}$$

$$\begin{aligned} p_\pi &= (m_\pi c, 0) \\ &= 2p_\gamma = 2(E_\gamma/c, \vec{p}_\gamma) \end{aligned}$$

Donc

$$E_\gamma = \frac{1}{2} m_\pi c^2 = 70 \text{ MeV}$$

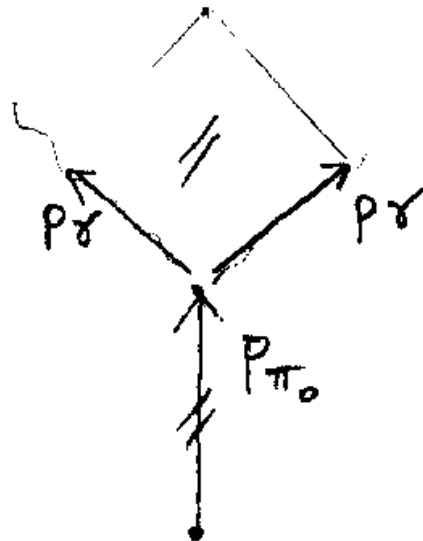


Fig 16

Exercice

TD : montrer que isolé du reste, la réaction $\gamma \rightarrow e^+e^-$ n'est pas possible. (Elle est possible dans la matière, en échangeant de la quadri-impulsion avec l'environnement).

Exercice

TD : rétro diffusion compton à l'esrf : photon 3,5 eV sur électron 6GeV

Remarques :

— d'après ci-dessus, dans une réaction, l'énergie de masse peut être convertit en énergie cinétique, si la particule disparaît. Cela peut produire de la chaleur.. C'est le principe des réacteurs nucléaires (fission), de combustion dans le soleil, et moins glorieusement, des bombes atomiques.

Il n'y a plus de loi de conservation de la masse. Mais attention, toute réaction satisfaisant la conservation de la quadri impulsion totale n'est pas forcément possible.

Il y a d'autres règles de conservation dans la nature, comme la conservation de la charge électrique. Par exemple, $\pi^+ \rightarrow \gamma\gamma$ n'est pas possible.

— D'après ci-dessus, si des photons vont des va et vient entre deux miroirs parallèles, le tout dans une boîte close, alors ces photons contribuent à la masse de la boîte m_{boite} d'après la formule :

$$\mathbf{p}_{boite} = \mathbf{p}_{\gamma 1} + \mathbf{p}_{\gamma 2}$$

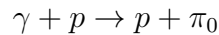
$$(\mathbf{p}_{boite}, \mathbf{p}_{boite}) = (m_{boite}c)^2$$

donnant dans le cas présent $m_{boite} = 140 \text{ MeV}/c^2$.

- Le proton et le neutron sont composés de 3 quarks et de gluons. Chaque quark a une masse de l'ordre de 5 MeV, alors que la masse du proton (neutron) est 940 MeV. Cette masse importante provient de même d'énergie d'agitation des quarks et des gluons confinés. Donc inversement la **masse est faite d'énergie**. (Penser que l'essentiel de notre masse provient de la masse des protons et neutrons, donc de cette énergie d'agitation).

5.4 Référentiel du centre de masse et seuil de réaction (TD)

A travers un exemple : la réaction de "photo-production de pi 0"



(expérience GRAAL à l'ESRF). γ est un photon gamma, et p est un proton d'une cible d'Hydrogène Liquide.

sachant que dans le laboratoire :

$$\begin{aligned} E_\gamma &= 200 \text{ MeV} \rightarrow 1,5 \text{ GeV} \\ m_p c^2 &= 940 \text{ MeV} \\ m_\pi c^2 &= 140 \text{ MeV} \end{aligned}$$

- Calcul du quadri vecteur initial selon une dimension (x)

$$\begin{aligned} p_\gamma c &= (E_\gamma, E_\gamma) \\ p_p c &= (m_p c^2, 0) \end{aligned}$$

Donc

$$p_{tot} c = (E_\gamma + m_p c^2, E_\gamma)$$

- **Référentiel du centre de masse**
Par définition c'est le référentiel où

$$p_{tot} = (E_{tot}^*, 0)$$

Sa vitesse par rapport au Labo est donc :

$$V = \frac{E_{tot}}{\vec{p}_{tot}} = \frac{E_\gamma}{E_\gamma + m_p c^2}$$

Ex : pour $E = 200\text{MeV}$, Cela donne $V = 0,17c$.

