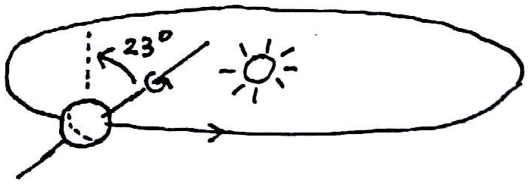
ASTRONOMIE

(Frédéric Faure)

I Présentation

La position du soleil dans le ciel varie au cours de la journée et au cours de l'année selon les saisons.

Cette variation est due à la combinaison de deux rotations : d'une part la Terre tourne sur elle même en un jour selon l'axe des pôles, et d'autre part, la Terre est en orbite autour du Soleil, et fait un tour en un an.
Le plan contenant l'orbite terrestre est appelé plan de l'écliptique.
Il faut noter que les deux axes de rotation ne sont pas parallèles mais forment un angle de 23° appelé obliquité.



L'objectif de cette étude est de comprendre ces mouvements, calculer à une date donnée la position du Soleil dans le ciel grenoblois, et en application, construire un cadran Solaire par exemple.

Au passage, cela nous permettra de comprendre le phénomène des saisons.

Dans un premier temps, l'orbite terrestre sera supposé circulaire, et ensuite elliptique.

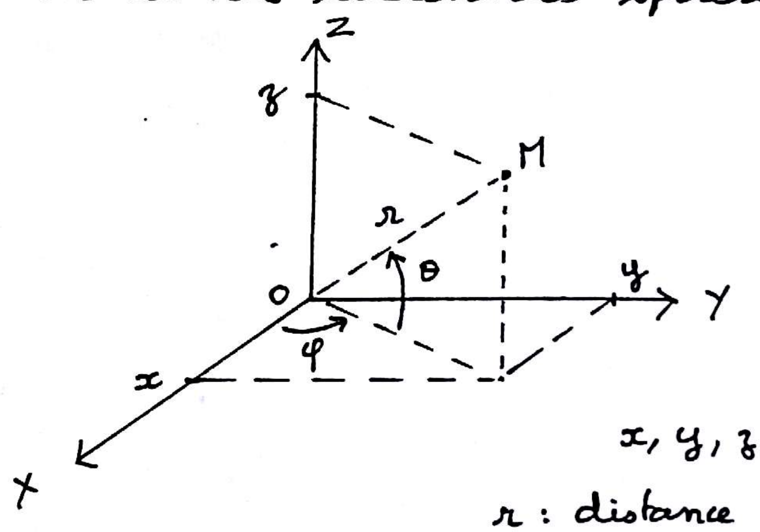
II Préliminaire mathématique

a) Système de coordonnées

En mécanique céleste, l'emploi de systèmes de coordonnées est à la base de presque tout calcul.

Un repère est constitué d'une origine O, et de trois axes X, Y, Z.

· Pour caractériser la position d'un point M dans l'espace, on se servira de ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) ou de ses coordonnées sphériques (r, θ, φ)



x, y, z : distances

r : distance θ, φ : angles
$\theta \in [-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}]$ $\varphi \in [0; 2\pi[$

L'unité de distance que l'on utilisera sera l'unité astronomique (distance moyenne Terre-Soleil)

1 U.A. = 149 597 870 km

Les angles seront en radians ou en degrés ou en heures (2π rad. = 360° = 24 h.)

D'après la figure, les formules de passage sont :

$$\begin{cases} x = r \cos\theta \cos\varphi \\ y = r \cos\theta \sin\varphi \\ z = r \sin\theta \end{cases}$$

$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\theta = \operatorname{asin}(z/r)$ $\varphi = \operatorname{atan2}(x,y)$

b) Les coordonnées géographiques

Pour repérer un point à la surface de la Terre, on utilise les coordonnées géographiques.

