

# Simulation de la membrane vibrante d'un tambour

Frédéric Faure

18 mars 2021

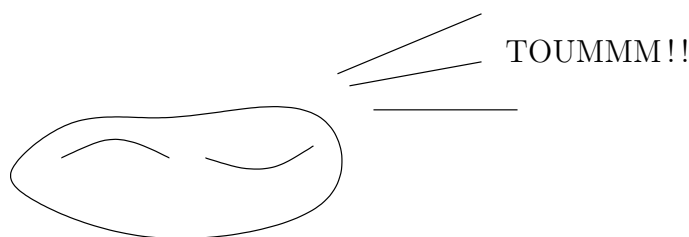
## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Modélisation physique de la membrane</b>	<b>2</b>
2.1	Equation d'onde pour les amplitudes de la membrane . . . . .	3
2.2	Equations d'onde sans dimension . . . . .	5
2.3	Modes propres . . . . .	6
2.4	Résolution dans des cas simples . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Algorithme numérique</b>	<b>8</b>
3.1	Discrétisation du domaine . . . . .	8
3.2	Discrétisation de l'opérateur Laplacien . . . . .	9
3.3	Notation matricielle . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Résolution analytique dans des cas simples</b>	<b>10</b>
4.1	Réseau $2 \times 1$ . . . . .	10
4.2	Réseau $2 \times 2$ . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Programmation</b>	<b>11</b>
5.1	Étape 1, « modes propres et forme rectangulaire » . . . . .	11
5.2	Étape 2, « modes propres et forme quelconque » . . . . .	12
5.3	Étape 3, « Évolution d'une onde quelconque » . . . . .	12
<b>6</b>	<b>Exploitation</b>	<b>14</b>
6.1	Observer et vérifier la loi de Weyl concernant la densité d'états . . . . .	14
6.1.1	Loi de Weyl dans un domaine quelconque . . . . .	14
6.1.2	Cas d'un domaine rectangulaire . . . . .	15
6.1.3	Loi de Weyl sur un réseau discret . . . . .	15
6.2	Vérifier que un paquet d'onde évolue selon les équations classique de mouvement de Hamilton. . . . .	15
6.3	Rajouter un changement d'indice (ou potentiel) dans le modèle qui dépend de l'espace . . . . .	15

Le but de ce projet est de résoudre un problème d'algèbre linéaire, provenant d'une application physique : un problème de propagation d'ondes, les vibrations d'une membrane de tambour. L'énoncé introductif est assez long ; le travail à faire est précisé plus loin...

## 1 Introduction

On considère une membrane tendue sur un grand cadre horizontal comme une peau de tambour. Ce cadre a un **contour à priori quelconque**.



On se propose d'étudier les vibrations libres de cette membrane, pour des petites amplitudes. On cherchera donc les fréquences de vibrations (fréquences propres), ainsi que les modes propres, c.a.d. la forme de la membrane lorsqu'elle vibre à une fréquence propre.

Ce problème se résout analytiquement pour des formes particulières du cadre. Lorsque le cadre est rectangulaire, ou circulaire, la solution se trouve par une méthode de séparation des variables. Mais le problème est insoluble exactement pour des formes quelconques.

Pour des fréquences élevées, les résultats connus sur les fréquences de vibration et les modes propres passent par l'étude d'une boule de billard imaginaire qui rebondirait sur le même cadre. La membrane vibrante et la boule de billard entretiennent les mêmes relations que la mécanique quantique et la mécanique classique.

Une question célèbre est : *"peut-on entendre la forme d'un tambour"*, et signifie : *"connaissant la liste des fréquences propres, peut-on en déduire la forme du cadre ?"*. La question s'est posée, en 1965 quand des chercheurs ont montré que la densité spectrale est déterminée au premier ordre par la surface de la membrane, puis par sa circonférence, puis par la courbure du cadre...<sup>1</sup>

Dans les séances à venir, nous allons nous consacrer à la résolution du problème de façon numérique. Après une modélisation (paragraphe suivant), on arrivera à un système linéaire qu'il faudra résoudre. Les fréquences propres  $\lambda$  seront les valeurs propres d'une matrice et les modes propres, les vecteurs propres.

## 2 Modélisation physique de la membrane

Dans cette partie on modélise la vibration de la membrane du tambour.