Et dans ce référentiel l'**Energie totale (disponible)** est obtenue par l'invariance du quadri vecteur :

$$\begin{aligned} E^{*2} &= (E + mc^2)^2 - E^2 \\ &= 2Emc^2 + m^2c^4 \end{aligned}$$

Ex : pour $E = 200\text{MeV}$, on obtient $E^* = 1122\text{MeV} = 1,1\text{GeV}$

— Seuil de production de pions :

Le **seuil de reaction** est l'énergie minimale que doivent avoir les particules incidentes pour que les règles cinématiques permettent à la réaction de se produire.

On recherche donc l'énergie E minimale qu'il faut pour produire un pion .

Prop : au seuil, dans le référentiel du centre de masse, l'énergie disponible minimale doit permettre la production de p, π immobiles. L'énergie ne sert qu'à la production de la masse. (On le retrouve à la question suivante).

Au seuil, on a donc dans le réf du centre de masse :

$$\begin{aligned} p_{tot} &= (E_{tot}^*, 0) \\ &= (m_p c^2 + m_\pi c^2, 0) \end{aligned}$$

Cela donne finalement

$$\begin{aligned} E &= m_\pi c^2 \left(1 + \frac{m_\pi}{2m_p}\right) \\ &= 150\text{MeV} \end{aligned}$$

— Exercices (TD) :

- Au seuil, calculer l'énergie cinétique du pion dans le labo.

-Si $E_\gamma = 1,5\text{GeV}$, calculer l'énergie cinétique maximale que peut avoir le pion dans le ref du Labo.

5.5 Défaut de masse et réactions nucléaires (TD)

Dans ce paragraphe on considère des "particules", composées de particules plus élémentaires. On parle **d'états liés** de particules.

Exemples :

- Un proton (ou neutron) est composé de quarks et de gluons.
- un noyau nucléaire est composé de neutrons et protons.
- Un atome est composé d'un noyau nucléaire et d'électrons.

— Une molécule est composée d'atomes, etc...

On étudie la masse de l'objet composé M par rapport à la masse de ses constituants m_i pris isolément.

(Remarque : les quarks et gluons n'existent pas isolément. Un neutron isolé a une durée de vie de 15mn.)

On définit l'**énergie de liaison** W par :

$$W = \sum m_i - M$$

1. Si $W > 0$: alors $\sum m_i > M$ donc réaction $M \rightarrow \sum m_i$ impossible à cause de la conservation de l'énergie E_{tot} . Donc **L'objet M est stable**.

Par contre, la réaction inverse $\sum m_i \rightarrow M$ possible et libère de l'énergie, sous forme de nouvelles particules, emportant de l'énergie de masse et de l'énergie cinétique. ("rayonnement" si photons).

2. Si $W < 0$: alors $\sum m_i < M$ donc réaction $M \rightarrow \sum m_i$ possible avec de l'énergie libérée.. Donc **L'objet M est instable**.

Remarque :

pour prédire W il faut faire des calculs de dynamique compliqués ; Mais une mesure expérimentale peut donner W .

Exemple :

$m_n = \frac{940}{939} m_p$, $m_p = 1,001m_p$ et $M_{He4} = 3,9726m_p$. Alors

$$\begin{aligned} W &= 2m_n + 2m_p - M \\ &= 0,0294m_p \\ &= 27MeV \end{aligned}$$

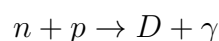
Exemple :

$m_n = \frac{940}{939} m_p$, $m_p = 1,001m_p$. et $M_D = 1,9986m_p$. Alors

$$\begin{aligned} W &= m_n + m_p - M \\ &= 0,00236m_p \\ &= 2,2MeV \end{aligned}$$

W est l'énergie libérée lors de la fabrication d' un Deutérium D (=neutron+proton liés) dans le Soleil, ou dans une bombe H. W est aussi l'énergie qu'il faut fournir à D2 pour le détruire proton+neutron.

Dans le premier cas, la réaction est



sous forme de rayonnement.

