Mouvement de la Terre sur l'orbite de Kepler

(voir les résultats théoriques p. 134-135-136)

Les constantes caractéristiques de l'orbite terrestre sont :

l'excentricité $e = 0,0167$

longitude du périhélie $\varpi = 4,9354$ rad

$\frac{1}{2}$ grand axe $a = 1$

période $T = 365,25$ j.

on note $\begin{cases} \theta : \text{anomalie vraie} \\ \varphi : \text{anomalie excentrique} \\ M : \text{anomalie moyenne} \end{cases}$ (cf p135)

. Dans le programme, nous allons remplacer la procédure 2; par la suivante : étant donné t, calcul de (X_T, Y_T).

Pour cela il faut résoudre l'équation de Kepler d'inconnue φ : $\varphi - e \sin\varphi = M$

dans ce but, la suite suivante $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers φ :

$\varphi_0 = M$, $\varphi_{n+1} = M + e \sin\varphi_n$ (à démontrer)

<u>Finalement</u> :

$M = \left(\frac{2\pi}{T}\right) t + M_0$ $M_0 = -0,045845$ rad.

résolution de l'équation de Kepler : $\varphi_0 = M$ $\varphi_{n+1} = M + e \sin\varphi_n$

$r_t = a(1 - e\cos\varphi)$

$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\ \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} \longrightarrow \theta$

$l_{/s} = \theta + \varpi$

$X_T = r_t \cos l_{/s}$

$Y_T = r_t \sin l_{/s}$

tant $\overrightarrow{OQ_0}$ de composantes (A', B') dans l'ancien système; P_0 est la position initiale du mobile, quant à $\overrightarrow{OQ_0}$, il est lié à la vitesse initiale $\vec{V}_0$ puisque

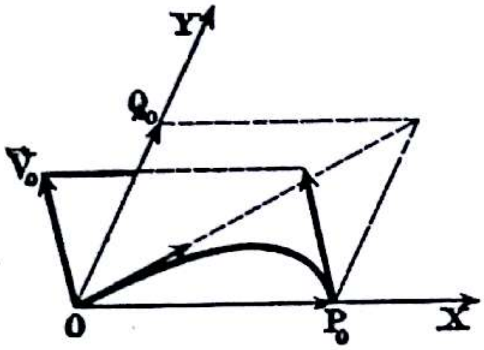

FIG. 41.

$$\vec{V}_0 = \mu\overrightarrow{OQ_0} - \lambda\overrightarrow{OP_0},$$

d'où $$\overrightarrow{OQ_0} = \frac{\vec{V}_0 + \lambda\overrightarrow{OP_0}}{\mu}.$$

Dans le nouveau système on a

$$\overrightarrow{OP} = e^{-\lambda t}[\operatorname{ch}\mu t\, \overrightarrow{OP_0} + \operatorname{sh}\mu t\, \overrightarrow{OQ_0}],$$

d'où

$$X = e^{-\lambda t}\operatorname{ch}\mu t, \quad Y = e^{-\lambda t}\operatorname{sh}\mu t.$$

La courbe est facile à construire: X décroît de 1 à 0 et Y croît de 0 à un maximum puis tend vers zéro (fig. 41). Le point tend vers l'origine pour t infini.

O, centre répulsif.

On est conduit à étudier l'équation différentielle

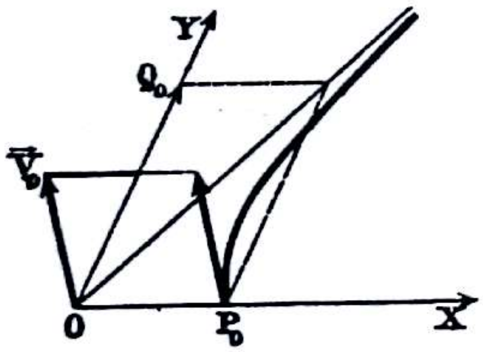

FIG. 42.

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} - \omega_0^2 x = 0,$$

dont l'équation caractéristique admet deux racines de signes contraires. Le lecteur conduira les calculs comme pour le cas précédent (changement d'axes). Le point s'éloigne à l'infini; on obtient une trajectoire avec asymptote passant par l'origine (courbe fig. 42).

