

# Le problème à trois corps restreint

Frédéric Faure

20 décembre 2018

## Contents

<b>1</b>	<b>Références :</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Modèle</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Equations de mouvement</b>	<b>2</b>
<b>4</b>	<b>Points fixes « de Lagrange »</b>	<b>3</b>
4.1	Tests . . . . .	3
<b>5</b>	<b>Zone accessible en <math>(x, y)</math></b>	<b>5</b>
<b>6</b>	<b>Section de Poincaré <math>p_x + y = 0</math></b>	<b>5</b>
6.1	Zone accessible en $(x, y)$ à $p_x + y = 0$ . . . . .	5
6.2	Section $p_x + y = 0$ . . . . .	5
<b>7</b>	<b>Section de Poincaré <math>y = 0</math></b>	<b>6</b>
7.1	Zone accessible en $(x, p_x)$ à $y = 0$ . . . . .	6
7.2	Section de Poincaré . . . . .	7

### Remarques:

- pour bien lire les équations de ce document html, utiliser le navigateur Firefox.
- Pour la programmation, voici un Didacticielsur le langage python. Voici des Exemples de programmes en python pour l'étude des systèmes dynamiques.

Voici ce document au format pdf.

## 1 Références :

- Pour le modèle considéré ici, les notations et obtention des formules, voir TD7 et sa solution.

- Voici le code python du projet présenté ici.
- Autres références plus poussées :
  - Problème à N corps.
  - Problème à 3 corps
  - Points de Lagrange.
  - Livre de Morbidelli, de mécanique céleste et phénomènes de résonances.
  - Travaux de Poincaré, Laskar, etc.

## 2 Modèle

Pour le modèle considéré ici, les notations et obtention des formules, voir TD7 et sa solution.

Les coordonnées  $(x, y)$  sont dans le **référentiel tournant** qui tourne à la vitesse angulaire  $\Omega = 1$ . Par conséquent les **coordonnées dans le référentiel Galiléen** non tournant sont données par

$$\begin{aligned}x' &= x \cos t - y \sin t \\y' &= x \sin t + y \cos t\end{aligned}$$

## 3 Equations de mouvement

On a le paramètre suivant

$$\nu \in [0, 1],$$

correspondant au rapport des masses des étoiles :  $\nu = \frac{m_2}{m_1+m_2}$ . L'étoile 1 est en  $(x, y) = (-\nu, 0)$ . L'étoile 2 est en  $(x, y) = (1 - \nu, 0)$ .

On pose

$$\begin{aligned}R_1^2 &= (x + \nu)^2 + y^2 \\R_2^2 &= (x + \nu - 1)^2 + y^2.\end{aligned}$$

L'énergie  $E = H(x, p_x, y, p_y)$  est conservée

$$H(x, p_x, y, p_y) = \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2) + (yp_x - xp_y) - \frac{1 - \nu}{R_1} - \frac{\nu}{R_2} \quad (3.1)$$

$$= \frac{1}{2} ((p_x + y)^2 + (p_y - x)^2) - \frac{1}{2} (x^2 + y^2) - \frac{1 - \nu}{R_1} - \frac{\nu}{R_2} \quad (3.2)$$

$$= E_c + U(x, y) \quad (3.3)$$

avec l'énergie cinétique

$$E_c = \frac{1}{2} ((p_x + y)^2 + (p_y - x)^2)$$

avec « l'énergie potentielle »

$$U(x, y) = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1-\nu}{R_1} - \frac{\nu}{R_2}.$$

On a les variables  $x, y, p_x, p_y$  qui dépendent du temps, et

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} = p_x + y \\ \frac{dp_x}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = p_y - \frac{(1-\nu)(x+\nu)}{R_1^3} - \frac{\nu(x+\nu-1)}{R_2^3} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_y} = p_y - x \\ \frac{dp_y}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial y} = -p_x - \frac{(1-\nu)y}{R_1^3} - \frac{\nu y}{R_2^3}\end{aligned}$$

## 4 Points fixes « de Lagrange »

Il y a 5 points. Les points 4,5 sont :

$$(x_4, y_4) = \left(\frac{1}{2} - \nu, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad (x_5, y_5) = \left(\frac{1}{2} - \nu, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

Les points 1,2,3 sont sur l'axe  $y = 0$  avec

$$x_3 < -\nu < 0 < x_1 < 1 - \nu < x_2$$

solutions de l'équation

$$x = -\frac{(1-\nu)}{(x+\nu)^2} - \frac{\nu}{(x+\nu-1)^2}$$

On peut les trouver numériquement par dichotomie. Voici leur valeur approchée si  $\nu \ll 1$  :

$$x_1 = 1 - \left(\frac{\nu}{3}\right)^{1/3} + o(\nu^{1/3})$$

$$x_2 = 1 + \left(\frac{\nu}{3}\right)^{1/3} + o(\nu^{1/3})$$

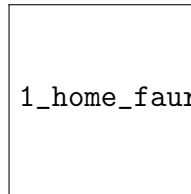
$$x_3 = -1 - \frac{5\nu}{12} + o(\nu)$$

### 4.1 Tests

Il est important de tester le programme dans des situations connues afin de le valider.

