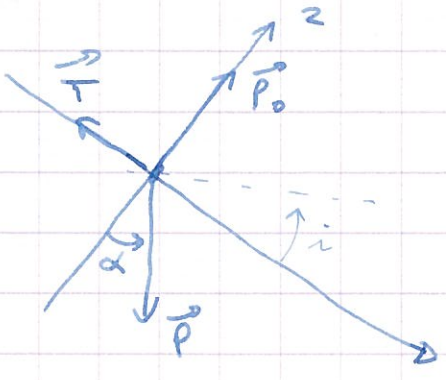
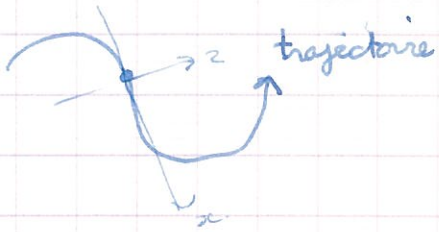
Aéroplane



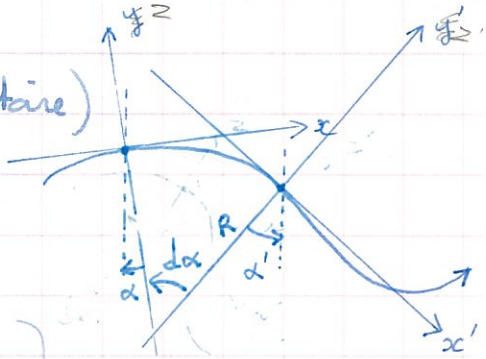
(repère de Frenet)
c'est un repère mobile



x : direct° de la vitesse

$$P_0 = V^2 m \; C_z(i)$$
$$T = V^2 m \; C_x(i)$$

1° RFD :



selon x : (axe tangent à la trajectoire)

$$m\dot{V} = mg\sin\alpha - T$$

selon z : (axe normal)

$$m\frac{V^2}{(-R)} = -m\frac{V^2\dot{\alpha}}{V} = -mV\dot{\alpha}$$
$$= P_0 - mg\cos\alpha$$

$$+R = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{V}{\dot{\alpha}}$$
$d\alpha = \alpha' - \alpha$
$ds = V\,dt$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{V} = g\sin\alpha - \frac{T}{m} = g\sin\alpha - V^2 C_x(i) \\ \dot{\alpha} = \frac{g\cos\alpha}{V} - \frac{P_0}{mV} = g\frac{\cos\alpha}{V} - V\,C_z(i) \end{cases}$$

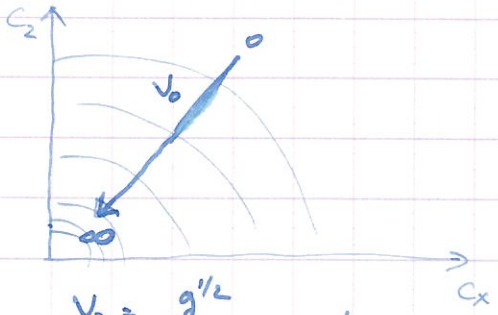
(1) $$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \dot{V} = g\sin\alpha - V^2 C_x(i) \\ \dot{\alpha} = g\frac{\cos\alpha}{V} - V\,C_z(i) \end{cases}}$$

$$\left[\frac{m}{s^2}\right] = \frac{m^2}{s^2}\cdot\underbrace{\frac{1}{m}}_{C_x}$$

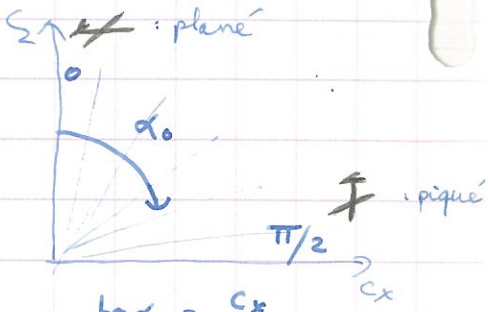
2° points fixes : $\dot{V} = 0$; $\dot{\alpha} = 0$ soit situate stationnaire
$\vec{V} = \vec{cste}$

(2) $$\rightarrow \begin{cases} g\sin\alpha_0 = V_0^2 C_x \\ g\cos\alpha_0 = V_0^2 C_z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} tg\,\alpha_0 = \frac{C_x(i)}{C_z(i)} = \frac{1}{finesse\,(i)} \\ V_0^4 = g^2\cdot(C_x^2 + C_z^2)^{-1} \end{cases}$$

graphiquement : $\alpha_0(C_x C_z)$ et $V_0(C_x C_z)$:



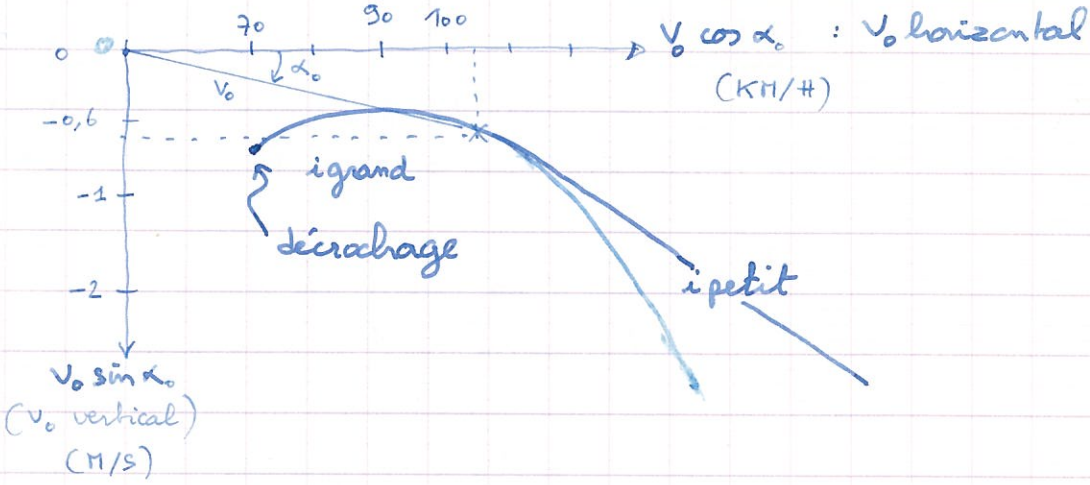
$$V_0 = \frac{g^{1/2}}{(C_x^2 + C_z^2)^{1/4}}$$



$$\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{C_x}{C_z}$$

Donnée des constructeurs : polaire des vitesses

cad V_0 vertical (V_0 horizontal) ex : planeur.



exercice : . trouver une paramétrisation $(V_0 \cos\alpha_0)(i)$ et $(V_0 \sin\alpha_0)(i)$ de cette courbe (on peut l'assimiler à une partie d'hyperbole) et faire varier i dans l'intervalle $[0;1]$

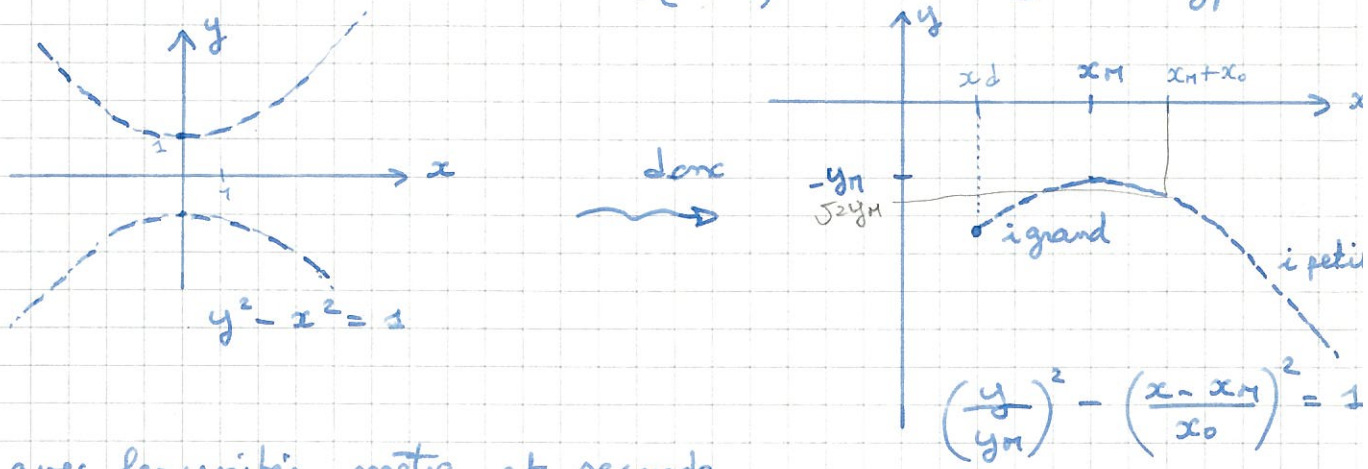
. en déduire à l'aide de (2), une paramétrisation $C_x(i)$ et $C_z(i)$

3°/ Etude de la stabilité du point fixe :

en considérant une petite déviation $V = V_0 + \delta V$, $\alpha = \alpha_0 + \delta\alpha$, étudier au premier ordre les équations régissant l'évolution de $(\delta V)(t)$ et $(\delta\alpha)(t)$

<u>solution possible</u> on note $x = V_0 h_{oz} = V_0 \cos\alpha_0$ et $y = V_{0z} = V_0 \sin\alpha_0$

on assimile la courbe $V_0 h_0 (V_{0z})$ à un tronçon de hyperbole :



avec les unités mètre et seconde,

$31,94 = 115 \text{ km/h}$ $x = x_M + x_0 \rightarrow$ $y = \sqrt{2}\, y_M$

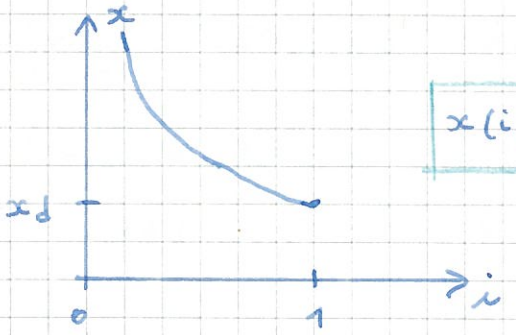
on peut choisir :