---

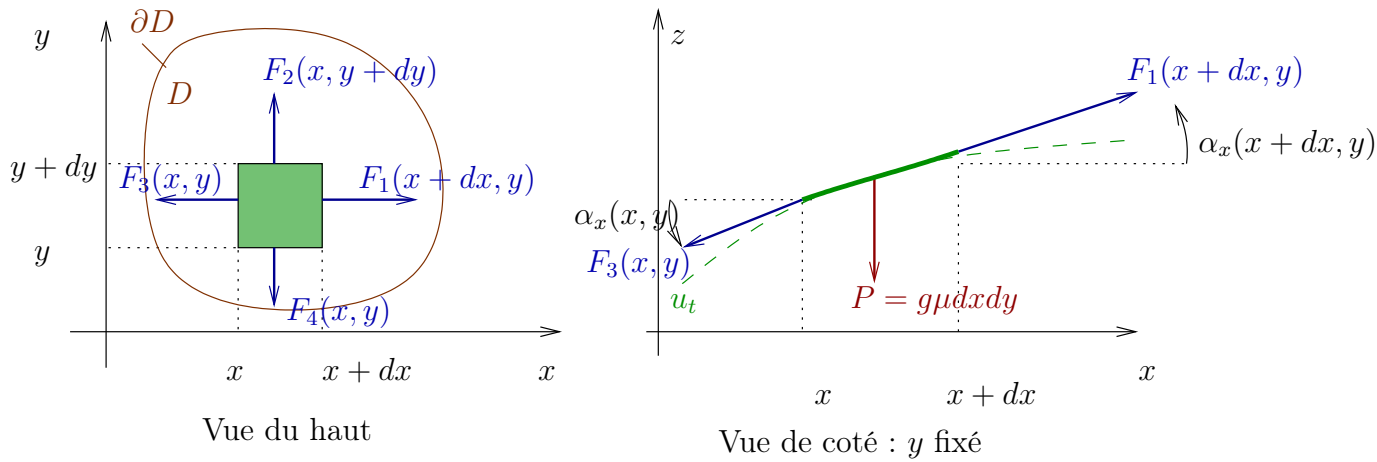
1. Mais la réponse est : *"non"* en général. (dans les années 80, des mathématiciens ont exhibé deux formes différentes de cadre, construites à partir de polygones, qui ont le même spectre.)

Pour plus d'explications, voir : « Cours de physique de R. Feynman, Électromagnétisme » Section 12-3, link.

## 2.1 Equation d'onde pour les amplitudes de la membrane

On note  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  les coordonnées dans le plan horizontal et  $z$  la coordonnée verticale. En chaque point  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  et instant  $t \in \mathbb{R}$ , on note  $z = u_t(x, y) \in \mathbb{R}$  la hauteur de la membrane. Dans cette section on va établir l'équation de mouvement qui régit l'évolution de  $t \rightarrow u_t$ .

Pour cela on va appliquer l'équation de Newton à un élément de surface  $dx dy$  au point  $(x, y)$ , en vert sur la figure.



La membrane est attachée et tendue au bord d'un domaine  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ . Les forces subies par l'élément de surface  $dx dy$  interne au domaine  $\mathcal{D}$  sont les suivantes : sur chaque côté de l'élément de surface, il y a une force de tension. Appelons  $\tau > 0$  la tension superficielle, qui est **la force par unité de longueur**, normale à une ligne sur la membrane et tangente à la surface<sup>2</sup>. Par exemple  $\|F_1\| = \|F_3\| = \tau dy$  et  $\|F_2\| = \|F_4\| = \tau dx$ .

De plus il y a le poids vertical  $P$ . Appelons  $\mu > 0$  **la masse par unité de surface** (constante). Ainsi  $\|P\| = (\mu dx dy) g$ .

On note  $\alpha_x(x, y)$  l'angle de la surface avec l'horizontale dans la direction  $x$ . On suppose  $|\alpha_x| \ll 1$  de sorte que au premier ordre

$$\frac{\partial u_t}{\partial x} = \tan \alpha_x \approx \sin \alpha_x \approx \alpha_x.$$

---

2.

*Remarque 2.1.* On a introduit ici la notation  $F_1, F_2, F_3, F_4$  pour désigner la forme de tension appliquée à chaque côté  $dl$  de la surface élémentaire. En considérant  $dl \in \mathbb{R}^2$ , il est habituel de considérer que cette force est le résultat d'une application linéaire  $dl \in \mathbb{R}^2 \rightarrow F(dl) \in \mathbb{R}^3$  appelée tenseur des contraintes.

et de même pour  $\alpha_y \approx \frac{\partial u_t}{\partial x} \ll 1$ . On utilisera la formule de Taylor au premier ordre (i.e. définition de la dérivée) pour une fonction  $f(x + dx) \approx f(x) + dx \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x)$ , donnant par exemple

$$\frac{\partial u_t}{\partial x}(x + dx, y) = \frac{\partial u_t}{\partial x}(x, y) + dx \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_t}{\partial x} \right)(x, y) = \frac{\partial u_t}{\partial x}(x, y) + dx \left( \frac{\partial^2 u_t}{\partial x^2}(x, y) \right).$$

La composante verticale (selon  $z$ ) de chacune de ces forces est alors

$$\begin{aligned} F_{3,z}(x, y) &= -(\tau dy) \sin(\alpha_x(x, y)) \approx -\tau dy \left( \frac{\partial u_t}{\partial x}(x, y) \right) \\ F_{1,z}(x + dx, y) &= (\tau dy) \sin(\alpha_x(x + dx, y)) \approx \tau dy \left( \frac{\partial u_t}{\partial x}(x + dx, y) \right) \\ &= \tau dy \left( \frac{\partial u_t}{\partial x}(x, y) + dx \left( \frac{\partial^2 u_t}{\partial x^2}(x, y) \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{4,z}(x, y) &= -(\tau dx) \sin(\alpha_y(x, y)) \approx -\tau dx \left( \frac{\partial u_t}{\partial y}(x, y) \right) \\ F_{2,z}(x, y + dy) &= (\tau dx) \sin(\alpha_y(x, y + dy)) \approx \tau dx \left( \frac{\partial u_t}{\partial y}(x, y + dy) \right) \\ &= \tau dx \left( \frac{\partial u_t}{\partial y}(x, y) + dy \left( \frac{\partial^2 u_t}{\partial y^2}(x, y) \right) \right) \end{aligned}$$