MOUVEMENT SOUS L'ACTION D'UNE FORCE CENTRALE FONCTION DE LA DISTANCE

6-8. Équations du mouvement.

Soit à étudier le mouvement d'un point matériel P sous l'action d'une force centrale, issue de O et fonction de la distance OP = r. On appelle F(r) la valeur algébrique de la force sur le rayon vecteur OP.

On a vu que la trajectoire est plane; soit Oxy un repère orthonormé de son plan. Les équations cartésiennes du mouvement s'écrivent

$$m\ddot{x} = \frac{xF(r)}{r}, \qquad m\ddot{y} = \frac{yF(r)}{r}, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Elles sont difficilement intégrables, le cas où $F(r) = kr$ faisant cependant exception. Nous utilisons ici les intégrales premières du mouvement; il y en a deux.

Loi des aires.

L'accélération étant centrale, le mouvement obéit à la loi des aires par rapport à O. En coordonnées polaires (r, θ), ceci s'écrit

$$(1) \qquad r^2\dot{\theta} = C.$$

Conservation de l'énergie.

La force centrale $F(r)$ dépend de l'énergie potentielle

$$V(r) = -\int_{r_0}^{r} F(u)du \quad (r_0 \text{ arbitrairement fixé}),$$

d'où la loi de la conservation de l'énergie :

$$\frac{1}{2} mv^2 + V(r) = E$$

où E, énergie mécanique, est déterminée par les conditions initiales. En coordonnées polaires, on a

$$(2) \qquad m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + 2V(r) = 2E.$$

Les équations (1) et (2) constituent un système différentiel du premier ordre déterminant les fonctions inconnues $r(t)$ et $\theta(t)$. Il est possible d'éliminer $\dot{\theta}$, tiré de (1), et de former une équation du premier ordre en r, de la forme $\dot{r}^2 = \psi(r)$. La discussion fournit le mouvement de P sur le rayon vecteur, indépendamment de la rotation de celui-ci. Nous préférons faire une étude directe des trajectoires, la loi des aires permettant d'en préciser la description.

L'élimination du temps se fait en utilisant la loi des aires :

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2}\frac{d}{d\theta};$$

on a donc

$$\dot{r} = \frac{C}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -C\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}, \qquad r^2\dot{\theta}^2 = \frac{C^2}{r^2}.$$

En posant $\frac{1}{r} = u$, l'équation (2) devient

$$(3) \quad \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{2}{mC^2}[E - V_1(u)], \qquad \text{avec} \qquad V_1(u) = V\left(\frac{1}{u}\right).$$

C'est l'équation cherchée, de la forme classique $\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \psi(u)$, avec substitution de θ à t; la discussion est envisagée page 138.

L'équation (3) étant du premier ordre, ses solutions dépendent d'une constante arbitraire; elles sont de la forme

$$\theta - \theta_0 = f(u)$$

et se déduisent de l'une d'entre elles par des rotations arbitraires autour de O. Les constantes C et E déterminent donc la forme et la grandeur de la trajectoire; on les appelle **constantes dynamiques** du mouvement. Il reste ensuite à préciser le plan de la trajectoire et l'angle θ_0.

Formule de Binet.

En dérivant l'équation (3) par rapport à θ on obtient une équation du second ordre où ne figure plus E. Puisque

$$\frac{d}{d\theta} = \frac{d}{du} \cdot \frac{du}{d\theta} \qquad \text{et} \qquad \frac{dV_1}{du} = -\frac{1}{u^2}\frac{dV}{dr} = \frac{F}{u^2},$$

il vient, après division par $\frac{du}{d\theta}$, supposé non nul,

$$(4) \qquad \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{1}{mC^2}\frac{F}{u^2}.$$

Puisque $F = m\Gamma$, l'équation (4) traduit la formule de Binet (cf. p. 21) et peut être écrite directement. N'utilisant que l'hypothèse d'une force centrale, elle est plus générale que l'équation (3), applicable seulement au cas d'une force fonction de la distance. Quelques cas particuliers se traitent aisément par cette méthode mais c'est là une circonstance exceptionnelle; (4) est une équation du second ordre tandis que (3), du premier ordre, se ramène immédiatement à une quadrature.