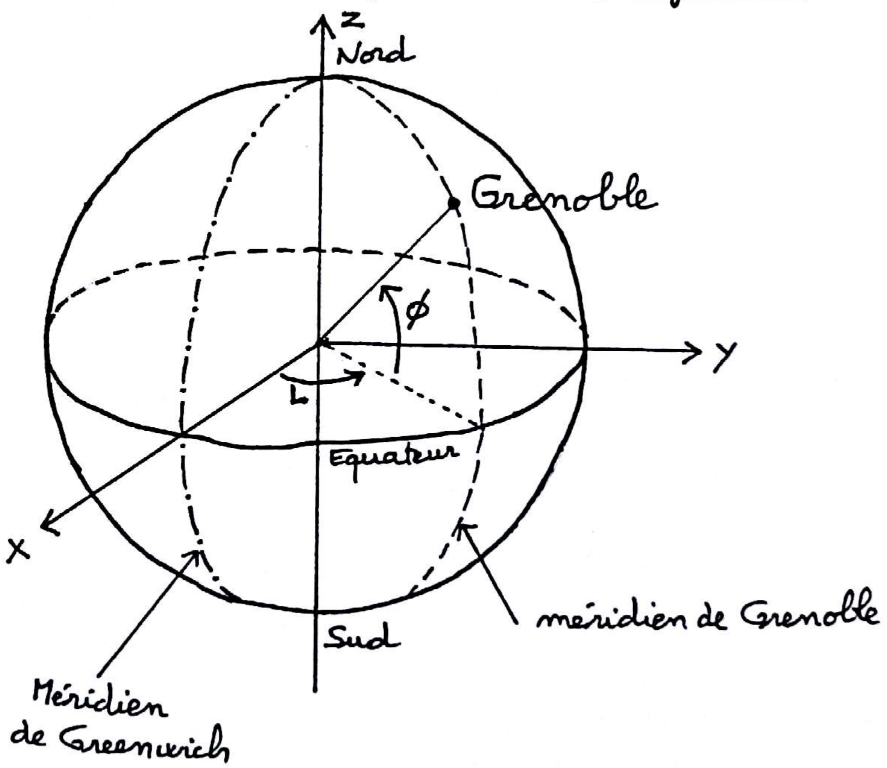
L'origine du repère est au centre de la Terre T.

L'axe z est vers le pôle nord

L'axe . l'intersection de l'équateur et du <u>méridien</u> de Greenwich (en Angleterre)

L'axe y est tel que (Tx, Ty, Tz) soit direct.

Les coordonnées sphériques associées sont la distance r au centre de la Terre, la <u>latitude</u> ϕ et la <u>longitude</u> L



<u>Position de Grenoble</u> : $\begin{cases} \text{latitude} & \phi = 45° \, 11' \text{ Nord} \\ \text{longitude} & L = 5° \, 43' \text{ Est} \end{cases}$

III Description des mouvements

La Terre tourne autour du soleil en un an selon une orbite elliptique, quasiment circulaire,
Le plan contenant cette orbite s'appelle <u>le plan de l'écliptique</u>.
Il se trouve que les huit autres planètes du système solaire, les astéroïdes (entre Mars et Jupiter) ainsi que la Lune ont leur orbite quasiment dans ce plan aussi
Les constellations du zodiaque sont les ensembles d'étoiles qui se trouve dans ce plan de l'écliptique.

D'autre part, la Terre tourne sur elle même en un jour selon l'axe des pôles qui a une direction fixe au cours de l'année (conservation du moment cinétique)
Cette direction forme un angle $\varepsilon = 23°,45$ avec la normale au plan de l'écliptique appelée <u>obliquité</u>.
Il en résulte que l'intersection entre le plan de l'écliptique et le plan de l'équateur terrestre est une droite qui a une direction constante γ, appelée <u>axe des équinoxes</u> (cf figure 4). Vu de la Terre, cet axe va à l'infini et coupe la sphère céleste (des étoiles considérée à l'infini) en deux points. L'un d'eux est celui où passe le Soleil le 21 mars à l'équinoxe du printemps et s'appelle le <u>point Vernal</u>. Cela sert à orienter l'axe γ.