Remarque :

Pour un système atomique, l'énergie de liaison W , de l'ordre du eV.

L'unité de masse atomique

On pourrait faire le même exercice avec le Carbone 12 ; $M_C = 11,913m_p$.

On définit l'**unité de masse atomique** u par

$$u = M_C/12$$

Donc

$$u = 931,5 \text{ MeV}/c^2$$

rem : le Carbone 12 sert aussi à définir le nombre d'Avogadro N_A par :

$$N_A = (12 \text{ grammes})/u$$

Donnant $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$.

(**1mole** = N_A).

5.6 Loi de Newton relativiste

Supposons la particule soumise à une force. En dynamique non relativiste eq. 3.1, cette force détermine la variation temporelle de l'impulsion de la particule. La généralisation naturelle en relativité est que la force est caractérisée par un **quadri vecteur force** F . Pour le temps, on considère le temps propre τ lié à la ligne d'univers de la particule. La formule de Newton relativiste devient donc :

$$\frac{dp}{d\tau} = F \tag{5.1}$$

où p est la quadri-impulsion de la particule.

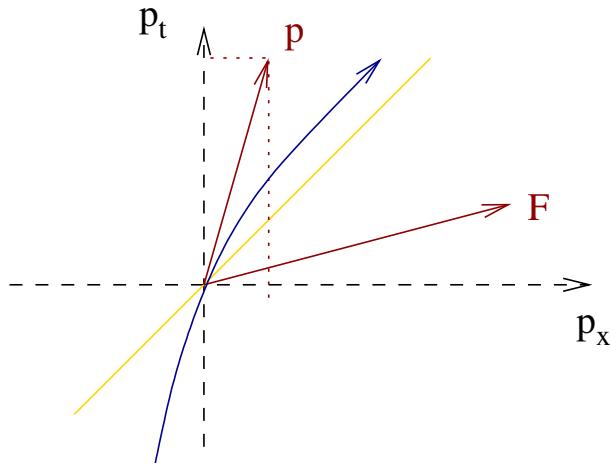
Remarque :

- Si $F = 0$ alors $p = \text{cste}$ et donc la ligne d'univers est une droite, correspondant à un mouvement rectiligne à vitesse constante.
- Pour que la masse de la particule reste constante au cours du temps, il faut que $(p, p) = m^2 c^2$ reste constant, et donc que $0 = p \cdot \frac{dp}{d\tau} = p \cdot F$. Le quadri-vecteur F **doit donc être orthogonal à l'impulsion** p , donc orthogonale à la ligne d'univers de la particule. F dépend donc de p .

Mouvement à une dimension x uniformément accéléré Prenons le cas d'une particule bougeant selon la seule direction x . On note $p = (p^{ct}, p^x) = (E/c, p^x)$ l'impulsion relativiste.

D'après ci-dessus, la force relativiste F doit être orthogonale à p , et donc de la forme $F = \frac{a}{c}p^\perp$ avec $p^\perp = (p^x, p^{ct})$ le vecteur orthogonal à p (on vérifie que $(p, p^\perp) = 0$).

Dans le cas général, a peut varier (dépendre de τ). Dans la suite on considère le cas où a est constant, ce qui donnera on le verra, un mouvement uniformément accéléré.

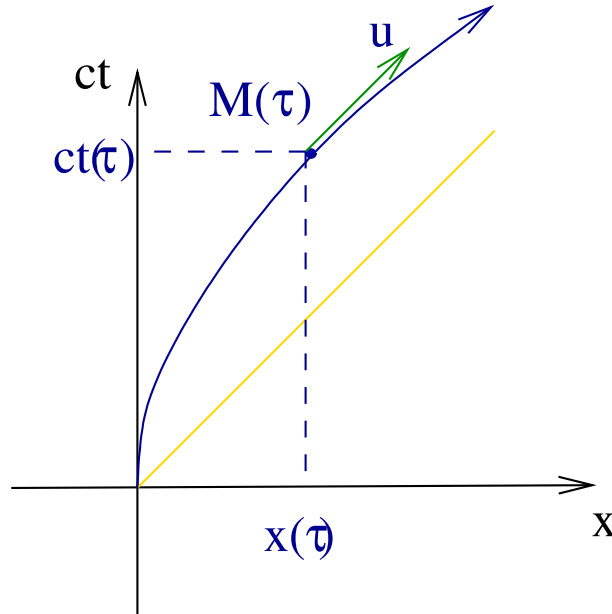


L'équation de Newton relativiste donne alors

$$\begin{aligned}\frac{dp^{ct}}{d\tau} &= \frac{a}{c}p^x \\ \frac{dp^x}{d\tau} &= \frac{a}{c}p^{ct}\end{aligned}$$