6-9. Attraction newtonienne.

Nous avons vu que dans leur mouvement autour du Soleil les planètes sont soumises à une accélération centrale de la forme $-\frac{\mu}{r^2}$; si la masse de la planète est m la force est $F(r) = -\frac{m\mu}{r^2}$. Newton s'est proposé de déterminer toutes les trajectoires possibles d'un point matériel attiré par un centre fixe suivant la loi précédente.

Nous utilisons ici les résultats généraux établis ci-dessus. Le potentiel compté à partir de l'infini est

$$V(r) = \int_{\infty}^{r} \frac{\mu m \, dx}{x^2} = -\frac{\mu m}{r}.$$

On écrit la conservation de l'énergie

$$(1) \qquad \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{E}{m} = E_1$$

en appelant E_1 l'énergie mécanique par unité de masse. L'équation (3), ci-dessus, où la variable est θ et la fonction inconnue $u = \frac{1}{r}$, devient ici

$$u^2 + u'^2 = \frac{2}{C^2}(\mu u + E_1),$$

soit encore

$$\left(u - \frac{\mu}{C^2}\right)^2 + u'^2 = \frac{\mu^2}{C^4} + \frac{2E_1}{C^2}.$$

On reconnaît une équation classique [1] dont la solution est

$$\frac{1}{r} = u = \frac{\mu}{C^2} + \sqrt{\frac{\mu^2}{C^4} + \frac{2E_1}{C^2}} \cos(\theta - \theta_0).$$

En la mettant sous la forme

$$(2) \qquad \frac{1}{r} = \frac{\mu}{C^2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2E_1C^2}{\mu^2}} \cos(\theta - \theta_0)\right]$$

on voit qu'il s'agit d'une conique ayant l'origine pour foyer. L'équation d'une telle courbe est en effet

$$(3) \qquad \frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}{p};$$

p est le paramètre, e l'excentricité, θ_0 l'angle du grand axe avec l'axe origine Ox. On a ici

$$(4) \qquad p = \frac{C^2}{\mu}, \qquad e = \sqrt{1 + \frac{2E_1C^2}{\mu^2}}.$$

---

[1] Page 104, nous avons résolu l'équation $\ddot{x}^2 + \omega^2 x^2 = \omega^2 a^2$, dont la solution est $x = a\cos(\omega t - \varphi)$. L'identification avec l'équation actuelle est immédiate.

Le genre de la conique est déterminé en comparant e à l'unité, ce qui est immédiat. On obtient

$$E_1 < 0 : \text{ Ellipse,}$$
$$E_1 = 0 : \text{ Parabole,}$$
$$E_1 > 0 : \text{ Hyperbole.}$$

Puisque $E_1 = \frac{v_0^2}{2} - \frac{\mu}{r_0}$ ne dépend pas de la direction de la vitesse initiale, on voit que si l'on a obtenu une ellipse pour des conditions initiales données, on aura encore une ellipse en lançant le mobile du même point, avec la même vitesse, dans toute autre direction. La vitesse $\sqrt{\frac{2\mu}{r}}$ est appelée *vitesse critique* à la distance r. Suivant qu'un point à cette distance a une vitesse inférieure, égale ou supérieure à la vitesse critique, il décrit une ellipse, une parabole ou une hyperbole.

Dans les formules précédentes la constante μ doit être considérée comme donnée une fois pour toutes : elle caractérise l'intensité du centre attractif. Les autres grandeurs dépendent de l'orbite considérée. On sait que les constantes p et e définissent le genre et la grandeur de la conique. Les relations (4) montrent qu'elles ne dépendent que des constantes dynamiques C et E_1; inversement on a

$$\text{(4 } bis\text{)} \qquad C^2 = \mu p, \qquad 2E_1 = \frac{\mu^2(e^2 - 1)}{p^2}.$$

On retrouve, dans ce cas particulier, le fait que les constantes dynamiques définissent la grandeur de la trajectoire.