$$P_z = -g\mu dx dy$$

L'équation de Newton selon  $z$  s'écrit donc

$$(\mu dx dy) \left( \frac{\partial^2 u_t}{\partial t^2} \right) = \tau dy dx \left( \frac{\partial^2 u_t}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u_t}{\partial y^2}(x, y) \right) - g\mu dx dy$$

soit

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_t}{\partial t^2} &= \frac{\tau}{\mu} \left( \frac{\partial^2 u_t}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u_t}{\partial y^2}(x, y) \right) - g \\ &= \frac{\tau}{\mu} \Delta u_t(x, y) - g \end{aligned}$$

avec l'opérateur Laplacien

$$\Delta u_t := \frac{\partial^2 u_t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_t}{\partial y^2}.$$

La membrane est attachée au bords du domaine. Au repos, la membrane fléchit sous son propre poids, et sa forme  $\tilde{u}(x, y)$  indépendante de  $t$  vérifie donc  $0 = \frac{\tau}{\mu} \Delta \tilde{u} - g$ . On va s'intéresser à l'écart

$$v_t := u_t - \tilde{u},$$

qui vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2 v_t}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_t}{\partial t^2} = \frac{\tau}{\mu} \Delta u_t - g = \frac{\tau}{\mu} \Delta v_t + \frac{\tau}{\mu} \Delta \tilde{u} - g = \frac{\tau}{\mu} \Delta v_t. \quad (2.1)$$

On s'est ainsi débarrassé du terme constant dû au poids. Au bord du domaine  $\mathcal{D}$  noté  $\partial\mathcal{D}$ , on a

$$\forall (x, y) \in \partial\mathcal{D}, \quad u_t(x, y) = 0,$$

appelées conditions aux bords.

## 2.2 Equations d'onde sans dimension

On introduit une unité de temps  $t_0$ , d'espace  $x_0$  telles que

$$\frac{\mu x_0^2}{\tau t_0^2} = 1.$$

On utilise alors des variable de temps, d'espace sans dimension :

$$t' := \frac{t}{t_0}, \quad x' := \frac{x}{x_0}, \quad y' = \frac{y}{x_0}, \quad z' := \frac{z}{x_0}, \quad v' = \frac{v}{x_0}.$$

**Lemme 2.2.** *L'équation de mouvement (2.1) devient alors*

$$\frac{\partial^2 v_{t'}}{\partial t'^2} = \Delta_{x', y'} v_{t'}. \quad (2.2)$$

*Démonstration.* On a  $\frac{\partial^2 v_t}{\partial t^2} = \frac{x_0 \partial^2 v_{t'}}{t_0^2 \partial t'^2}$  et

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{\mu} \Delta v_t &= \frac{\tau}{\mu} \left( \frac{\partial^2 v_t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_t}{\partial y^2} \right) = \frac{\tau}{\mu} \left( \frac{x_0 \partial^2 v_{t'}}{x_0^2 \partial x'^2} + \frac{x_0 \partial^2 v_{t'}}{x_0^2 \partial y'^2} \right) \\ &= \frac{\tau}{\mu x_0} \left( \frac{\partial^2 v_{t'}}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v_{t'}}{\partial y'^2} \right) = \frac{\tau}{\mu x_0} \Delta_{x', y'} v_{t'} \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_t}{\partial t^2} &= \frac{\tau}{\mu} \Delta v_t \\ \Leftrightarrow \frac{x_0 \partial^2 v_{t'}}{t_0^2 \partial t'^2} &= \frac{\tau}{\mu x_0} \Delta_{x', y'} v_{t'} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial^2 v_{t'}}{\partial t'^2} &= \frac{\tau t_0^2}{\mu x_0^2} \Delta_{x', y'} v_{t'} = \Delta_{x', y'} v_{t'}. \end{aligned}$$

□

Dans la suite on travaille avec ces variables sans dimension et on les écrit sans les « ' ». Ainsi la membrane est modélisée par une fonction qui mesure sa déformation autour de l'équilibre à chaque instant  $t$  dans le domaine  $\mathcal{D}$  :

$$v_t : \begin{cases} \mathcal{D} & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \rightarrow v_t(x, y) \end{cases} \quad (2.3)$$

et qui satisfait (2.2) qui s'écrit

$$\frac{\partial^2 v_t}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v_t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_t}{\partial y^2} = \Delta v_t \quad (2.4)$$

appelée équation des ondes, avec les conditions au bord

$$\forall (x, y) \in \partial\mathcal{D}, \quad v_t(x, y) = 0. \quad (2.5)$$

**L'espace des fonctions :** L'espace des fonctions (2.3) vérifiant les conditions aux bords (2.5) est un espace vectoriel de dimension infinie. Il sera utile de considérer des fonctions à valeur complexes car on devra chercher des valeurs propres d'opérateurs. Aussi, afin de mesurer l'intensité d'une fonction et de comparer les fonctions, il est utile d'introduire un produit scalaire sur cet espace et le plus simple est le produit scalaire  $L^2$  :

$$\forall u, v \in C^\infty(\mathcal{D}; \mathbb{C}), \quad \langle u|v \rangle := \int_{\mathcal{D}} \bar{u}(x, y) v(x, y) dx dy.$$