Que l'on peut résoudre. Pour les conditions initiales $p^x(0) = 0$, $p^{ct}(0) = mc$ d'une particule au repos, on obtient

$$\begin{aligned}p^{ct}(\tau) &= mc \cosh\left(\frac{a}{c}\tau\right) \\ p^x(\tau) &= mc \sinh\left(\frac{a}{c}\tau\right)\end{aligned}$$



On a : $p^{ct^2} - p^{x^2} = m^2c^2$; le vecteur p se déplace donc sur l'hyperbole de la couche de masse m .

Si on note $M(\tau) = (ct(\tau), x(\tau))$ les coordonnées de la ligne d'univers de la particule paramétrée par le temps propre, rappelons que par définition du temps propre τ , eq.4.2 :

$$(dM, dM) = c^2d\tau^2$$

donc

$$\left(\frac{dM}{cd\tau}, \frac{dM}{cd\tau}\right) = 1$$

ce qui signifie simplement que

$$u = \frac{dM}{cd\tau}$$

est un **vecteur tangent à la ligne d'univers, normalisé.**

Le vecteur p est aussi tangent à la ligne d'univers et de norme $(p, p) = m^2c^2$, eq. ??, donc :

$$p = mcu = mc \frac{dM}{cd\tau}$$

soit :

$$p^{ct} = mc \frac{cdt}{cd\tau}$$

$$p^x = mc \frac{dx}{cd\tau}$$

Avec les conditions initiales de la particule $x(0) = 0$, $t(0) = 0$, on obtient la ligne d'univers :

$$ct(\tau) = \frac{c^2}{a} \sinh\left(\frac{a}{c}\tau\right) \quad (5.2)$$

$$x(\tau) = \frac{c^2}{a} \left(\cosh\left(\frac{a}{c}\tau\right) - 1 \right) \quad (5.3)$$

qui est une branche d'hyperbole, qui devient asymptote au cône de lumière. Cela signifie que la vitesse de la particule tend vers c dans le référentiel (x, ct) . Voir figure 19.

Pour les temps courts, $t \approx \tau$ et $x \approx \frac{a}{2}t^2$, ce qui montre qu'il s'agit d'un mouvement accéléré, d'accélération a .

Il peut s'agir par exemple d'une particule chargée soumise à un champ électrique constant \mathcal{E} dans la direction x . D'après eq. 3.2, l'accélération est $a = q\mathcal{E}/m$. On déduit que dans ce cas que la force relativiste est

$$\begin{aligned} F &= \frac{q\mathcal{E}}{mc} p^\perp \\ &= q\mathcal{E}u \end{aligned}$$

(Voir partie du cours sur l'électromagnétisme).

Chapitre 6

Introduction à la relativité générale

6.1 Problématique

Einstein a résolu dans le cadre de la **relativité générale** (1915) deux problèmes importants.

1. Le premier est qu'une Enigme datait depuis Newton. Lorsque l'on considère le mouvement d'un objet dans un champ de gravité, on écrit les équations :

$$\begin{aligned}m_i a &= P \\ P &= m_p g \\ P &= m_p \frac{m_T G}{r^2}\end{aligned}$$

où a est l'accélération, et P est le poids.

Les expériences montrent que la masse inertielle m_i est égale à la masse pesante m_p . Ce qui paraît être une coïncidence, car ces deux constantes ont des rôles différents dans les équations.

Cela a pour conséquence que $a = g$ (ou $a = m_T G / r^2$) et que le mouvement de l'objet ne dépend donc pas de sa masse. Autrement dit, avec les mêmes conditions initiales, tout objet que l'on peut considérer comme ponctuel (plume, marteau ou planète..) aura la même trajectoire.

