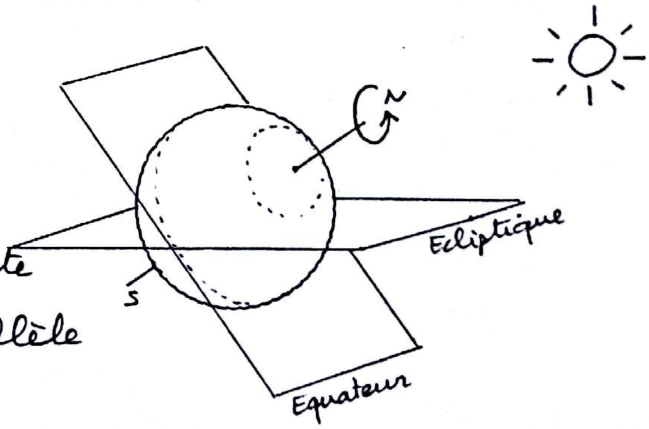
UN CADRAN SOLAIRE

On se propose de dessiner le graphisme d'un cadran solaire plan d'orientation quelconque, et cela en utilisant le programme qui calcule la position du soleil à une date quelconque, dans le référentiel horizontal.

Un cadran solaire est constitué d'un stylet fixé sur une planche, et l'ombre de son extrémité nous donne l'heure et la date.
Pour comprendre un peu la position de cette ombre, nous allons considérer 1 simplification :

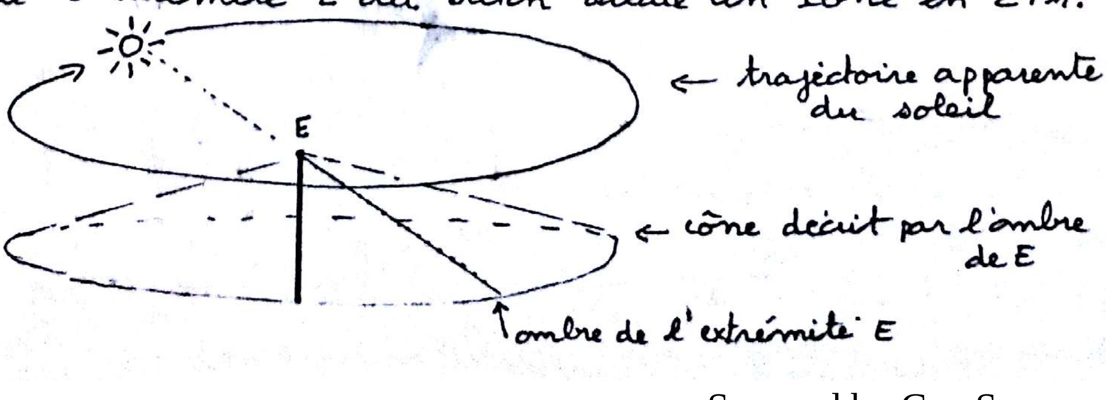
1° Si la Terre tournait sur elle même mais pas autour du Soleil

Voici le schéma :



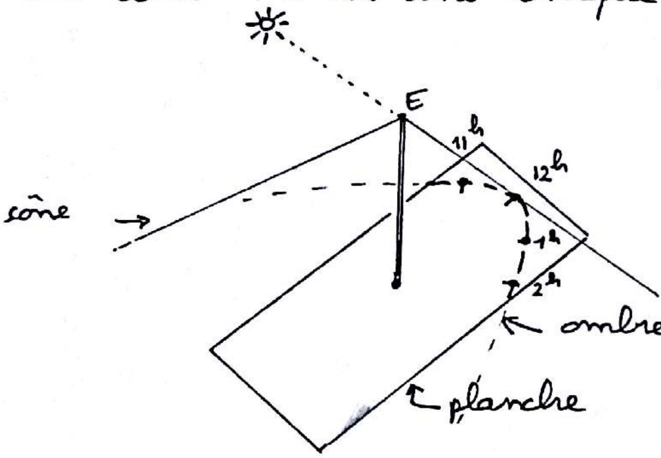
- Imaginez que l'on plante un bâton sur Terre parallèle à l'axe nord-sud.