$x_M = 85 \text{ km/h} = 23,5 \text{ m/s}$ $x_d = 70 \text{ km/h} \simeq \cancel{26}\ 19,4 \text{ m/s}$

$$\begin{cases} x_0 = \cancel{26} \text{ km/h} \simeq \cancel{6} \text{ m/s} \quad \cancel{x_M = 25} \quad 8,34 \text{ m/s} \\ y_M = 0,6 \text{ m/s} \end{cases}$$

$\sqrt{2}\, y_M = 0,84853$

ensuite en fonction de i on peut choisir : $0 < i < 1$



$$\boxed{x(i) = \frac{x_d}{i}}$$

et $$\boxed{y(i) = y_M \cdot \left[1 + \left(\frac{x(i) - x_M}{x_0}\right)^2\right]^{1/2}}$$

- finalement à l'aide de (2) :

$$\boxed{\begin{cases} C_y(i) = \dfrac{g \sin\alpha_0}{V_0^2} = g \dfrac{(V_0 \sin\alpha_0)}{V_0^3} = g \dfrac{y(i)}{V_0^3(i)} \\ C_x(i) = \dfrac{g \cos\alpha_0}{V_0^2} = g \dfrac{x(i)}{V_0^3(i)} \\ \text{avec } V_0(i) = \left(x^2(i) + y^2(i)\right)^{1/2} \end{cases}}$$

Courbe $C_x(i)$, $C_z(i)$:

Etude de la stabilité du point fixe

$\alpha(t) = \alpha_0 + \delta\alpha(t)$; $v(t) = v_0 + \delta v(t)$ avec α_0 v_0 donnés par (2)

alors (1) $\rightarrow$
$$\begin{cases} \delta\dot{\alpha} = g\,\dfrac{\{\cos\alpha_0 \cos\delta\alpha - \sin\alpha_0 \sin\delta\alpha\}}{(v_0 + \delta v)} - (v_0 + \delta v)\, C_z \\ \delta\dot{v} = g\,\{\sin\alpha_0 \cos\delta\alpha + \cos\alpha_0 \sin\delta\alpha\} - (v_0 + \delta v)^2\, C_x \end{cases}$$

linéarisé

$$\rightarrow \begin{cases} \delta\dot{\alpha} \simeq -\left(\dfrac{g}{v_0}\sin\alpha_0\right)\delta\alpha - \left(\dfrac{g\cos\alpha_0}{v_0^2} + C_z\right)\delta v \\ \delta\dot{v} \simeq (g\cos\alpha_0)\,\delta\alpha - (2 v_0 C_x)\,\delta v \end{cases}$$

soit $\dfrac{d\vec{X}}{dt} = (M)\,\vec{X}$ donc $\vec{X}(t) = e^{Mt} \cdot X_0$

sol. stable ssi les val. p. λ ont une partie réelle ≤ 0

or $0 = \mathrm{Det}(M - \lambda\, Id) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (\mathrm{Tr}\,M)\lambda + (\mathrm{Det}\,M)$

$\Delta = (\mathrm{Tr}\,M)^2 - 4(\mathrm{Det}\,M)$ $\qquad \lambda_\pm = \dfrac{\mathrm{Tr}\,M \pm \sqrt{\Delta}}{2}$

or $M = \begin{pmatrix} -\left(\dfrac{g}{v_0}\sin\alpha_0\right) & -\left(\dfrac{g\cos\alpha_0}{v_0^2} + C_z\right) \\ (g\cos\alpha_0) & -(2 v_0 C_x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_0 C_x & -2C_z \\ v_0^2 C_z & -2 v_0 C_x \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ $\mathrm{Tr}\, M = -3 V_0 C_x$

$\mathrm{Det}\, M = 2 V_0^2 (C_x^2 + C_z^2)$

$\Delta = V_0^2 [C_x^2 - 8 C_z^2)$

$$\lambda \pm = \frac{-3 V_0 C_x \pm V_0 \sqrt{C_x^2 - 8 C_z^2}}{2} = \frac{C_x V_0}{2} \left[-3 \pm \sqrt{1 - 8 f^2} \right]$$

avec $f = \frac{C_z}{C_x}$: finesse

Donc partie réelle toujours < 0 $\rightarrow$ pt fixes stables

il y a oscillations si $\Delta < 0$ ie : $f^2 > \frac{1}{8}$

(point spiral stable)

et alors pulsation ω = partie imaginaire

$$= \frac{C_x V_0}{2} \sqrt{8 f^2 - 1}$$

$\frac{m}{s}$