Trajectoire circulaire.

En particulier la trajectoire est un cercle lorsque $e = 0$; si r_0 est le rayon on a $p = r_0$ et $C^2 = \mu r_0$, d'où

$$E_1 = -\frac{\mu^2}{2C^2} = -\frac{\mu}{2r_0} = \frac{v_0^2}{2} - \frac{\mu}{r_0}.$$

On en déduit

$$v_0^2 = \frac{\mu}{r_0}.$$

Cette relation exprime que l'accélération centripète $\frac{v_0^2}{r_0}$ est égale à la force par unité de masse, $\frac{\mu}{r_0^2}$.

Enfin, comparant la valeur classique $C = r_0 v_0 \sin \alpha$ avec $C^2 = \mu r_0$, on obtient $\sin^2 \alpha = 1$, d'où $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$, condition évidemment nécessaire.

Cas d'un centre répulsif.

Le calcul précédent traite implicitement le cas d'une répulsion inversement proportionnelle au carré de la distance. Il suffit de supposer μ négatif dans toutes les formules [1]. L'énergie potentielle est toujours positive, ainsi que

$$E_1 = \frac{v_0^2}{2} + \frac{|\mu|}{r_0}.$$

La seconde formule (4) montre que l'on a $e > 1$. La trajectoire est donc une hyperbole (une seule branche) qui tourne sa convexité vers l'origine; en effet, la force répulsive doit être dirigée vers la concavité.

Emploi de la formule de Binet.

La formule (4) (p. 130) s'écrit ici

$$u + u'' = \frac{\mu}{C^2}.$$

Elle admet pour solution

$$\frac{1}{r} = u = \frac{\mu}{C^2} + A\cos(\theta - \theta_0).$$

On retrouve donc, et de façon très simple, une famille de coniques dont un foyer est à l'origine. Mais la discussion du genre n'est plus immédiate; il convient de relier la constante A et l'énergie E_1, ce qui peut se faire en reportant l'expression de u dans l'équation de l'énergie. Nous avons préféré une intégration directe de cette équation.

6-10. Orbite elliptique.

En Astronomie le cas le plus important correspond évidemment à l'orbite elliptique (planètes, comètes périodiques). Un corps suivant une orbite parabolique ou hyperbolique traverse le système solaire pour ne plus y revenir.

---

[1] La formule (3) doit être remplacée par

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu}{C^2}\left[1 - \sqrt{1 + \frac{2E_1C^2}{\mu^2}}\cos(\theta - \theta_0)\right].$$

C'est une conique de paramètre

$$p = \frac{|\mu|}{C^2}.$$

Dans l'étude d'une orbite elliptique on introduit souvent, au lieu de la constante p, le demi grand axe a. On sait que

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - c^2}{a} = a(1 - e^2) \quad \left(e = \frac{c}{a}\right).$$

On appelle a et e les *constantes géométriques* de l'orbite. Elles sont reliées aux constantes dynamiques par les formules

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = -\frac{\mu}{2E_1}, \qquad e = \sqrt{1 + \frac{2E_1C^2}{\mu^2}},$$

ou, inversement,

$$E_1 = -\frac{\mu}{2a}, \qquad C = \pm\sqrt{\mu a(1 - e^2)}.$$

La vitesse, donnée par la formule (1), page 131, prend la forme simple

$$v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Dans le cas du mouvement hyperbolique, $v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a}\right)$, en appelant a le demi-axe transverse, et dans le cas du mouvement parabolique, $v^2 = \frac{2\mu}{r}$.

Les équations précédentes déterminent la forme et la grandeur de l'orbite, mais non sa position dans l'espace. Une étude plus complète relève de la Mécanique céleste et sort du cadre de cet ouvrage. Nous nous bornons à traiter une question importante : l'orbite étant connue, préciser les coordonnées de la planète en fonction du temps. Pour cela on utilise la représentation paramétrique classique à l'aide de l'anomalie excentrique φ telle que

$$x = a\cos\varphi, \qquad y = b\sin\varphi.$$

L'équation de Kepler permet de connaître φ en fonction du temps. On exprime ensuite r et θ en fonction de φ.