2. L'autre problème qui est apparu après 1905 était de décrire la force de gravitation dans le cadre de la relativité restreinte. En effet la relativité restreinte exclue les forces qui agissent instantanément à distance (comme la gravité en mécanique de Newton), puisque la notion de simultanéité n'existe plus en absolu, mais dépend de l'observateur. Il fallait donc trouver une formulation cohérente de la gravitation relativiste.

Remarquons que le problème ne se posait pas pour les forces électromagnétiques qui étaient les autres forces connues à l'époque, car les équations de Maxwell (1885) possédaient déjà une formulation relativiste naturelle, où le champ électromagnétique transporte la force entre deux charges, à la vitesse c et non de façon instantanée.

6.2 La solution d'Einstein

On a déjà vu que l'espace-temps acquiert **une structure géométrique** dans le cadre de la relativité restreinte. (voir les nombreux schémas précédents). En relativité restreinte, l'espace-temps est un **espace plat** et la trajectoire (ligne d'univers) d'une particule libre est une droite.

Le concept développé dans la relativité générale est que l'espace-temps peut avoir **une courbure**. Cette courbure est créée par la présence de matière. Par exemple sur la figure 17, A est une étoile massive. Si un autre corps comme une planète, objet B, est dans son voisinage, sa ligne d'univers sera sensible à cette courbure et ne sera plus une droite mais une courbe. La trajectoire ne dépend que de la courbure de l'espace où se trouve B et non pas de la masse de B ; Voir figure 17. Précisément, la ligne d'univers de B est **une géodésique** de l'espace temps, ce qui signifie que localement c'est une ligne qui rend extrémale la valeur de g , la distance invariante décrite plus haut. Cela signifie en gros que la ligne d'univers suit le parcours le plus naturel en fonction de la courbure environnante. (Comme la ligne droite dans un espace plat, ou un arc de cercle à la surface d'une sphère.) C'est de cette façon que l'influence gravitationnelle entre deux corps A et B est décrite.

Cette influence mutuelle est symétrique, et au total on voit les mouvements de A et B s'influencer comme s'ils exerçaient l'un sur l'autre une force (la gravitation). Sur la fig 17, A serait une étoile massive, et B une planète légère, qui courbe peu l'espace autour d'elle.

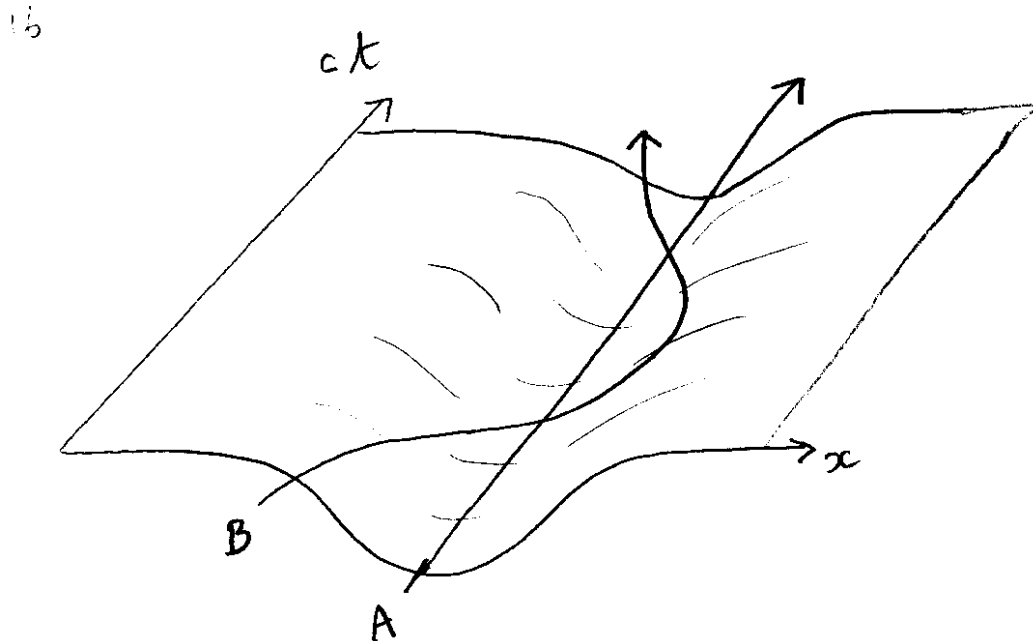


figure 17

Remarque :

Cette description résoud les deux problèmes évoqués ci-dessus. En effet la trajectoire de B ne dépend pas de sa masse, et d'autre part, la description ne fait pas appel à des forces instantanées à distance. En fait la modification que la présence de A inflige à l'espace-temps est locale, et se propage à la vitesse c .