La norme est  $\|u\| = \sqrt{\langle u|u \rangle} \geq 0$ . L'espace des fonctions de norme  $\|u\|$  finie est noté  $L^2(\mathcal{D})$ . C'est un espace de Hilbert, i.e. les suites de Cauchy convergent.

## 2.3 Modes propres

L'équation des ondes (2.4) est linéaire et fait intervenir l'opérateur Laplacien  $\Delta$ . On admettra le théorème suivant qui sera utile dans la suite pour résoudre l'équation d'évolution de la membrane. Le calcul numérique de ce projet permettra de vérifier ce théorème numériquement.

**Théorème 2.3.** *L'espace des fonctions  $L^2(\mathcal{D})$  des fonctions s'annulant au bord  $\partial\mathcal{D}$  admet une base de fonctions notées  $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$  qui sont les vecteurs propres de l'opérateur  $(-\Delta)$  avec des valeurs propres  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$  :*

$$(-\Delta) f_j = \lambda_j f_j \quad (2.6)$$

Considérons une fonction  $v_t$  qui modélise la surface de la membrane à l'instant  $t$ . Comme les fonctions  $(f_j)_j$  forment une base, on peut décomposer une fonction arbitraire  $v_t$  :

$$v_t = \sum_{j \geq 0} v_j f_j$$

avec des coefficients donnés par

$$v_j = \langle f_j|v \rangle \in \mathbb{C}$$

**Lemme 2.4.**  $v_t$  est solution de (2.4) si et seulement si

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad v_j(t) = a_{+,j} e^{i\sqrt{\lambda_j}t} + a_{-,j} e^{-i\sqrt{\lambda_j}t}, \quad a_{\pm,j} \in \mathbb{C} \quad (2.7)$$

avec

$$a_{\pm,j} = \frac{1}{2} v_j(0) \mp \frac{i}{2\sqrt{\lambda_j}} \frac{dv_j}{dt}(0).$$

*Démonstration.* On a

$$\begin{aligned} \Delta v_t = \frac{d^2 v_t}{dt^2} &\Leftrightarrow \sum_j v_j(t) \Delta f_j = \sum_j \frac{d^2 v_j}{dt^2} f_j \\ &\Leftrightarrow - \sum_j v_j(t) \lambda_j f_j = \sum_j \frac{d^2 v_j}{dt^2} f_j \\ &\Leftrightarrow -v_j(t) \lambda_j = \frac{d^2 v_j(t)}{dt^2}, \forall j \\ &\Leftrightarrow v_j(t) = a_{+,j} e^{i\sqrt{\lambda_j}t} + a_{-,j} e^{-i\sqrt{\lambda_j}t}, \quad a_{\pm,j} \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

On remarque que  $v_j(0) = a_{+,j} + a_{-,j}$  et  $\frac{dv_j}{dt}(0) = i\sqrt{\lambda_j}(a_{+,j} - a_{-,j})$ . Donc inversement

$$a_{\pm,j} = \frac{1}{2} v_j(0) \mp \frac{i}{2\sqrt{\lambda_j}} \frac{dv_j}{dt}(0).$$

□

*Remarque 2.5.* Si à l'instant  $t = 0$ , l'état de la membrane est connu par la donnée des fonctions  $v_{t=0}$  et  $(\frac{dv_t}{dt})_{t=0}$ , alors on déduit les coefficients  $v_j(0) = \langle f_j | v_{t=0} \rangle$  et  $\frac{dv_j}{dt}(0) = \langle f_j | (\frac{dv_t}{dt})_{t=0} \rangle$ . Cet état initial dépend par exemple de la façon dont le musicien frappe le tambour à tel ou tel endroit. La formule (2.7) montre alors que l'évolution de la membrane est donnée par une superposition des fréquences  $\omega_j = \sqrt{\lambda_j}$  avec certaines amplitudes. Cela détermine en particulier le son produit. On pourrait rajouter un amortissement dans le modèle.

On arrive à la même équation, dans plusieurs problèmes de propagation d'ondes (potentiel électrique, amplitude quantique, onde sonore...).

