Projet <u>Chaos Quantique</u> (8 fev. 07)

I Espace des états quantiques :

rappel : • en mécanique classique, q et p sont périodiques de période 1.

• En mécanique quantique, un état est une fonction : $\psi(q)$ à valeur complexe.

sa <u>transformée de Fourier</u> : avec $\hbar > 0$.

$$\tilde{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{\mathbb{R}} \psi(q)\, e^{-\frac{iqp}{\hbar}}\, dq$$

Donc on stipule que l'espace des états quantiques est :

$$\mathcal{H} \overset{\text{def}}{=} \left\{ \psi \quad \text{t.q} \quad \begin{array}{l} \psi(q+1) = \psi(q)\, e^{i\theta_1} \\ \text{et } \tilde{\psi}(p+1) = \tilde{\psi}(p)\, e^{i\theta_2} \end{array} \right\}$$

dans la suite $\theta_1 = \theta_2 = 0$.

<u>Caractérisation de $\mathcal{H}$</u> :

<u>Propriété</u> : il faut que $\boxed{\frac{1}{2\pi\hbar} = N \in \mathbb{N}}$ (entier)

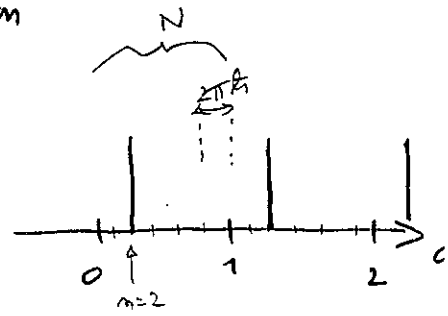
sinon $\mathcal{H} = \phi$,

et si $\frac{1}{2\pi\hbar} = N$, alors $\dim(\mathcal{H}) = N$,

et ~~de~~ avec les vecteurs de "<u>base de position</u>"

$$\boxed{|n\rangle, \quad n = 0 \longrightarrow N-1}$$

$$|n\rangle \equiv \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta\big(q - \underbrace{(2\pi\hbar)n}_{q_n} + k\big)$$



cad $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ quelconque, s'écrit :

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} \psi_n \cdot |n\rangle$$

$\psi_n \in \mathbb{C}$: composante de $|\psi\rangle$

donc $(\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n, \dots, \psi_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$

caractérisent l'état ψ.

on a :

$$\boxed{\cos(2\pi \hat{q})\, |n\rangle = \cos(2\pi q_n) \cdot |n\rangle}$$

opérateur position

$$q_n = n \cdot 2\pi\hbar = \frac{n}{N}$$

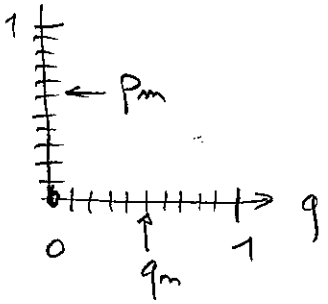
Il y a aussi les vecteurs de "base d'impulsion" dans $\mathcal{H}$

$$\boxed{|m\rangle, \quad m = 0 \longrightarrow N-1}$$

donnés par :

$$|m\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{i\frac{q_n p_m}{\hbar}} |n\rangle$$

"idem ondes planes"



avec $q_n = \frac{n}{N}$, $p_m = \frac{m}{N}$

$$\frac{q_n p_m}{\hbar} = 2\pi \frac{nm}{N}$$

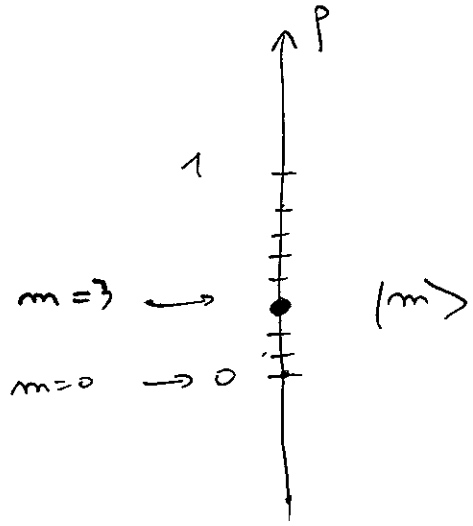
donc

$$\boxed{|m\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{i 2\pi \frac{nm}{N}} |n\rangle}$$

on a :

$$\cos\left(2\pi\,\hat{p}\right)|m\rangle = \cos\left(2\pi\, p_m\right).|m\rangle$$

$$p_m = \frac{m}{N}$$



inversement :

$$\boxed{|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N-1} e^{-i2\pi \frac{nm}{N}} |m\rangle}$$