Équation de Kepler.

Soit l'orbite de foyer O, de périhélie A, de centre Ω (fig. 43). On a tracé le cercle principal dont l'ellipse se déduit par contraction des ordonnées dans le rapport $\frac{b}{a}$. Si à P correspond Q, l'angle $A\Omega Q = \varphi$ est l'*anomalie excentrique* de P, tandis que $AOP = \theta$ est l'*anomalie vraie*.

Comptons le temps à partir du passage au périhélie; soit T la période. La loi des aires s'écrit

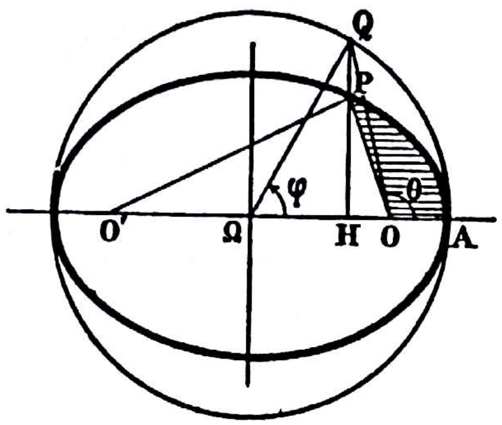

FIG. 43.

$$\text{Aire (AOP)} = \frac{1}{2}\,Ct = \frac{\pi ab}{T}\,t.$$

Mais

$$\begin{aligned}\text{Aire (AOP)} &= \frac{b}{a}\,\text{Aire (AOQ)}\\ &= \frac{b}{a}\,[\text{Aire (A}\Omega\text{Q)} - \text{Aire (O}\Omega\text{Q)}]\\ &= \frac{b}{2a}\,(a^2\varphi - ac\sin\varphi) \quad (c = ae)\\ &= \frac{ab}{2}\,(\varphi - e\sin\varphi);\end{aligned}$$

On en déduit l'équation cherchée

$$\varphi - e\sin\varphi = \frac{2\pi}{T}\,t.$$

La constante $n = \frac{2\pi}{T}$ est appelée le *moyen mouvement*; c'est la vitesse angulaire que devrait avoir un rayon fictif qui tournerait d'un mouvement uniforme autour de O en faisant une révolution complète dans le même temps que la planète. L'équation de Kepler s'écrit

$$\varphi - e\sin\varphi = nt.$$

C'est une équation transcendante permettant de calculer φ si t est donné. Elle peut être résolue numériquement avec une grande précision.

Calcul des coordonnées.

L'expression de r est classique :

$$r = PO = a - \frac{c}{a}\,\overline{\Omega H} = a - e\cos\varphi.$$

En effet, si O' est le second foyer, on a les deux relations

$$PO + PO' = 2a, \qquad PO'^2 - PO^2 = 2\,\overline{O'O}.\overline{\Omega H} = 4c\,\overline{\Omega H}.$$

On en déduit aisément PO et PO'.

Enfin θ s'obtient à partir de l'équation polaire

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\theta} = a(1 - e\cos\varphi),$$

d'où

$$\cos\theta = \frac{\cos\varphi - e}{1 - e\cos\varphi}.$$

On forme, $1 + \cos\theta$ et $1 - \cos\theta$; on en déduit

$$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{1-e}\cos\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{1-e\cos\varphi}}, \qquad \sin\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{1+e}\sin\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{1-e\cos\varphi}},$$

d'où

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}.$$

6-11. Orbite hyperbolique. Formule de Rutherford.

Lorsque la trajectoire est une orbite hyperbolique, une seule branche est décrite. Le centre actif O est le foyer intérieur à cette branche dans le cas d'une force attractive, le foyer extérieur dans le cas d'une force répulsive.

