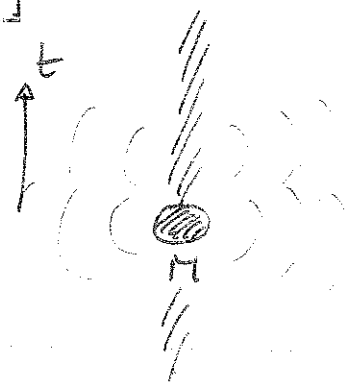
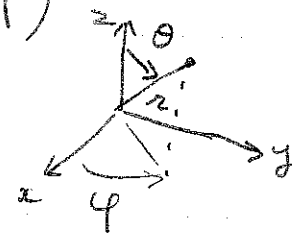
Géodésiques autour d'une étoile



- modèle de Schwarzschild
- réf : Wald p. 124

<u>espace temps</u> : $\mathbb{R}^{1,3}$

coordonnées sphériques : (t, r, θ, φ)



<u>métrique</u> :

$$g = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2\right)$$

<u>propriétés</u> : - statique ; translation temporelle
- symétrie sphérique

<u>unités</u> : si $g = -dt'^2 + dr'^2 + r'^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2)$ (après modif $(r, t) \to (r', t')$)
il faut rajouter $c = 3 \cdot 10^8 \ m.s^{-1}$

et $G = 6{,}67 \cdot 10^{-10} \ m^3 . kg^{-1} . s^{-2}$

cad $\boxed{\begin{cases} t' \to c t' \\ M \to \dfrac{c^2 M}{G} \\ r' \to r' \end{cases}}$: à remplacer

<u>ex d'unités</u> :
- masse $\equiv M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ kg
- distance $\equiv$

<u>ex</u> : $M_{\odot}$ (soleil) $= 2 \cdot 10^{30}$ kg : unité de masse donne $r_\odot = \dfrac{M_\odot G}{c^2} = 1{,}48 \cdot 10^4$ m.
$t_\odot = \dfrac{r_\odot}{c} = 4{,}9 \cdot 10^{-5}$ s. $= 14{,}8$ km

<u>rem</u> : la singularité en $r = 2M$ n'est pas véritable (pb des coordonnées)
Mais il y a une vraie singularité en $r = 0$.
les calculs qui suivent sont pour $r > 2M$.

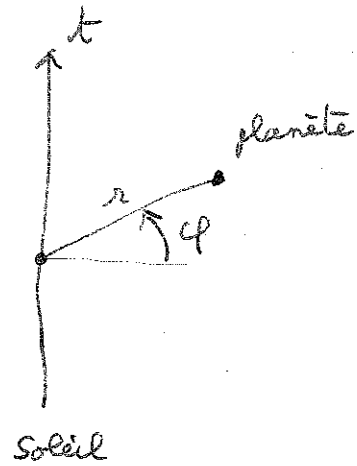
<u>Rem</u> : ensuite on travaillera dans le plan $z=0$

1 cad $\theta = \frac{\pi}{2}$.

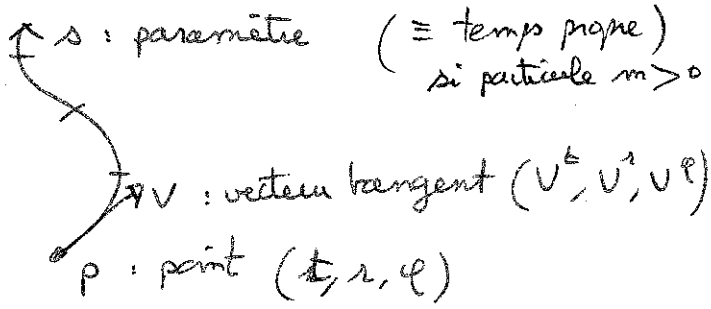
on aura finalement que les coordonnées $(t, \underbrace{r, \varphi}_{\text{polaires}})$

donc :