En négligeant le rayon de la Terre devant la distance Terre-Soleil, l'ombre de l'extrémité E du bâton balaie un cône en 24h :

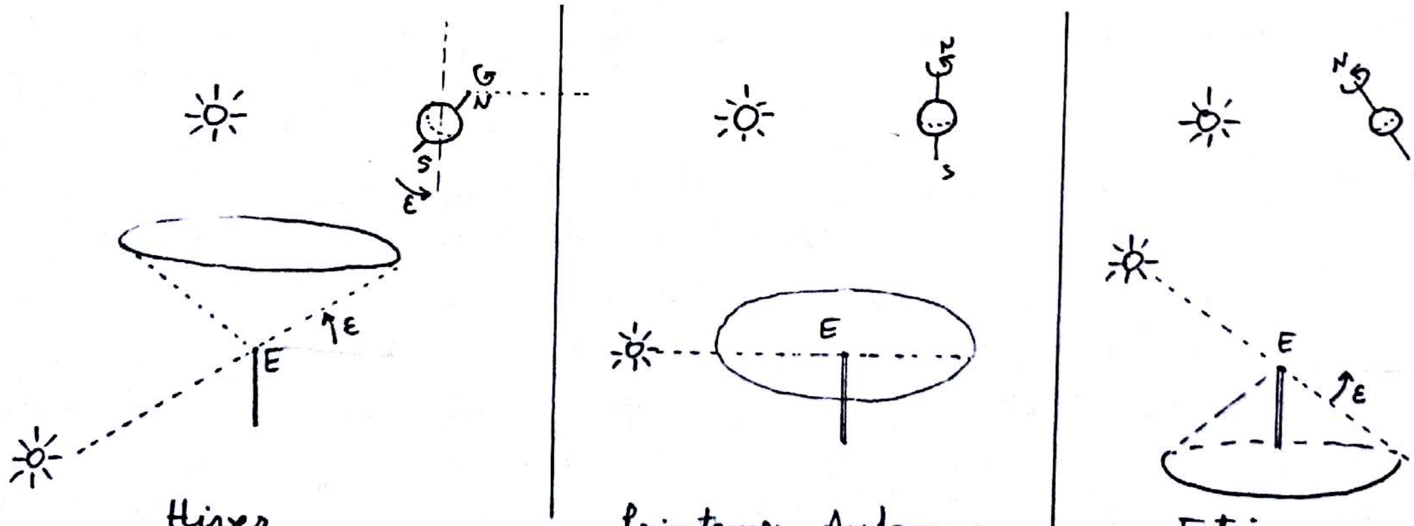


De plus, l'ombre fait un tour en 24^h ($360°$) et donc parcourt $\frac{360°}{24} = 15°$ en 1 heure.

- Si l'on fixe le baton sur une planche, l'ombre de E sur la planche sera sur l'intersection du plan de la planche et du cône : c'est une conique (cercle, ellipse, parabole ou hyperbole) selon l'angle relatif entre le plan et la surface du cône.