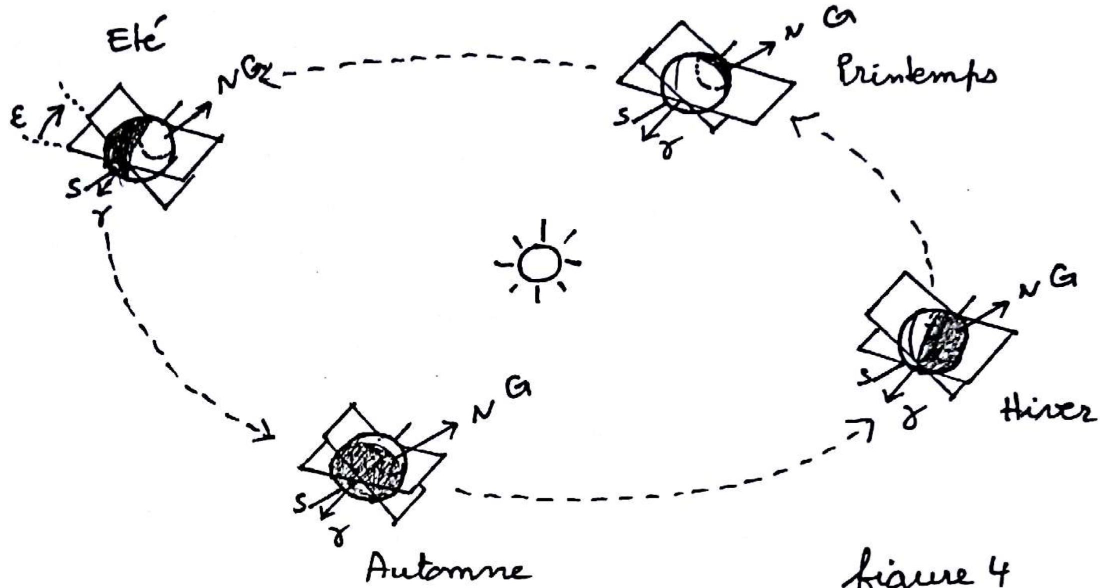
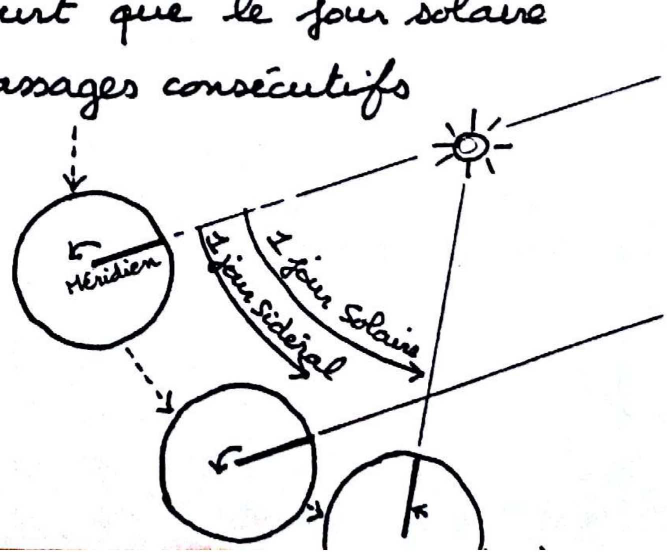


figure 4

On peut déjà remarquer deux phénomènes :

- Le premier, dû à l'obliquité ε, est le phénomène des saisons qui peut se comprendre en regardant la figure 4 : Le trait en pointillés qui se trouve sur l'hémisphère nord correspond à la latitude de Grenoble, et il apparait clairement les différences des durées du jour entre l'hive et l'été.