2
$$g = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2 d\varphi^2$$



<u>Equation des géodésiques</u> :
3 (Nakahara p 225)



lagrangien : $\mathcal{L} = -\frac{1}{2} g_p(V,V)$

4 équation d'Euler-Lagrange : $\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V^\lambda}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\lambda} = 0$

(il faut rendre : $I = \int \sqrt{\mathcal{L}}$ extrémale $\Leftrightarrow I = \int \mathcal{L}$ extrémale)

avec $\lambda \equiv t, r, \varphi$

on a donc :

5
$$\boxed{\mathcal{L} = +\frac{1}{2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)V^{t^2} - \frac{1}{2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}V^{r^2} - \frac{1}{2}r^2 V^{\varphi^2}}$$

<u>rem</u> : si photon, $m=0$, s est un paramètre affine sur la géodésique.
$V^t = \frac{dt}{ds}$ est la période de la lumière.

cela donne :

$$\frac{d}{ds}\left[+\left(1-\frac{2M}{r}\right)V^t\right] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$$

1
$$\frac{d}{ds}\left[-\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}V^r\right] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = +\frac{1}{2}\left(\frac{2M}{r^2}\right)V^{t^2} - \frac{1}{2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-2}\left(\frac{2M}{r^2}\right)V^{r^2} - r V^{\varphi^2}$$

$$\frac{d}{ds}\left[-r^2 V^\varphi\right] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0$$

on pose :
$$E = \left(1-\frac{2M}{r}\right)V^t$$

2
$$L = r^2 V^\varphi$$

prop : ce sont des constantes du mouvement,

3 car $\boxed{\frac{dE}{ds} = 0, \qquad \frac{dL}{ds} = 0}$

interprétation (Wald p139) :

4 • pour $r \gg M$, $E \simeq V^t$, donc E est l'énergie de la géodésique mesurée par un observateur statique (ie du référentiel (t, r, φ))

et comme E est conservée, on peut appeler

E l'énergie totale contenant l'énergie potentielle gravitationnelle

5 • L = moment angulaire par unité de masse (si espace euclidien)

c'est la loi des Aires de Newton.

1 ensuite $\frac{dr}{ds} = V^r$

on obtient :

$$(*) \quad \frac{dV^r}{ds} = -\left(\frac{M}{r^2}\right) E^2 \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} + \frac{L^2}{r^3}\left(1-\frac{2M}{r}\right)$$

2

$$+ \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\left(\frac{M}{r^2}\right) V^{r\,2}$$

3 <u>Rem</u> : $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{lagrangien}}}{\mathcal{L}} = + \frac{1}{2}\frac{E^2}{\left(1-\frac{2M}{r}\right)} - \frac{1}{2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} V_r^2 - \frac{1}{2}\frac{L^2}{r^2}$

4 $\longrightarrow$ $\boxed{\frac{1}{2}V_r^2 = \left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(-\mathcal{L} - \frac{1}{2}\frac{L^2}{r^2}\right) + \frac{1}{2}E^2}$

c'est une <u>équation intégrale</u> car $\mathcal{L}$ est conservé

5 <u>Prop</u> : $\boxed{\mathcal{L} = -\frac{1}{2} g_p(v,v) \text{ est conservé}}$

<u>rem</u> : $\mathcal{L} = 0$ si lumière
$\mathcal{L} = \frac{1}{2}$ si particule
car $s \equiv$ temps propre

6 <u>dém</u> : $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$ donc $\mathcal{H} = \vec{P}.\vec{V} - \mathcal{L}$ est conservé

et $\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{V}}.\vec{V} - \mathcal{L} = -g(v,v) + \frac{1}{2}g(v,v) = -\frac{1}{2}g(v,v) = \mathcal{L}$ ∎

Cela permet de simplifier (*) et donne finalement :

7
$$\boxed{\begin{cases} \frac{dr}{ds} = V^r \\ \frac{dV^r}{ds} = -\frac{2M}{r^2}\mathcal{L} + \frac{L^2}{r^3}\left(1-\frac{3M}{r}\right) \end{cases}}$$

force de Newton

force centrifuge

force de relat. gén qui explique le périhélie à petit r.