La relativité générale est très bien décrite par une formule ("Equation d'Einstein"). La première chose à vérifier bien sur avec cette équation, est que l'on retrouve l'expression de la force de gravitation de Newton en $1/r^2$ lorsque l'on étudie l'influence de deux corps de faible vitesse ($v \ll c$).

Cette description est inspirée du **principe de Mach** (philosophe du début du siècle) qui soutenait que l'espace-temps doit son existence et sa structure à la présence de matière. C'est par exemple ce qui ressort du fait que le "bon référentiel galiléen" est moyennement immobile par rapport aux étoiles et galaxies proches.

6.3 Conséquences nouvelles

La relativité générale a plusieurs conséquences nouvelles par rapport à la gravitation de Newton, comme par exemple :

1. La trajectoire du corps B ci-dessus ne dépend pas de sa masse, et à la limite est valable pour les photons de masse nulle. Par conséquent, **la trajectoire de la lumière doit être défléchi**e au voisinage d'un objet massif. Cela a été observé la première fois lors d'une éclipse totale de Soleil, qui a permit de voir des étoiles sur le bord du disque solaire alors qu'elles se trouvaient derrière. Figure 18.

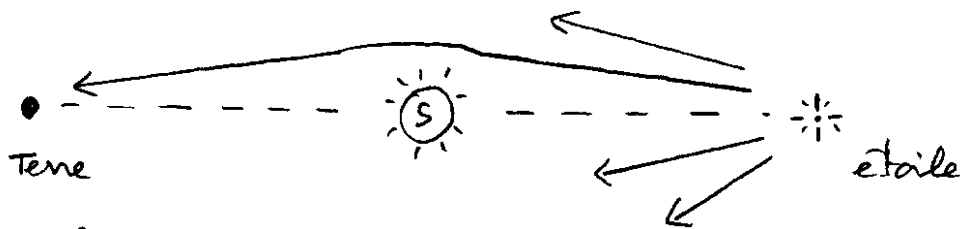


figure 18

De nos jours, on observe de nombreux **mirages gravitationnelles** : la lumière venant de Galaxies lointaines subit un effet de loupe à cause de Galaxies massives situées sur son parcours. Cet effet de loupe a récemment permit la découverte d'une Galaxie située à $13\tilde{M}$ d'années lumières.(réf La recherche).

2. Si l'objet massif A est en mouvement non uniforme, la courbure qu'il inflige à l'espace-temps peut se propager comme des ondes (l'analogie est presque totale avec la propagation des ondes électromagnétiques). On parle d'**ondes gravitationnelles**. Elles n'ont jamais été observées, mais un détecteur très sensible est en construction en Italie (projet VIRGO). Des ondes importantes pourraient être produites par des étoiles binaires en rotation.

3. Si l'objet A est très massif, il peut déformer l'espace-temps tellement qu'il le "perce", et forme une "singularité". On parle alors de **Trou noir**, car aucune particule ne peut s'en échapper même pas la lumière. Les astrophysiciens pensent qu'il y aurait un trou noir dans la constellation du cygne, et aussi au coeur de certaines galaxies.
4. L'observation montre que l'univers est en expansion : les galaxies s'éloignent les une des autres. Cela est bien expliqué par la relativité générale, qui montre de plus que l'univers étaient infiniment concentré il y a environ 15 Milliards d'années ; "**le Big Bang**".

6.4 Exemple du "champs de gravitation uniforme"

réf : JC Radix "Introduction à la relativité générale" (1994) p.222.

6.4.1 Le principe d'équivalence

Il est un cas simple que l'on peut traiter ici car il ne fait pas appel à la courbure de l'espace-temps. C'est le cas d'un champ de gravité uniforme comme localement à la surface de la Terre.