L'équation de la conservation de l'énergie

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = E_1$$

montre que si r devient infini la vitesse tend vers une valeur limite $v_l = \sqrt{2E_1}$; d'autre part, sa direction tend vers la direction asymptotique. Aux deux extrémités de la trajectoire, le mouvement tend donc à devenir uniforme. L'action du centre O entraîne une déviation de la direction du mouvement. En supposant connu le mouvement initial et la position du centre, on peut calculer la déviation, ce qui conduit à la *formule de Rutherford* utilisée en Physique nucléaire.

Le point O étant le centre actif, la particule soumise à la force $F(r) = -\mu\frac{m}{r^2}$ décrit initialement (r très grand) une parallèle à l'axe Ox avec une vitesse $\vec{v}_0$ dirigée dans le sens contraire de l'axe; soit $y = -d$ (avec $d > 0$) l'équation de cette droite, qui est l'une des asymptotes de l'hyperbole trajectoire:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}.$$

Remarquons que les constantes dynamiques du mouvement sont connues:

$$E_1 = \frac{v_0^2}{2}, \qquad C = -dv_0;$$

on en déduit

$$p = \frac{d^2v_0^2}{\mu}, \qquad e = \sqrt{1 + \frac{d^2v_0^4}{\mu^2}}.$$

On détermine θ_0 en écrivant que la droite $y = -d$ est asymptote. Pour $\theta = 0$, r doit être infini, d'où $e\cos\theta_0 = -1$, et d'autre part la limite de $r \sin\theta$ doit être $-d$, ce qui donne $e \sin\theta_0 = -\dfrac{p}{d}$. L'équation de la trajectoire devient

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p}(1 - \cos\theta) - \frac{1}{d}\sin\theta$$

ou

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu}{d^2 v_0^2}(1 - \cos\theta) - \frac{\sin\theta}{d}.$$

La seconde asymptote est obtenue pour l'angle $\theta = \alpha$, défini par

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{d v_0^2}{\mu}.$$

Si la force est attractive (fig. 44 *a*) ($\mu > 0$), nous posons $D = \pi - \alpha$, d'où

$$(1) \qquad \operatorname{tg}\frac{D}{2} = \frac{\mu}{d v_0^2};$$

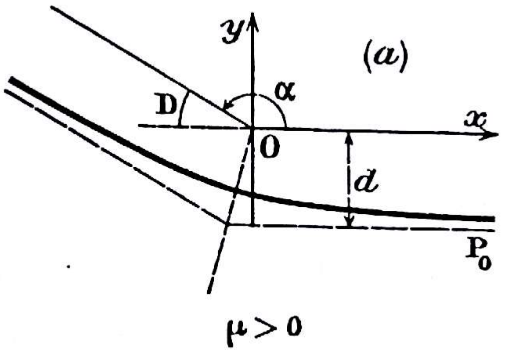

Fig. 44 *a*.

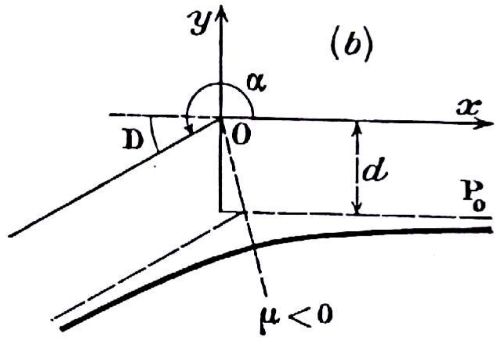

Fig. 44 *b*.

si la force est répulsive (fig. 44 *b*) ($\mu < 0$), nous posons $D = \alpha - \pi$, d'où

$$(1\ bis) \qquad \operatorname{tg}\frac{D}{2} = \frac{|\mu|}{d v_0^2}.$$

Dans les deux cas l'angle D mesure, en valeur absolue, la déviation de la particule; celle-ci est négative dans le premier cas, positive dans le second.

Si la force F est gravitationnelle, μ est positif et proportionnel à la masse m_0 du centre actif O.

Si les particules O et M possèdent des charges électriques q_0 et q et si la force gravitationnelle est négligeable, on a pour une particule de masse m

$$\mu = -\frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 m};$$

la force est attractive si q_0 et q sont de signes contraires, répulsive si elles sont de même signe.