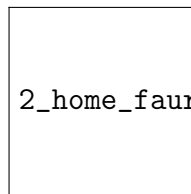
(1) Dessiner les 2 étoiles (en jaune) et les 5 points fixes de Lagrange (en rouge) et la planète en bleu dans le référentiel tournant et dans le référentiel Galiléen non tournant. Vérifier des cas particuliers :

(a) **Cas d'une seule étoile** : Si  $\nu = 0$  cad  $m_2 = 0$  alors la planète est en orbite elliptique autour de l'étoile 1. De même si  $\nu = 1$  cad  $m_1 = 0$  alors la planète est en orbite elliptique autour de l'étoile 2 :

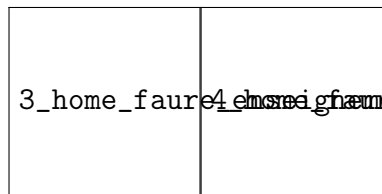


(b) **Cas d'une seule étoile** :  $\nu = 0$ . On prend une condition initiale qui garantie une orbite circulaire :

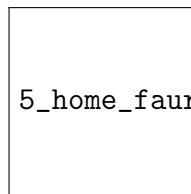
(c) Cas du **Soleil-Jupiter**,  $\nu = 10^{-3}$ . On observe que la planète est en orbite quasi-périodique autour du soleil (étoile 1) :



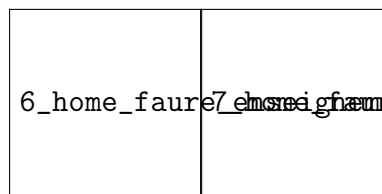
(d) **Points fixes** : pour  $0 < \nu < 1$ , si on place la planète sur un point fixe de Lagrange avec les valeurs de  $p_x, p_y$  adéquate, on vérifie qu'elle reste dessus.



Ici on perturbe la condition initiale de  $10^{-3}$  et on observe que le point fixe  $L_1$  est instable :



(e) Un **cas quelconque**, ici  $\nu = 0.2$  et condition initiale  $x = 0.5, p_x = y = p_y = 0$ .



## 5 Zone accessible en $(x, y)$

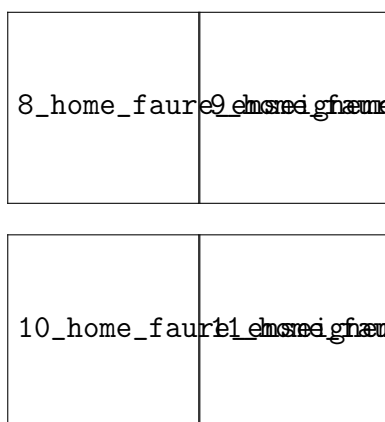
Soit  $E \in \mathbb{R}$  une valeur d'énergie donnée. D'après (3.1), la position  $(x, y)$  vérifie :

$$E = E_c + U(x, y)$$

La zone accessible à énergie  $E$  est l'ensemble des points où  $E_c = E - U(x, y) \geq 0$

$$\mathcal{Z}_E := \{(x, y) \text{ t.q. } E_c = E - U(x, y) \geq 0\}.$$

Numériquement on peut tracer cette **zone accessible, ici en orange**, pour différentes valeurs de  $\nu$  et en fonction de  $E$  :



Il apparaît clairement que les bifurcations se passent aux points de Lagrange, à différentes valeurs de  $E$ .