Le but de ce paragraphe est de comparer le temps qui s'écoule en haut d'un immeuble et en bas d'un immeuble, dû à la différence de hauteur dans le champs de gravité.

Pour cela, remarquons tout d'abord qu'un objet en chute libre près de la Terre n'est soumis à aucune force (La gravitation n'est plus une force en relativité générale). On dit qu'il est en apesanteur. Dans le référentiel Terrestre, il a un mouvement à accélération constante vers le bas $g = 9,81m/s$. Inversement, un objet immobile à la surface de la Terre est en accélération g dans le référentiel de l'objet précédent en chute libre.

Situons nous en relativité restreinte maintenant, avec l'absence de gravité et considérons un objet immobile libre. Sa trajectoire est donc comparable à celle de l'objet en chute libre ci-dessus, et inversement un objet en accélération constante g (une fusée par exemple) est comparable à un objet immobile à la surface de la Terre.

Cette analogie porte le nom de **principe d'équivalence de la gravitation et de l'inertie**, et est bien connu en mécanique de Newton.

Grâce à cette équivalence, on peut simuler l'apesanteur (l'absence de champ de gravité) en se plaçant dans un référentiel en chute libre. Des expériences sont ainsi menées dans des avions pendant quelques secondes.

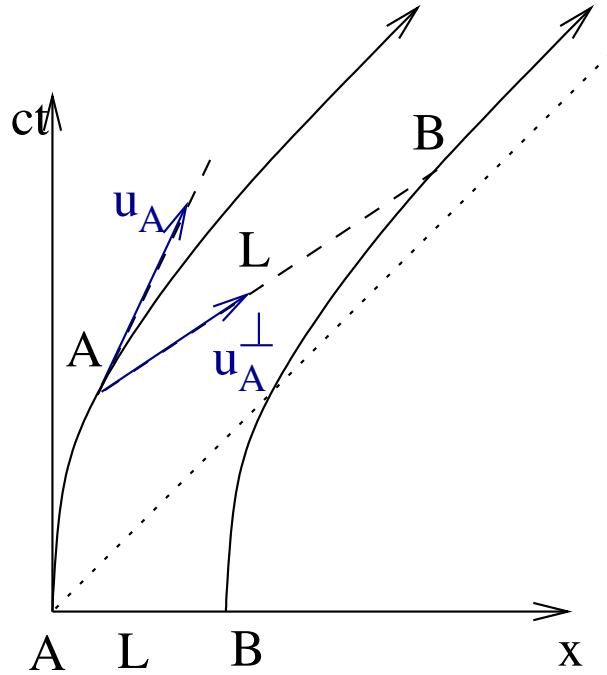
Inversement, un cosmonaute qui serait dans l'espace intersidérale dans sa fusée en accélération constante g , serait plaqué au plancher, comme nous le sommes à la surface de la Terre.

6.4.2 Une fusée en accélération constante

Nous allons résoudre le problème de l'immeuble en champs de gravité en considérons d'abord celui d'une fusée de longueur L , en accélération constante g par rapport à un

référentiel d'inertie (x, ct) .

Appelons A le point à l'arrière de la fusée, et B le point à l'avant.



Le calcul qui suit a été effectué par Einstein en 1907 après avoir énoncé le principe d'équivalence de la gravitation et de l'inertie. (réf Weinberg p.19).

L'équation de Newton relativiste est (voir eq. 5.1) :

$$\frac{dp}{d\tau} = F = \frac{a}{c} p^\perp$$

où a est égale à l'accélération g .

La solution de cette équation a été obtenue. Voir eq.5.3. La ligne d'univers de A est :

$$ct_A(\tau_A) = \frac{c^2}{a} \sinh\left(\frac{a}{c}\tau_A\right)$$

$$x_A(\tau_A) = \frac{c^2}{a} \left(\cosh\left(\frac{a}{c}\tau_A\right) - 1 \right)$$

où τ_A est le temps propre de A.

Cherchons maintenant la trajectoire de B. Pour cela, l'ingrédient est que dans le référentiel de la fusée, la longueur AB vaut L.