<u>Changement de base :</u>

si $|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} \psi_n |n\rangle = \sum_{m=0}^{N-1} \psi_m |m\rangle$

cad $\langle n|\psi\rangle = \psi_n$

$\langle m|\psi\rangle = \psi_m$

on a : $\psi_m = \langle m|\psi\rangle = \langle m|\left(\sum_{n=0}^{N-1} |n\rangle\langle n|\right)|\psi\rangle$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \langle m|n\rangle \langle n|\psi\rangle$$

or $\langle m|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-i2\pi \frac{nm}{N}}$

donc

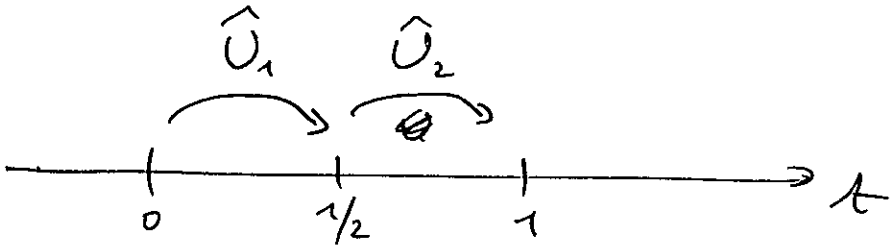
$$\boxed{\psi_m = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i2\pi \frac{nm}{N}} \psi_n}$$

" La T.F. : discrète

inversement :

$$\boxed{\psi_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N-1} e^{+i\frac{2\pi n m}{N}} \psi_m}$$

II L'opérateur d'évolution



$$\hat{U} = \hat{U}_2 . \hat{U}_1$$

avec $\hat{U}_1 = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_1 . \frac{1}{2}\right)$

$$\hat{H}_1 = -A \cos(2\pi \hat{p})$$

donc $\hat{U}_1 = \exp\left(+i \frac{2\pi N}{2} A \cos(2\pi \hat{p})\right)$

de même

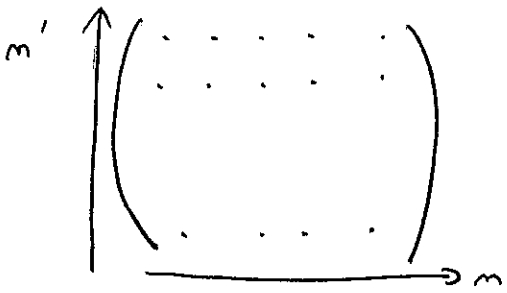
$$\hat{U}_2 = \exp\left(i \frac{2\pi N}{2} A \cos(2\pi \hat{q})\right)$$

$\hat{U}$ s'exprime par une matrice dans la base $|n\rangle$:

$U_{n',n} = \langle n' | \hat{U} | n \rangle$, $n = 0 \longrightarrow N-1$

$n' = 0 \longrightarrow N-1$

matrice à coefs complexes.



Calcul de $U_{n',n}$:

$$U_{n',n} = \langle n' | \hat{U}_2 \cdot \hat{U}_1 | n \rangle$$

$$= \langle n' | \hat{U}_2 \left(\sum_m |m\rangle\langle m| \right) \hat{U}_1 | n \rangle$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} \langle n' | \hat{U}_2 | m \rangle \langle m | \hat{U}_1 | n \rangle$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} \exp\left(i \frac{2\pi N}{2} A \cos(2\pi q_{n'}) \right) \langle n' | m \rangle$$

$$\exp\left(i \frac{2\pi N}{2} A \cos(2\pi p_m) \right) \langle m | n \rangle$$

$$\boxed{U_{n',n} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \exp\left[i \frac{2\pi N}{2} A \cos\left(2\pi \frac{n'}{N}\right) + i 2\pi \frac{n'm}{N} + i \frac{2\pi N}{2} A \cos\left(2\pi \frac{m}{N}\right) - i 2\pi \frac{mn}{N} \right]}$$