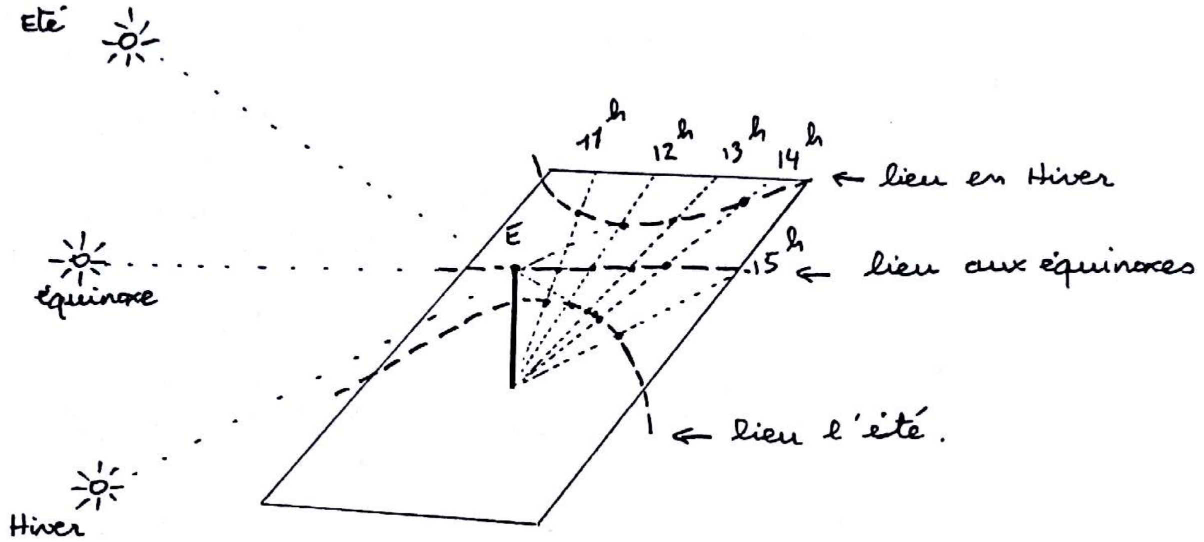


- Si l'on avait choisit de placer la Terre à un autre endroit de son orbite, la position du soleil par rapport à l'équateur aurait été différente, et donc le cône et la conique auraient été différents :



Hiver (Solstice) | Printemps - Automne (Equinoxes) | Eté (Solstice)

Si bien que pour ces différentes dates :

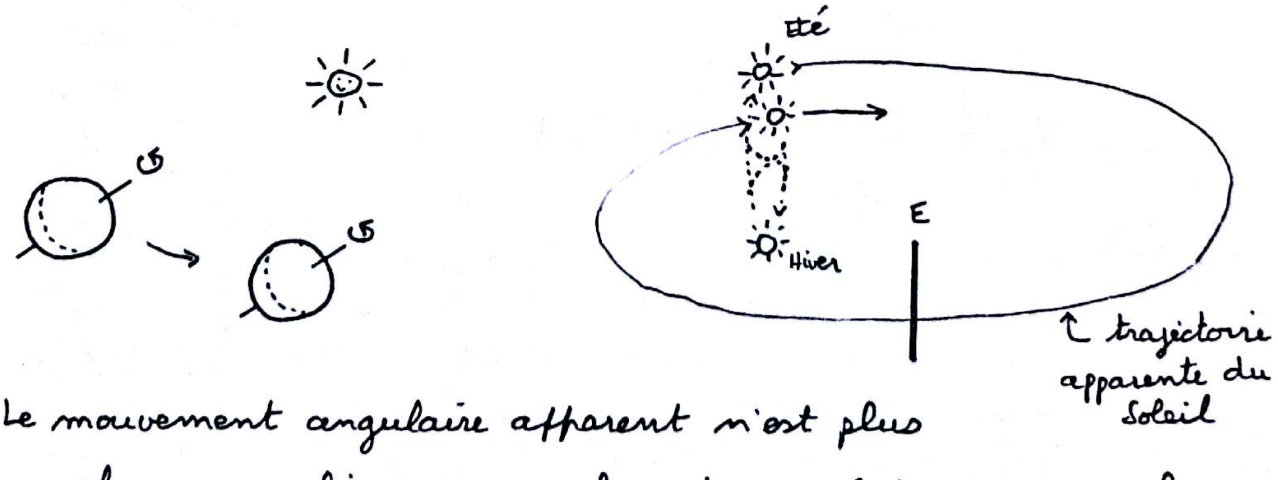


remarque : . les ombres de E pour les heures entières ($11^h, 12^h$...) divisent en angles égaux les cônes, mais par projection sur la planche, ces angles ne sont plus égaux.

. Pour une heure donnée (13^h par ex.) l'ombre de E sur la planche décrit un segment de droite en aller-retour, au cours de l'année.

2° Si la Terre tourne autour du Soleil

Cette fois ci la trajectoire apparente du Soleil n'est plus un cercle mais une sorte d'hélice :



Le mouvement angulaire apparent n'est plus uniforme, si bien que sur le cadran solaire pour une heure donnée (13^h par ex.) l'ombre ne décrira plus un segment.