à intégrer par Runge Kutta.

interprétation de l'équation intégrale : pb 1D, cf Wald p139

$$\underbrace{\frac{1}{2}V_r^2}_{\text{énergie cinétique}} + \underbrace{\left(\frac{2M}{r}-1\right)\left(-\mathcal{L}-\frac{1}{2}\frac{L^2}{r^2}\right)}_{\text{énergie potentielle } V} = \underbrace{\frac{1}{2}E^2}_{\text{énergie totale}}$$

$$V = \left(\frac{2M}{r}-1\right)\left(-\mathcal{L}-\frac{1}{2}\frac{L^2}{r^2}\right)$$

$$= -\frac{2M}{r}\mathcal{L} + \mathcal{L} - \frac{ML^2}{r^3} + \frac{1}{2}\frac{L^2}{r^2}$$

terme de Newton en $\frac{1}{r}$

important à petit r.

barrière centrifuge

on a $\frac{\partial V}{\partial r} = +\frac{2M}{r^2}\mathcal{L} + \frac{3ML^2}{r^4} - \frac{L^2}{r^3} = 0$

$\Longleftrightarrow \quad r^2 \cdot 2M\mathcal{L} - r \cdot L^2 + 3ML^2 = 0$

$\Longleftrightarrow \quad \Delta = L^4 - 24M^2\mathcal{L}L^2 = L^2(L^2 - 24M^2\mathcal{L})$

$\Delta \geq 0 \Longleftrightarrow L^2 \geq 24M^2\mathcal{L}$

- si $\mathcal{L} = \frac{1}{2}$: et alors $\boxed{r_\pm = \frac{L^2 \pm \sqrt{\Delta}}{2M}}$: si $\mathcal{L} = \frac{1}{2}$