- Ensuite, la période de rotation de la Terre sur elle même c'est à dire le temps entre les passages consécutifs d'une même étoile au méridien d'un lieu, que l'on appelle jour sidéral, est plus court que le jour solaire moyen qui correspond aux passages consécutifs du soleil au méridien.



1 jour solaire = 24 h
par définition.

question : durée du jour sidéral ?

IV Définition des différents référentiels utilisés et appellations.

A partir du mouvement de la Terre autour du soleil, le calcul de la position du soleil dans le ciel (cordonnées horizontales) nécéssite 5 systèmes de coordonnées :

Leur définition est précisée par la figure 6 suivante.
On va ici décrire le changement de repère qu'il faut faire (application linéaire) pour passer d'un repère à l'autre :

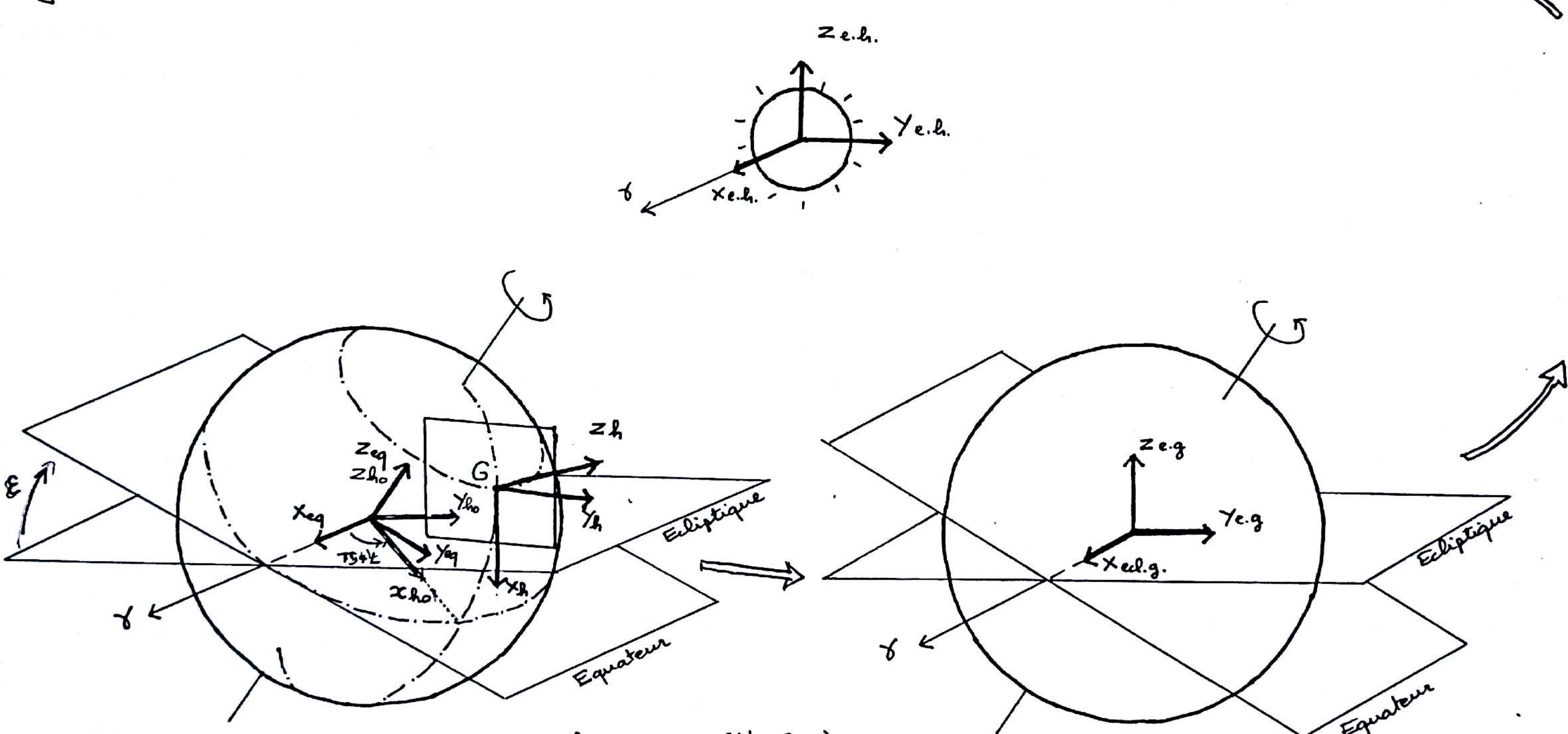
Une translation (Soleil → Terre) permet de passer du repère écliptique héliocentrique au repère écliptique géocentrique