## 2.4 Résolution dans des cas simples

Par la méthode de séparation des variables, on peut facilement résoudre (2.6) dans le cas particulier de domaines  $\mathcal{D}$  :

### Exercice 2.6.

- Résoudre  $-\Delta f = \lambda f$  à une dimension sur le segment  $D = [0, L]$ , soit pour une fonction  $f(x)$  telle que  $f(0) = f(L) = 0$ , l'équation est

$$-\partial_x^2 f = \lambda f$$

- Résoudre  $-\Delta f = \lambda f$  dans un domaine rectangulaire :  $\mathcal{D} = [0, L_1] \times [0, L_2]$ . Aide : séparer les problème en  $x, y$  et utiliser la question précédente.
- Résoudre  $-\Delta f = \lambda f$  dans un domaine circulaire :  $\mathcal{D}$  est un disque de rayon  $R$ . Aide : utiliser les coordonnées polaires et les fonctions de Bessel.

### 3 Algorithmes numériques

Dans cette partie on cherche à résoudre numériquement (2.6) et déduire (2.7). La résolution numérique sera approchée mais convergera vers la solution mathématique dans la limite  $a \rightarrow 0$ .

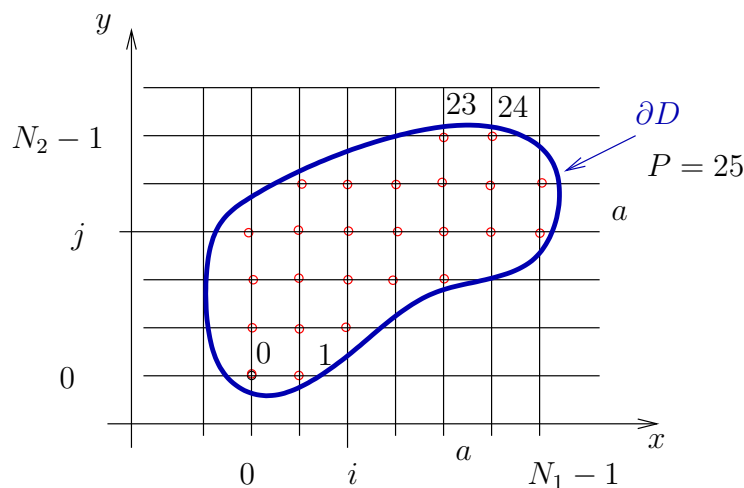
#### 3.1 Discrétisation du domaine

Pour résoudre numériquement le système equ. (2.6), on discrétise l'espace  $(x, y)$  en un nombre fini (mais grand) de points placés aux intersections d'un réseau carré (assez serré) et intérieurs à la membrane, i.e. dans le domaine  $\mathcal{D}$ . On se donne  $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$  et notons  $a$  le coté d'une maille élémentaire en  $x$  et  $y$ . Le réseau est formé par les points  $(x_i, y_j) \in \mathbb{R}^2$  suivants

$$\begin{aligned} x_i &= ai, & i &= 0, \dots, N_1 - 1 \\ y_j &= aj, & j &= 0, \dots, N_2 - 1. \end{aligned}$$

On suppose que le domaine est inclu dans la région décrite

$$\mathcal{D} \subset [x_0, x_{N_1-1}] \times [y_0, y_{N_2-1}].$$





### 3.2 Discrétisation de l'opérateur Laplacien

Si  $\tilde{f} \in C^\infty(\mathcal{D}; \mathbb{C})$  est une fonction sur le domaine, on lui associe le tableau  $f = (f_{i,j})_{i,j \in [0, N-1]}$  avec

$$f_{i,j} = \tilde{f}(x_i, y_j) \in \mathbb{C},$$

et on pose  $f_{i,j} = 0$  pour les points  $(x_i, y_j)$  hors du domaine  $\mathcal{D}$ .

Il nous faut réécrire l'équation (2.6).

**Lemme 3.1.** *Pour  $a \ll 1$ , au premier ordre on a*

$$\left(-\Delta \tilde{f}\right)(x_i, y_j) \approx (Af)_{i,j}$$

avec l'opérateur  $A$  défini par

$$(Af)_{i,j} = \frac{1}{a^2} (4f_{i,j} - (f_{i+1,j} + f_{i-1,j} + f_{i,j+1} + f_{i,j-1})) \quad (3.1)$$

et avec la convention de poser  $f_{i,j} = 0$  pour un point hors du domaine  $\mathcal{D}$ .

*Démonstration.* D'après la formule de Taylor, en première approximation,

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_i, y_j) \simeq \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{a}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x^2}(x_i, y_j) &\simeq \frac{(\partial \tilde{f} / \partial x)_{i,j} - (\partial \tilde{f} / \partial x)_{i-1,j}}{a} \\ &\simeq \frac{f_{i+1,j} + f_{i-1,j} - 2f_{i,j}}{a^2} \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\Delta \tilde{f}(p_{i,j}) = \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y^2} \simeq \frac{f_{i+1,j} + f_{i-1,j} + f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 4f_{i,j}}{a^2}$$

appelée approximation par différences finies. □

### 3.3 Notation matricielle

On va introduire une notation matricielle. Pour cela on numérote de façon arbitraire les points intérieurs au domaine par un entier  $p = 0 \dots (P-1)$ , où  $P$  est le nombre de points à l'intérieur du domaine. On note  $p(i, j) \in \{0, \dots, P-1\}$  le numéro du point  $(i, j) \in \mathcal{D}$ . On note  $f_p = f_{i,j}$  pour  $p = p(i, j)$  et ainsi

$$f = (f_p)_{p \in [0, P-1]}$$

est un vecteur.