Evolution d'un état :

si à $t=0$ $\quad |\psi\rangle = \sum_n \psi_n |n\rangle$

alors à $t=1$, $\quad |\psi'\rangle = \hat{U}|\psi\rangle$

$$= \sum_n \psi_n \hat{U}|n\rangle$$

$$= \sum_{n'} \psi'_{n'} |n'\rangle$$

donc

$$\psi'_{n'} = \langle n'|\psi'\rangle = \sum_n \psi_n \underbrace{\langle n'|\hat{U}|n\rangle}_{U_{n'n}}$$

donc

$$\boxed{\psi'_{n'} = \sum_n U_{n'n}\, \psi_n}$$

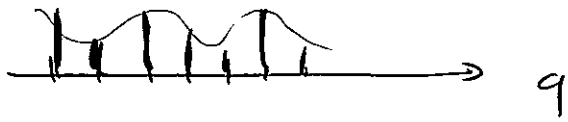
Programmation :

- on fixe N
- on construit la matrice $(U_{n',n})$.
- on choisit un état initial : $\psi \equiv (\psi_0, \dots, \psi_n, \dots, \psi_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$
- on fait évoluer ψ sur temps 1.

$$\psi'_{n'} = \sum_n U_{n'n}\, \psi_n$$

- on peut représenter : $|\psi_n|^2$ en fonction n :

boucle sur $t = 1, 2, \dots$



représentation dans espace de phase

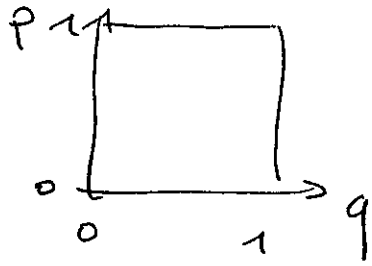
<u>données</u> : état $(\psi_n)_{n=0 \to N-1}$ (ses composantes) normalisées

$$1 = |\psi|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |\psi_n|^2$$

<u>sortie</u> : $W_\psi(q,p) \geq 0$,

"distribution de Husimi"

ou distribution sur l'espace de phase.



<u>paquet d'onde Gaussien</u> (ou état cohérent) en (q_0, p_0) :

$$\psi_{q_0 p_0}(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{1/4}} e^{-\frac{(x-q_0)^2}{2\hbar}} e^{i\frac{p_0 x}{\hbar}}$$

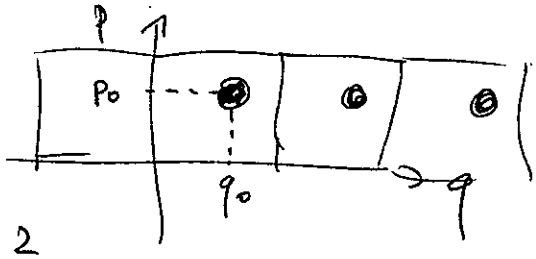
$x \in \mathbb{R}$

$(q_0, p_0) \in \mathbb{R}^2$.

on périodise :

$$(*) \quad \psi_{q_0 p_0}(n) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{1/4}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(q_n - q_0 + k)^2}{2\hbar}} e^{i\frac{p_0 q_n}{\hbar}}$$

<u>rem</u> : $\bar{k} = [q_0 - q_n]$; $k = (\bar{k}-1) \to (\bar{k}+1)$



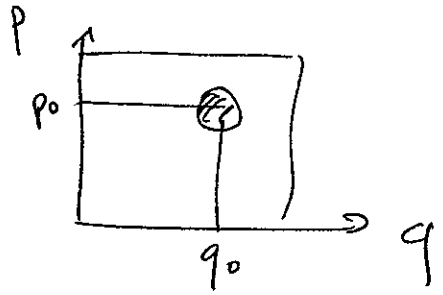
on définit :

$$W_\psi(q_0, p_0) = |\langle \psi_{q_0 p_0} | \psi \rangle|^2$$

$$= \left| \sum_{n=0}^{N-1} \overline{\psi_{q_0 p_0}(n)} \cdot \psi_n \right|^2$$

Par exemple : $\psi_n = \psi_{q_0 p_0}(n)$

(1er test)



Evolution :

① on choisit $(\psi_n)_n$ = 1 etat cohérent (*) en (q_0, p_0)

② on fait évoluer (page 6). $(\longrightarrow (\psi_n)_n)$

③ on représente $W_\psi(q,p)$