Une rotation de ε autour de $x_{ecl.g}$ permet de passer du repère éclipt. géoc. au repère équatorial

Ensuite à cause de la rotation sur elle même de la Terre, le méridien de Greenwich est séparé de l'axe x_{eq} par un angle T.S. (: temps sidéral) qui croît uniformément avec temps et de période : 1 jour sidéral.
Il faut donc une rotation de (T.S. + Longitude) autour de z_{eq} pour passer au cordonnées horaires.
Et finalement une rotation de $(\frac{\pi}{2} - \text{Latitude})$ autour de l'axe y_{ho} pour passer aux cordonnées horizontales.

Entre parenthèses sont notées les cordonnées sphériques correspondantes à ces repères.

Les différents référentiels



$x_{ho}\ y_{ho}\ z_{ho}$: coordonnées horaires (H, δ, ρ)

x_h, y_h, z_h : coordonnées horizontales (a, h, ρ)

$x_{eq}\ y_{eq}\ z_{eq}$: coordonnées équatoriales (α, δ, ρ)

$x_{e.g}\ y_{e.g}\ z_{e.g}$: coordonnées écliptiques géocentriques (l_T, b_T, ρ)

$x_{e.h}\ y_{e.h}\ z_{e.h}$: coordonnées écliptiques héliocentriques (l_s, b_s, ρ)

V Exercices

Pour les calculs, le temps sera compté en jours depuis le 1er janvier 1992 à 0^h T.U. (= 1^h légale)

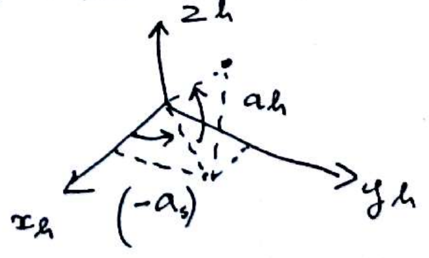
exercice 1 : trouver une formule ou une manière d'obtenir t à partir d'une date spécifiée par l'heure H, le jour J, le mois M et l'année A.

exercice 2 : sachant que le solstice d'Hiver s'est produit le 21 décembre, et en supposant la Terre en rotation uniforme et circulaire autour du soleil, trouver l'expression de la longitude héliocentrique de la Terre en fonction du temps : $l_s^T(t)$

exercice 3 : en déduire aussi l'expression en fonction du temps, du temps sidéral $TS(t)$ correspondant à la rotation de la Terre sur elle même.

exercice 4 : Etant donné un astre de coordonnées $(x_{eh}\ y_{eh}\ z_{eh})$ dans le référentiel écliptique héliocentrique, écrire les formules de changements de coordonnées pour obtenir ses coordonnées (x_h, y_h, z_h) dans le référentiel horizontal.

Déduire l'azimut a_s et la hauteur a_h



SOLUTIONS

o) sur la durée du jour sidéral :

. d'après la figure 5, on remarque intuitivement que le jour sidéral est plus court que le jour solaire (moyen) et que l'écart accumulé entre les 2, est de 1 jour solaire sur un an.