On note  $p' \sim p$  si ces indices correspondent à deux points voisins du réseau, i.e.  $p = p(i, j)$  et  $p' = p(i', j')$  avec  $(i', j') = (i + 1, j)$  ou  $(i', j') = (i - 1, j)$  ou  $(i', j') = (i, j - 1)$  ou  $(i', j') = (i, j + 1)$ .

D'après (3.1), l'opérateur  $A$  est représenté par une matrice  $A = (A_{p',p})_{p',p \in [0, P-1]}$  de taille  $P \times P$ , dont les éléments de matrice sont

$$A_{p,p} = \frac{4}{a^2} \quad (3.2)$$

$$A_{p',p} = -\frac{1}{a^2} \text{ si } p' \sim p. \quad (3.3)$$

Le problème à résoudre (2.6) est remplacé par l'équation aux valeurs propres suivante portant sur la matrice  $A$  :

$$Af = \lambda f, \quad (3.4)$$

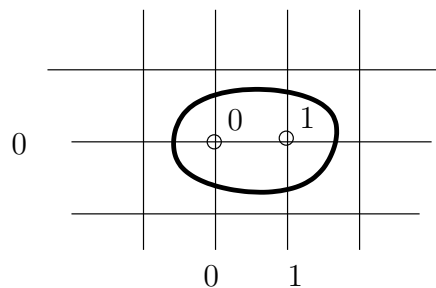
où les inconnues sont le vecteur  $f$  et  $\lambda > 0$ .

## 4 Résolution analytique dans des cas simples

On commence par un calcul analytique (sur le papier) dans des cas simple. Cela nous servira à tester le programme ensuite.

### 4.1 Réseau $2 \times 1$

Le cas le plus simple est le réseau de taille  $N_1 = 2, N_2 = 1$ . On a donc  $P = 2 \times 1 = 2$  points numérotés  $p(0, 0) = 0$ ,  $p(1, 0) = 1$  et distants entre eux de la distance  $a$ .



#### Exercice 4.1.

- (1) Écrire explicitement la matrice  $2 \times 2$ ,  $A$  de l'équation equ.(3.1) .
- (2) Chercher les valeurs propres et vecteurs propres de  $A$ .
- (3) Dessiner l'allure des modes propres  $f$  trouvés.

## 4.2 Réseau $2 \times 2$

Ce deuxième cas nous permettra aussi de tester le futur programme sur cet exemple. On choisit  $N_1 = 2$ ,  $N_2 = 2$ . On a donc  $P = 2 \times 2 = 4$  points placés aux sommets d'un carré, numérotés  $p(0, 0) = 0$ ,  $p(1, 0) = 1$ ,  $p(0, 1) = 2$ ,  $p(1, 1) = 3$ , et distants entre eux de la distance  $a$ .

### Exercice 4.2.

- (1) Écrire explicitement la matrice  $4 \times 4$ ,  $A$  de l'équation equ.(3.1) .
- (2) Chercher les valeurs propres et vecteurs propres de  $A$ .
- (3) Dessiner l'allure des modes propres  $f$  trouvés.

## 5 Programmation

On donne des indications de programmation pour résoudre l'équation (3.4), puis représenter les modes propres et l'évolution d'une onde.

### 5.1 Etape 1, « modes propres et forme rectangulaire »

On va considérer un rectangle, de taille  $N_1 \times N_2$  points. Ainsi  $i = 0 \rightarrow N_1 - 1$  et  $j = 0 \rightarrow N_2 - 1$ .

Dans un premier temps (pour simplifier la programmation et aussi retrouver les résultats ci-dessus), on considère que **tous les points du rectangle** sont dans le domaine. Ainsi  $P = N_1 N_2$ .

On numérote les points intérieurs par  $p : 0 \rightarrow P - 1$  dans un ordre arbitraire. Par exemple si  $N_1 = 7$ ,  $N_2 = 6$ . Il y a  $P = 42$  points intérieurs.

On écrit tout d'abord quelques variables et fonctions :

— Variables utilisées :

—  $N_1, N_2$  : taille de la discrétisation du rectangle total.

—  $P = N_1 N_2$  : nombre de points intérieurs

— **Numero()** : une fonction qui donne le numéro  $p$  d'un point à partir de sa position  $(i, j)$  sur le réseau

— **Position()** : une fonction qui inversement, à partir d'un numéro de point donné  $p$ , donne la position  $(i, j)$  sur le réseau.

— **Interieur()** : Ecrire une fonction qui dit si un point  $(i, j)$  est à l'intérieur du domaine (renvoie 1 ou 0)

— Variables utilisées :

— Matrice  $A$  de taille  $P \times P$ . On utilisera une matrice « creuse » ou « sparse » dans le code informatique.

—  $N_e$  : nombre de valeurs propres souhaitées pour la diagonalisation.