Un vecteur tangent à la ligne d'univers de A est $u_A = \frac{dA}{cd\tau}$ de composantes

$$u_A = \left(\frac{cdt_A}{cd\tau} = \cosh\left(\frac{a}{c}\tau_A\right), \right.$$

$$\left. \frac{dx_A}{cd\tau} = \sinh\left(\frac{a}{c}\tau_A\right) \right)$$

Un vecteur qui appartient à l'espace de simultanéité de la fusée est donc l'orthogonal :

$$u_A^\perp = (\sinh(\frac{a}{c}\tau_A), \cosh(\frac{a}{c}\tau_A))$$

qui est normalisé $(u_A^\perp, u_A^\perp) = -1$ (vecteur de type espace).

La position B de l'extrémité de la fusée est donc donnée par le quadri-vecteur

$$\overrightarrow{AB} = Lu_A^\perp$$

De cela on déduit la trajectoire de B :

$$\begin{aligned} ct_B(\tau_A) &= (\frac{c^2}{a} + L) \sinh(\frac{a}{c}\tau_A) \\ x_B(\tau_A) &= (\frac{c^2}{a} + L) \cosh(\frac{a}{c}\tau_A) - \frac{c^2}{a} \end{aligned}$$

paramétrée par τ_A .

Au même instant, le temps propre de B écoulé est donné par $(c d\tau_B)^2 = (dB, dB)$

$$\begin{aligned} \tau_B &= \int d\tau_B = \frac{1}{c} \int \sqrt{(dB, dB)} \\ &= \frac{1}{c} \int \sqrt{(\frac{cdt_B}{d\tau_A})^2 - (\frac{dx_B}{d\tau_A})^2} d\tau_A \\ &= (1 + \frac{La}{c^2})\tau_A \\ &> \tau_A \end{aligned}$$

Cela montre que le temps s'écoule plus vite à la tête de la fusée B que à l'arrière A.

Utilisons maintenant le principe d'équivalence : la physique est la même à la surface de la Terre, dans le champs de gravitation uniforme avec l'accélération de pesanteur g , que dans une fusée dans l'espace dans un mouvement d'accélération uniforme $a = g$. On peut donc identifier la fusée de longueur L avec un immeuble de hauteur $h = L$.

On obtient donc que **le temps s'écoule plus vite en haut d'un immeuble** de hauteur h qu'au rez de chaussé, d'un facteur

$$1 + \frac{hg}{c^2} = 1 + 5,4.10^{-15}$$

soit de 1 seconde par 5,8 millions d'années pour $h = 50m$. C'est ridiculement faible.

Remarques :

- Ce phénomène surprenant a été mis expérimentalement en évidence en mesurant très précisément (par effet Mossbauer) le décalage Doppler de photons entre le fond d'un

puits et son sommet. ce décalage Doppler est aussi soumis au facteur $(1 + hg/c^2)$. (Pound Rebha 1960 précision actuelle : 0,01% à l'aide d'horloges atomiques). Ce facteur de dilatation temporel est très important à la surface des trous noirs, ou des étoiles à neutrons, ou g est très important. Le système GPS de positionnement par satellites tient compte de cet effet.

- Dans l'étude "du voyage des jumeaux de Langevin" (cf exercice de TD), il est ressorti que à son retour sur Terre, la personne qui avait voyagé était plus jeune que son frère qui était resté sur Terre. Ce résultat "disymétrique" a été interprété par la di-symétrie dans les changements de référentiels qu'ont subis les deux jumeaux : celui qui est resté sur Terre, n'a pas changé de référentiel d'inertie, il n'a subi aucune accélération. Par contre celui qui a voyagé, a subi des changements de référentiels d'inertie, lors des accélérations, au décollage, à l'arrivée sur l'étoile et à l'atterrissage. On avait donc conclu que dans l'espace libre, **le temps s'écoule moins vite lorsque l'on subit des accélérations**. C'est la même conclusion ici dans le cas de la fusée et de l'immeuble : d'après ci-dessus, l'accélération est plus forte, à l'arrière de la fusée (en bas de l'immeuble), qu'à l'avant (haut de l'immeuble), bien qu'au départ on ait considéré un champ de gravitation uniforme ! et donc **le temps s'écoule moins vite en bas de l'immeuble**.