Exercices:

. Dans l'hypothèse où l'orbite de la Terre est circulaire uniforme, montrer qualitativement comment varie la durée du jour solaire vrai (i.e. la durée entre deux passages successifs du soleil au méridien) au cours de l'année.

. En déduire l'écart au cours de l'année entre ~~la~~ l'heure ~~jour~~ solaire et l'heure universelle (: régulière).
Cet écart s'appelle réduction à l'équateur

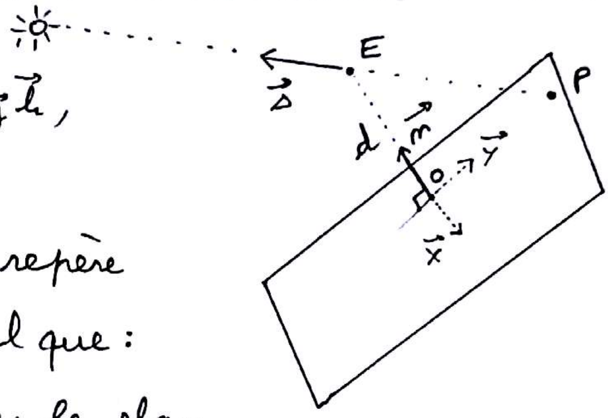
. En déduire le graphe que dessinerait l'ombre de l'extrémité de la tige sur notre cadran solaire si on l'observait tous les jours à une heure universelle (de la montre) fixée (ex : 12^h)

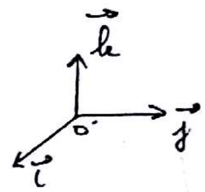
. Si on tient compte de l'ellipsité de l'orbite terrestre, sachant que d'après la loi des aires la vitesse angulaire de la Terre est plus ~~rapi~~ grande au périhélie qu'à l'aphélie, et que le périhélie est le 3 janvier, déterminer qualitativement comment se modifie les courbes précédantes.
(on obtient l'équation du temps)

Remarque : habituellement cette dernière courbe qui permet de corriger l'heure solaire vraie du cadran solaire, pour obtenir l'heure universelle (régulière), est représentée sur le côté du cadran solaire.

3° Formules de projection

On considère un plan fixe sur Terre de vecteur unitaire normal $\vec{n}$, et un point E à la distance d de ce plan.





- Le repère d'espace est $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$, le repère horizontal
- Sur le plan on placé un repère orthonormé direct $(O\vec{X}\vec{Y})$ tel que :

  O soit le projeté de E sur le plan,

  $\vec{X}$ soit horizontal et vers l'est

  $\vec{X}\vec{Y}$ direct

- $\vec{s}$ est un vecteur unitaire vers le soleil, caractérisé par ses coordonnées sphériques : (a_s, h_s)

<u>Exercice</u> : établir les formules : $P\left|\begin{matrix} X_P \\ Y_P \end{matrix}\right.$ en fonction de $\vec{n}\left|\begin{matrix} a_n \\ h_n \end{matrix}\right.$, $\vec{s}\left|\begin{matrix} a_s \\ h_s \end{matrix}\right.$ et d.

4° Programmation

- écrire une routine qui en fonction de (a_n, h_n) et (a_s, h_s) et d, calcule les coordonnées (X_P, Y_P) de P.
- Combiner les différents programmes pour dessiner un cadran solaire :

  1) on fixe $H = 8^h$, et on fait varier la date J, M

  $\to$ calcul de la position du soleil $(a_s, h_s) \to (X_P, Y_P)$

  et on affiche sur l'écran le point d'ombre $P(X_P, Y_P)$

  etc... pour $H = 9^h, 10^h$... et ensuite les lignes des dates.

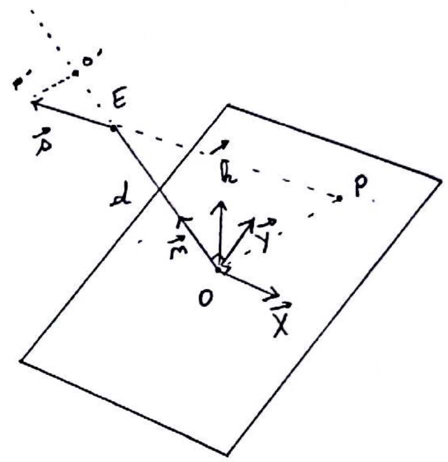
Solution

Attention, ici a_s / a_h est positif vers l'ouest.