— `val_p` : valeurs propres

— `vect_p` : vecteurs propres

- `Remplit_matrice()` : En faisant appel aux procédures précédentes, écrire une fonction qui remplit la matrice  $A$  et diagonalise la matrice. On obtient les valeurs propres et vecteurs propres.
- `Dessin_spectre()` : fonction qui dessine le spectre des valeurs propres.
- `Dessin_vect_propre(e)` : fonction qui dessine le mode propre numéro  $e$ .
- Utiliser les fonctions précédentes pour calculer et dessiner les modes propres et dessiner le spectre des valeurs propres.

*Remarque 5.1.* En pratique, on pourra avoir  $P = 10^5$  et  $N_e = 200$ .

### Exploitation :

- (1) Vérifier que vous obtenez correctement les résultats pour un réseau  $2 \times 1$  puis  $2 \times 2$ .
- (2) Observez les réseaux de forme  $N \times 1$ . Comparer aux valeurs théoriques de la corde vibrantes.
- (3) Observez les réseaux de la forme  $N_1 \times N_2$ . Quelles sont les dégénérescences du spectre ?

## 5.2 Etape 2, « modes propres et forme quelconque »

Modifier votre programme afin de pouvoir traiter un tambour de forme quelconque. Cette forme est par exemple dessinée par l'utilisateur au début du programme. Pour cela, on utilisera des listes :

- Tableau  $T[i, j] = -1$  si le point  $(i, j)$  est à l'extérieur du domaine et  $T[i, j] = p \geq 0$  numéro du point si  $(i, j)$  est à l'intérieur du domaine.
- Inversement, les listes  $T_1[p] = i$ ,  $T_2[p] = j$  qui contiennent les positions  $(i, j)$  du point numéro  $p \geq 0$  à l'intérieur du domaine.

Ecrire :

- (1) Une fonction `geometrie(i, j)`. En entrée  $(i, j)$  est la position d'un point et en sortie 1 si le point est dans le domaine et 0 sinon.
- (2) Une fonction `Initialise_Tab()` qui crée les tableaux et listes  $T, T_1, T_2$  en utilisant la fonction `geometrie()`.
- (3) Une fonction `Dessin_domaine()` qui dessine le domaine. On utilise la fonction `geometrie()`
- (4) Utiliser les fonctions précédentes pour choisir une fore quelconque (disque ou ovale ou autre) et dessiner le spectre, dessiner quelques modes propres.

## 5.3 Étape 3, « Évolution d'une onde quelconque »

La diagonalisation nous a donné des valeurs propres  $\lambda_e \geq 0$  avec  $e = 0, 1, \dots, N_e - 1$  et des vecteurs propres  $f_e$  d'amplitude au point  $I = 0, 1, \dots, P - 1$  notée :  $f_e(I) \in \mathbb{C}$ .

Variables et fonctions à introduire :

- $v\_I$  : vecteur complexe à  $P$  composantes qui représente une onde quelconque par ses composantes  $v_I(I) \in \mathbb{C}$  avec  $I = \text{numero}(i, j)$ .
- $v\_e$  : vecteur complexe qui représente une onde quelconque et ses composantes  $v_e(e) \in \mathbb{C}$  dans la base des modes propres.
- Fonction `Convert_vI_to_ve()` qui prend  $v\_I$  en entrée et donne  $v\_e$  en sortie, utilisant la formule

$$v_e(e) = \sum_I f_e(I) v_I(I)$$

(Explications : en utilisant les notations de Dirac,  $v_e(e) = \langle f_e | v \rangle = \sum_I \langle f_e | I \rangle \langle I | v \rangle = \sum_I f_e(I) v_I(I)$ )

- Fonction `Convert_ve_to_vI()` qui prend  $v\_e$  en entrée et donne  $v\_I$  en sortie, utilisant la formule

$$v_I(I) = \sum_e f_e(I) v_e(e).$$

- $dt$  : pas de temps d'évolution
- Fonction `Evolution_etat()`. En entrée :  $v\_e$ , en sortie  $v\_e$  à la date  $dt$ . Pour cela on utilise l'équation (2.7) qui donne ici :

$$v'_e(e) = v_e(e) e^{i\sqrt{\lambda_e} dt}, \quad \forall e = 0, \dots, N_e - 1$$

- Fonction `Animation_etat()` qui fait évoluer une onde  $v$  et crée un film (gif animé) d'un instant  $t = 0$  à une date  $t$  ultérieure quelconque. Pour cela on utilise la fonction `Evolution_etat()` dans une boucle. Plus précisément, en entrée : vecteur  $v\_I$ , et date  $t_{fin} > 0$ . En sortie  $v\_I$  qui est le vecteur évolué au temps  $t_{fin}$ . Pour cela, on appelle successivement les fonctions :

- `Convert_vI_to_ve()`
- `Evolution_etat()`
- `Convert_ve_to_vI()`

- Choix de l'état initial  $v\_I$  :

- on peut choisir un « **pic de Dirac** », cad valeur 1 en un point donné et nul ailleurs.
- on peut choisir « **un paquet d'onde Gaussien** » de position initiale  $x_0, y_0$  et vitesse initiale  $v_x, v_y$  de largeur  $\delta > 0$ . Formule :

$$\varphi(x, y) = \exp(iv_x x + iv_y y) \exp\left(-\frac{1}{2\delta^2} ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)\right)$$

Ensuite, on déduit  $v_I(I) = \varphi(x, y)$ , en utilisant  $I = \text{numero}(i, j)$  et  $i = x/a$  et  $j = y/a$ .