Or il y a 365,25 jours solaire par an

(la fraction explique l'existence d'années bissextiles :

3 ans de 365 jours + 1 an de 366 jours

= 4 ans de 365,25 jours)

Il y a donc 366,25 jours sidéraux par an.

et $\boxed{1 \text{ jour sidéral} = \frac{365,25}{366,25} \cdot 1 \text{ jour solaire moyen}}$

or 1 jour solaire moyen = 24 h

donc $\underline{1 \text{ jour sidéral} = 23^h 56' 04''}$

. <u>De façon plus formelle</u> :

soit θ l'angle entre le méridien et les étoiles fixes.

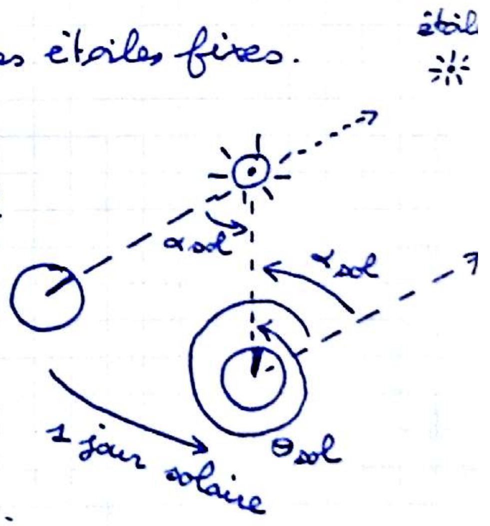
en 1 jour sidéral : $\theta_{sid} = 2\pi$

en 1 jour solaire : $\theta_{sol} = 2\pi + \alpha_{sol}$

d'après la figure ci contre, en un an

$$365,25 \cdot \alpha_{sol} = 2\pi$$

donc $\theta_{sol} = \frac{(365,25+1)\,2\pi}{365,25}$



et comme θ augmente de façon linéaire,

$$1 \text{ jour sidéral} = \frac{\theta_{sid}}{\theta_{sol}} \cdot 1 \text{ jour solaire} = \frac{365,25}{366,25} \cdot 1 \text{ jour sol.}$$

<u>exercice 1</u> :

si les mois avaient tous 30 jours, les années 365 jours, et si l'heure en France toujours décallée de 1^h par rapport à l'heure universelle (: heure à Greenwich) alors :
le nombre de jours écoulés entre le 1er janvier 1992 à 0^h T.U. (: tps universel) et une date (H, J, M, A) serait :

$$t = (A-1992) \cdot 365 + (M-1) \cdot 30 + J - 1 + (H-1)/24$$

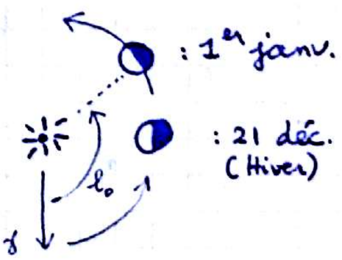
Mais il y a des années bisextiles, des mois de durées différentes et selon la saison, l'heure d'été ou l'heure d'hiver.
Une formule appropriée est :

$$t = \text{int}\left[(A-1992) \cdot 365{,}25 + \text{mois}[M] + (J-1) + 0{,}75 \right] + \left(H - {}^{2}_{1}\right)/24$$

avec le tableau de valeurs :

mois [1] = 0	mois [7] = 181,25
mois [2] = 31	mois [8] = 212,25
mois [3] = 31 + 28,25 = 59,25	mois [9] = 243,25
mois [4] = 59,25 + 31 = 90,25	mois [10] = 273,25
mois [5] = 120,25	mois [11] = 304,25
mois [6] = 151,25	mois [12] = 334,25