## 6 Section de Poincaré $p_x + y = 0$

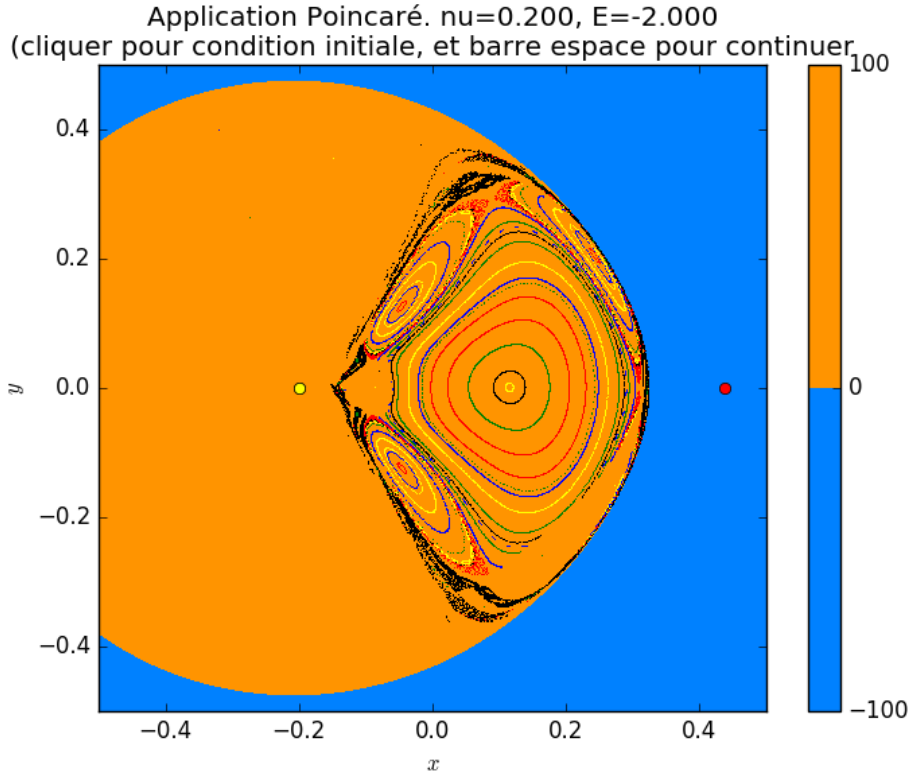
### 6.1 Zone accessible en $(x, y)$ à $p_x + y = 0$

### 6.2 Section $p_x + y = 0$

On se fixe l'énergie  $E \in \mathbb{R}$ . Pour la section de Poincaré, on choisit par exemple la condition  $p_x + y = 0$  qui correspond à  $\frac{dx}{dt} = 0$ . On se ramène aux variables  $(x, y)$ , sachant que  $p_x = -y$  et  $p_y$  se déduit de (3.1), connaissant l'énergie  $E$ , de la façon suivante. On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} ((p_x + y)^2 + (p_y - x)^2) + U(x, y) &= E \\ \Leftrightarrow p_y &= x \pm \sqrt{2(E - U(x, y)) - (p_x + y)^2} \\ &= x \pm \sqrt{2(E - U(x, y))} \end{aligned}$$

Cela a une solution seulement si  $E_c = E - U(x, y) \geq 0$ , c'est à dire dans la zone accessible en orange.



## 7 Section de Poincaré $y = 0$

### 7.1 Zone accessible en $(x, p_x)$ à $y = 0$

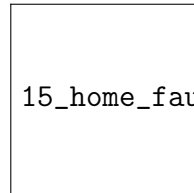
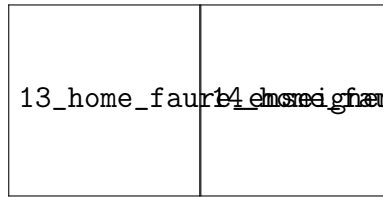
Soit  $E \in \mathbb{R}$  une valeur d'énergie donnée. D'après (3.1), la position  $(x, y)$  vérifie :

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2} ((p_x + y)^2 + (p_y - x)^2) + U(x, y) \\
 &= \frac{1}{2} (p_x^2 + (p_y - x)^2) + U(x, 0) \\
 \Leftrightarrow (p_y - x)^2 &= 2(E - U(x, 0)) - p_x^2 \geq 0
 \end{aligned}$$

La zone accessible à énergie  $E$  est donc

$$\mathcal{Z}_E := \{(x, p_x) \text{ t.q. } 2(E - U(x, 0)) - p_x^2 \geq 0\}.$$

Numériquement on peut tracer cette **zone accessible**, ici en orange, pour différentes valeurs de  $\nu$  et en fonction de  $E$  :



## 7.2 Section de Poincaré

Pour  $E \in \mathbb{R}$  fixée, on choisit la condition  $y = 0$  et on utilise les coordonnées  $(x, p_x)$ . On obtient  $p_y$  par

$$\begin{aligned} p_y &= x \pm \sqrt{2(E - U(x, y)) - (p_x + y)^2} \\ &= x \pm \sqrt{2(E - U(x, 0)) - p_x^2} \end{aligned}$$

Cela a une solution seulement dans la zone accessible en orange.