## 6 Exploitation

### 6.1 Observer et vérifier la loi de Weyl concernant la densité d'états

Pour cela on trace numériquement la valeur propre  $\lambda_e \geq 0$  en fonction de l'indice  $e \in \mathbb{N}$  définies par (2.6), en supposant que les valeurs propres sont classées par ordre croissant :  $\lambda_{e+1} \geq \lambda_e$ .

#### 6.1.1 Loi de Weyl dans un domaine quelconque

La « loi de weyl » ou « formule de densité d'états » est une estimation de cette fonction dans le cas continu.

**Proposition 6.1.** « *Loi de Weyl dans le continu* ». Dans un domaine  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}_x^2$  compact, considérons l'équation

$$(-\Delta) f_e(x) = \lambda_e f_e(x)$$

avec  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  et la condition  $f_e(x) = 0$  pour  $x \in \partial\mathcal{D}$  (bord du domaine). On suppose les valeurs propres classées par ordre croissant. Alors

$$\lambda_e = \frac{4\pi e}{\text{Surf}(\mathcal{D})} + O(1)$$

*Démonstration.* (idée de la preuve). L'opérateur Laplacien  $-\Delta$  correspond au Hamiltonien classique  $H(x, p) = \|p\|^2 = p_1^2 + p_2^2$  (son symbole). Soit une « énergie »  $\lambda \geq 0$  fixé. En mécanique classique, les états  $(x, p)$  d'énergie inférieure à  $\lambda$  sont caractérisés par

$$\begin{aligned} H(x, p) \leq \lambda &\Leftrightarrow p_1^2 + p_2^2 \leq \lambda \text{ et } x \in \mathcal{D} \\ &\Leftrightarrow (x, p) \in \mathcal{D} \times B(\sqrt{\lambda}) \end{aligned}$$

où  $B(r) \subset \mathbb{R}^2$  est le disque de rayon  $r$ . En mécanique ondulatoire avec  $d$  degrés de liberté, ici  $d = 2$ , d'après le principe d'incertitude, un état occupe le volume  $\text{Vol}_0 = (2\pi)^d$  dans l'espace des phases  $(x, p)$ . Donc le nombre d'états ondulatoire d'énergie inférieure à  $\lambda$  est

$$e = \frac{\text{Vol}(\mathcal{D} \times B(\sqrt{\lambda}))}{\text{Vol}_0} + O(1) = \frac{\text{Surf}(\mathcal{D}) \pi \lambda}{(2\pi)^2} + O(1) = \frac{\text{Surf}(\mathcal{D}) \lambda}{4\pi} + O(1)$$

soit

$$\lambda_e = \frac{4\pi e}{\text{Surf}(\mathcal{D})} + O(1)$$

□

### 6.1.2 Cas d'un domaine rectangulaire

Dans le cas d'un carré de côté  $L$  et surface  $\text{Surf}(\mathcal{D}) = L^2$ , on peut résoudre explicitement l'équation

$$(-\Delta) f_e(x) = \lambda_e f_e(x).$$

On a  $f_e(x) = \sin\left(\pi n_1 \frac{x_1}{L}\right) \sin\left(\pi n_2 \frac{x_2}{L}\right)$  avec  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  donnant  $(-\Delta) f_e = \left(\left(\frac{\pi n_1}{L}\right)^2 + \left(\frac{\pi n_2}{L}\right)^2\right) f_e$  donc

$$\begin{aligned} \left(\left(\frac{\pi n_1}{L}\right)^2 + \left(\frac{\pi n_2}{L}\right)^2\right) &= \lambda_e \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt{\lambda_e} \left(\frac{L}{\pi}\right)\right)^2 &= (n_1^2 + n_2^2) \end{aligned}$$

et  $e$  est donc le nombre de points entiers dans le cercle de rayon  $r = \sqrt{\lambda_e} \frac{L}{\pi}$  soit

$$\begin{aligned} e &= \pi r^2 + O(1) = \lambda_e \frac{L^2}{\pi} + O(1) \\ &= \lambda_e \frac{\text{Surf}(\mathcal{D})}{\pi} + O(1) \end{aligned}$$

### 6.1.3 Loi de Weyl sur un réseau discret

**Proposition 6.2.** « *Loi de Weyl sur un réseau discret* ». Dans un domaine  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}_x^2$  compact, considérons l'équation

$$(-\Delta) f_e(x) = \lambda_e f_e(x)$$

avec  $\Delta$  le Laplacien discret sur un réseau  $(a\mathbb{Z})^2$  avec  $a \ll 1$ , et la condition  $f_e(x) = 0$  pour  $x \in \partial\mathcal{D}$  (bord du domaine). On suppose les valeurs propres classées par ordre croissant. Alors

**6.2** Vérifier que un paquet d'onde évolue selon les équations classique de mouvement de Hamilton.

**6.3** Rajouter un changement d'indice (ou potentiel) dans le modèle qui dépend de l'espace