<u>exercice 2</u> :



d'après la figure 4, le 21 décembre :

$$\begin{cases} t_0 = -11 \text{ j.} \\ l_s^T(t_0) = \dfrac{\pi}{2} \text{ rad} \end{cases}$$: longitude héliocentrique de la Terre

or en 365,25 jours, $\Delta l_s^T = 2\pi$, donc en supposant le mouvement de la Terre circulaire et uniforme autour du soleil, à une date t quelconque, la longitude héliocentrique de la Terre $l_s^T(t)$ est :

$$l_s^T(t) = l_s^T(t_0) + \frac{2\pi}{365{,}25} \cdot (t - t_0)$$

cad $$\boxed{l_s^T(t) = l_0 + \frac{2\pi}{365{,}25}\, t}$$

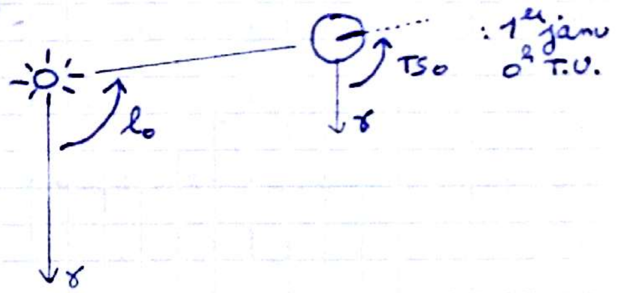
avec $l_0 = 1{,}76$ rad

Des données plus précises donnent : $\boxed{l_0 = 1{,}74213 \text{ rad}}$

rem : au 1er janvier, le soleil vu de la Terre est dans la constellation du Sagittaire (: signe zodiacal)

exercice 3 : il faut remarquer qu'à 0^h T.U. (minuit à Greenwich) le méridien de Greenwich est opposé au soleil. Et donc d'après la définition du temps sidéral qui est l'angle entre γ et le méridien de Greenwich,

$$\boxed{TS_0 = l_0 = 1{,}74213 \text{ rad}}$$



Ensuite, $TS(t)$ est de période 1 jour sidéral donc :

$$TS(t) = \frac{2\pi}{1 \text{ jour sidéral}} \cdot t + TS_0$$

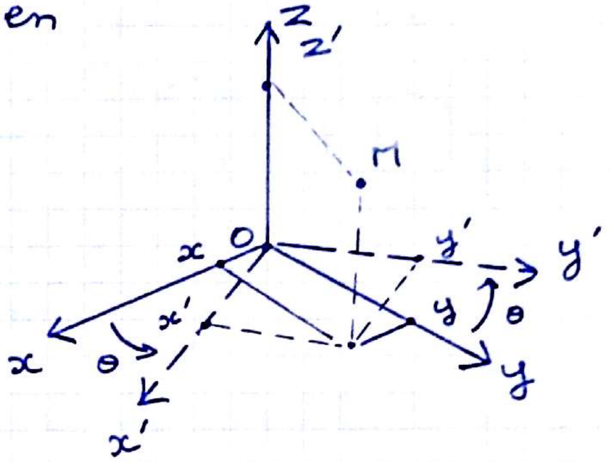
$$\boxed{TS(t) = \frac{2\pi \cdot 366{,}25}{365{,}25} \cdot t + TS_0}$$

rem : $TS(t)$ appelé temps sidéral est en réalité un angle.

exercice 4 :

De façon générale, si un point M a pour coordonnées (x, y, z) dans un repère R et (x', y', z') dans un repère R' qui s'obtient par une rotation de θ autour de (Oz) à partir de R. Alors en notation matricielle :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

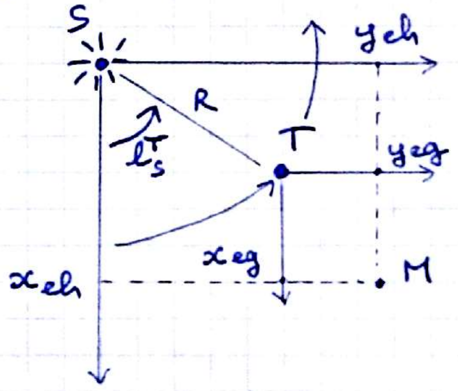


. Ainsi si un astre quelconque a pour coordonnées écliptiques héliocentriques $(x_{eh}\ y_{eh}\ z_{eh})$, comme d'après la p 7 on passe au repère géocentrique par une translation de

$$\boxed{\begin{cases} X^T = R\cos(\ell_s^T(t)) \\ Y^T = R\sin(\ell_s^T(t)) \end{cases}}$$: coord. hélioc. de la Terre

alors :