  si $L \geq \sqrt{12} \cdot M$ $\left\{ \Delta = L^2(L^2 - 12M^2) \right.$

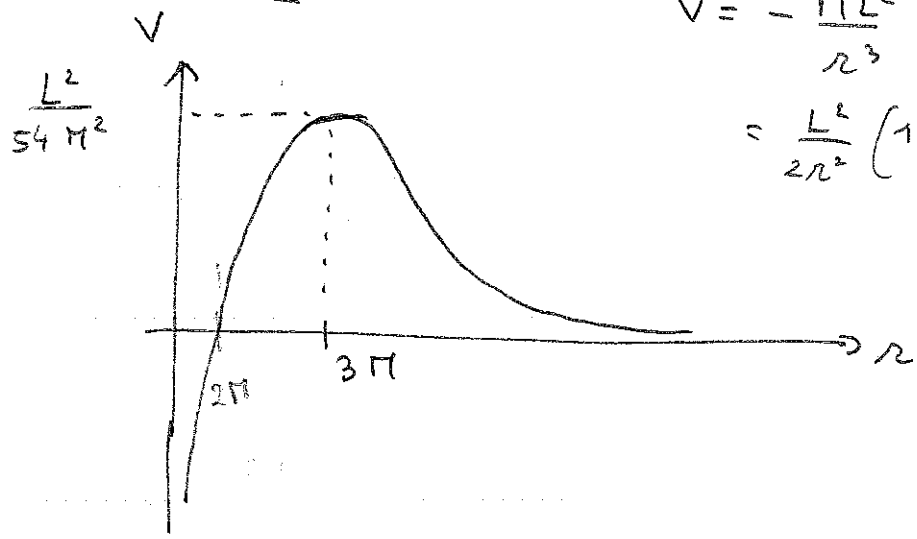
-

  si $L \leq \sqrt{12} \cdot M$ pas de racine

- si $\mathcal{L} = 0$: $r = 3M$

si lumière $\mathcal{L} = 0$

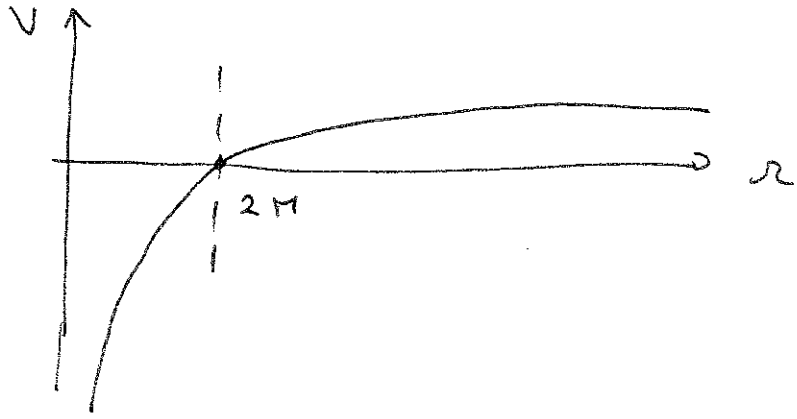
$$V = -\frac{ML^2}{r^3} + \frac{1}{2}\frac{L^2}{r^2}$$
$$= \frac{L^2}{2r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$$



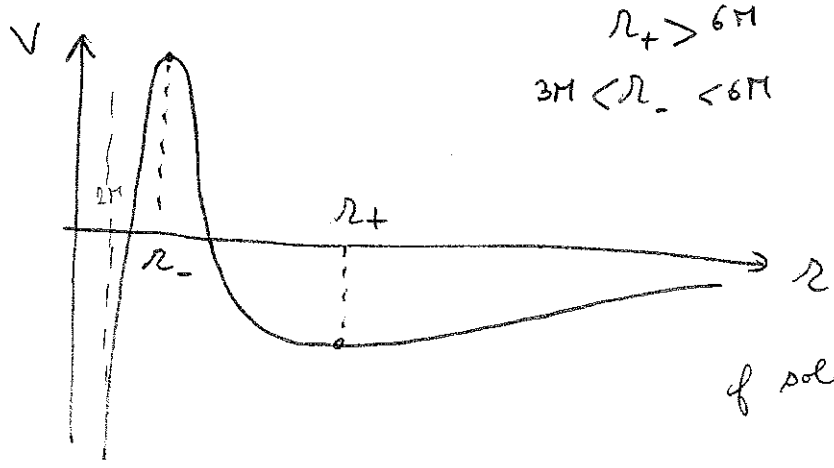
si particule $\mathcal{L} = \frac{1}{2}$

$$V = -\left(\frac{2M}{r} - 1\right)\left(1 - \frac{L^2}{r^2}\right)\frac{1}{2}$$

- si $L \leq \sqrt{12} \cdot M$



- si $L \geq \sqrt{12} \cdot M$



$r_+ > 6M$

$3M < r_- < 6M$

f soleil + lin

résolution à partir d'une condition initiale :

• si particule : position $\begin{cases} r_0 \\ \varphi_0 \end{cases}$ $t_0 = 0$

1 ⓐ conditions initiales : vitesse : $\begin{cases} v_{r_0} = \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{dr}{ds} \cdot \dfrac{ds}{dt} = V_r \cdot \dfrac{1}{V_t} \\ v_{\varphi_0} = \dfrac{d\varphi}{dt} = V_\varphi \cdot \dfrac{1}{V_t} \end{cases}$

! il faut d'abord faire un chgt de variable :

car $c = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$ cfp 1

2 rem : la trajectoire est indépendante de la masse $m > 0$ de la particule → on prend $\mathcal{L} = \frac{1}{2}$ (4-5)

(2-5) → $\mathcal{L} = \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} g_p(V, V)$

$$\Leftrightarrow \quad +1 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \cdot V^{t^2} - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \cdot V^{r^2} - r^2 V^{\varphi^2}$$

$$= \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right) - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \cdot v_r^2 - r^2 \cdot v_\varphi^2\right] \cdot V^{t^2}$$

(7-1) →
$$\begin{cases} V_0^t = \left[+\left(1 - \frac{2M}{r_0}\right) - \left(1 - \frac{2M}{r_0}\right)^{-1} \cdot v_{r_0}^2 - r_0^2 \, v_{\varphi_0}^2\right]^{-\frac{1}{2}} \\ V_0^r = v_{r_0} \cdot V_0^t \\ V_0^\varphi = v_{\varphi_0} \cdot V_0^t \end{cases}$$