Le repère $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ étant le repère horizontal

($\vec{i}$ vers le sud, $\vec{j}$ vers l'est, $\vec{k}$ vertical)

$$\vec{X} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{m}}{\|\vec{k} \wedge \vec{m}\|} \qquad \vec{Y} = \vec{m} \wedge \vec{X}$$



Les triangles EOP et $EO'P'$ sont homothétiques, et $\vec{EO'} = \vec{m}.(\vec{s}.\vec{m})$

donc $\vec{PE} = \vec{s} \cdot \frac{dE}{EO'} = \vec{s} \cdot \frac{d}{(\vec{s}.\vec{m})}$

et $\vec{OP} = \vec{OE} + \vec{EP} = d\vec{m} - \vec{s} \cdot \frac{d}{(\vec{s}.\vec{n})}$

ensuite $\begin{cases} X = \vec{OP}.\vec{X} \\ Y = \vec{OP}.\vec{Y} \end{cases}$

En coordonnées cartésiennes : $\vec{s} \left| \begin{array}{l} s_x = \cos h_s \cos(a_s) \\ s_y = \cos h_s \sin(-a_s) \\ s_z = \sin h_s \end{array} \right.$

$\vec{m} \left| \begin{array}{l} m_x = \cos h_m \cos(-a_m) \\ m_y = \cos h_m \sin(-a_m) \\ m_z = \sin h_m \end{array} \right.$

il vient : $\vec{k} \wedge \vec{m} = \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right. \wedge \left| \begin{array}{c} m_x \\ m_y \\ m_z \end{array} \right. = \left| \begin{array}{c} -m_y \\ m_x \\ 0 \end{array} \right.$

$$\|\vec{k} \wedge \vec{m}\|^2 = m_y^2 + m_x^2 = \cos^2 h_m$$

$$(\vec{s}.\vec{m}) = s_x m_x + s_y m_y + s_z m_z = \cos h_s \cos h_m \cos(a_s - a_m) + \sin h_s \sin h_m$$

$$\vec{s}.(\vec{k} \wedge \vec{m}) = -s_x m_y + s_y m_x = -\cos h_s \cos h_m \sin(a_s - a_m)$$

$$\vec{m} \wedge \vec{X} = \left| \begin{array}{c} m_x \\ m_y \\ m_z \end{array} \right. \wedge \left| \begin{array}{c} -m_y \\ m_x \\ 0 \end{array} \right. \cdot \frac{1}{\cos h_m} = \frac{1}{\cos h_m} \left| \begin{array}{c} -m_x m_z \\ m_y m_z \\ m_x^2 + m_y^2 \end{array} \right.$$

$$\vec{s}.(\vec{m} \wedge \vec{X}) = (-s_x m_x m_z + s_y m_y m_z + s_z(m_x^2 + m_y^2)) / \cos h_m$$
$$= -\cos h_m \sin h_m \cos(a_s + a_m) + \sin h_s \cos h_m$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{array}{l} X = \dfrac{d \cos h_s \sin(a_s - a_m)}{[\cos h_s \cos h_m \cos(a_s - a_m) + \sin h_s \sin h_m]} = \dfrac{d \sin(a_s - a_m)}{[\cos h_m \cos(a_s - a_m) + \operatorname{tg} h_s \sin h_m]} \\ Y = \dfrac{d\,[\cos h_s \sin h_m \cos(a_s + a_m) - \sin h_s \cos h_m]}{[\cos h_s \cos h_m \cos(a_s - a_m) + \sin h_s \sin h_m]} = \dfrac{d.[\operatorname{tg} h_m \cos(a_s + a_m) - \operatorname{tg} h_s]}{[\cos(a_s - a_m) + \operatorname{tg} h_s \operatorname{tg} h_m]} \end{array}}$$