(3-2) →
$$\begin{cases} E = \left(1 - \frac{2M}{r_0}\right) \cdot V_0^t \\ L = r_0^2 \cdot V_0^\varphi \end{cases}$$

(2-5) → $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2M}{r_0}\right) V_0^{t^2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2M}{r_0}\right)^{-1} V_0^{r^2} - \frac{1}{2} r_0^2 V_0^{\varphi^2}$

(à vérifier numériquement que c'est conservé)

• au départ, on pose $s = 0$ (temps propre).

ⓑ En intégrant (4-7) pour les fonctions $r(s), V^r(s), \varphi(s), t(s)$, on obtient : $r(s), V^r(s)$ pour s fixé > 0.

Trajectoire de Kepler :

- $M = 1$ (Soleil)
- $r \gg 1 = M$
- $\|v\| \ll 1$: conditions initiales v_{r_0}, v_{φ_0}

$\longrightarrow$ $c = 1$, $V_0^t \simeq 1$

$V_0^r = v_{r_0}$

$V_0^\varphi = v_{\varphi_0}$

$E \simeq 1$

$L = r_0^2 \cdot v_{\varphi_0}$

équations : $\dfrac{dt}{ds} = 1 \longrightarrow s = t$

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{ds} = V^r \\ \dfrac{dV^r}{ds} = -\dfrac{2M}{r^2}\cdot\dfrac{1}{2} + \dfrac{L^2}{r^3}\left(1 - \dfrac{3M}{r}\right) \\ \dfrac{d\varphi}{ds} = \dfrac{L}{r^2} \end{cases}$$

Newton

solut° circulaire (Newton) : $r = r_0 = \text{cste}$; on cherche r_0 (v_{φ_0})

$\longrightarrow V^r = 0$; $\dfrac{L^2}{r^3} = \dfrac{M}{r^2}$; $r = \dfrac{L^2}{M} = \dfrac{r_0^4 v_{\varphi_0}^2}{M}$

$r_0 = \sqrt[3]{\dfrac{M}{v_{\varphi_0}^2}}$ $\boxed{v_{\varphi_0} = \sqrt{\dfrac{M}{r_0^3}}}$ $L = \sqrt{M r_0}$

$v = r_0 v_{\varphi_0} = \dfrac{1}{\sqrt{r_0}} \cdot \sqrt{M}$

```
#include <iostream.h>
#include <fstream.h>
#include <math.h>

const K=4;
double L,E
```

Solution circulaire generale :

$$\frac{dU^2}{dr} = 0 \longrightarrow \frac{M}{r^2} = \frac{L^2}{r^3}\left(1 - \frac{3M}{r}\right)$$

$$\longrightarrow M r^2 = L^2 (r - 3M)$$

$$\longrightarrow M r^2 - L^2 r + 3 M L^2 = 0$$

$$\longrightarrow r^2 - \frac{L^2}{M} r + 3L^2 = 0$$

$$\Delta = \left(\frac{L^2}{M}\right)^2 - 12 L^2 = L^2\left(\frac{L^2}{M^2} - 12\right)$$

$$> 0 \quad \text{ssi} \quad L \geqslant \sqrt{12} \cdot M$$

$$= 3.46 \cdot M$$

- si $L \geqslant \sqrt{12} \cdot M$,

$$r_\pm = \left(\frac{L^2}{M} \pm \sqrt{\Delta}\right)\frac{1}{2}$$

$$= \frac{L^2}{2M}\left(1 \pm \underbrace{\sqrt{1 - \frac{12M^2}{L^2}}}_{<1}\right)$$

Parametres :

- ellipses qui précessent : $M = 1$,
  $r_0 = 30$, $\varphi_0 = 0$, $v_{r0} = 0$
  $v_{\varphi_0} = 0{,}9 \times \sqrt{\frac{M}{r_0^3}}$