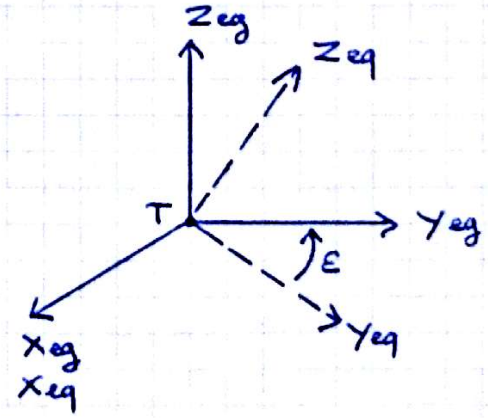
$$\boxed{\begin{cases} x_{eg} = x_{eh} - X^T \\ y_{eg} = y_{eh} - Y^T \\ z_{eg} = z_{eh} \end{cases}}$$



. Ensuite, on passe au repère équatoriale par une rotation de ε (l'obliquité) autour de X_{eg}

donc :

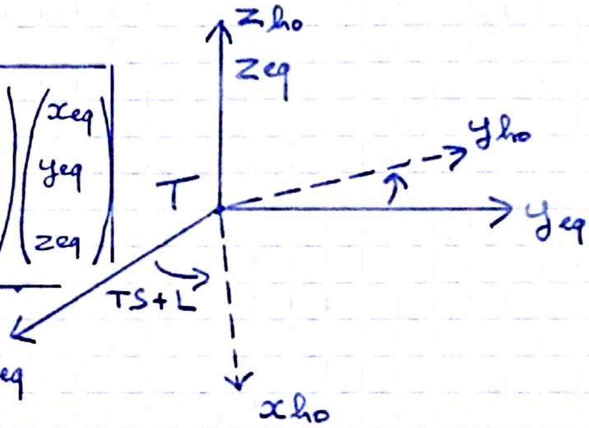
$$\boxed{\begin{pmatrix} x_{eq} \\ y_{eq} \\ z_{eq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon & -\sin\varepsilon \\ 0 & \sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{eg} \\ y_{eg} \\ z_{eg} \end{pmatrix}}$$



- Ensuite on passe au repère de coordonnées horaires (où l'axe x_{ho} est sur le méridien du lieu considéré) par une rotation de $(TS(t) + L)$ autour de l'axe z_{eq}.

donc :

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_{ho} \\ y_{ho} \\ z_{ho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(TS+L) & \sin(TS+L) & 0 \\ -\sin(TS+L) & \cos(TS+L) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{eq} \\ y_{eq} \\ z_{eq} \end{pmatrix}}$$

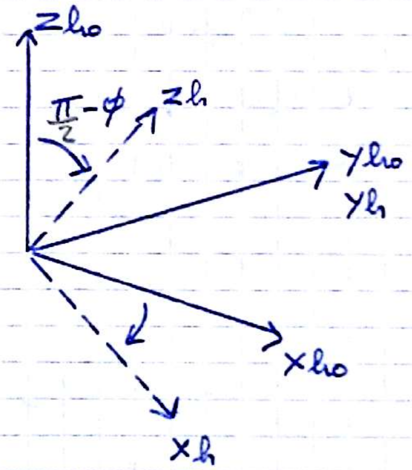


L : longitude du lieu
(positif vers l'est)

- Finalement on passe au repère horizontale par une rotation de $\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)$ autour de y_{ho} avec
  ϕ : latitude du lieu

donc :

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_h \\ y_h \\ z_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cancel{-\cos\phi}\ \sin\phi & 0 & \cancel{-\sin\phi}\ -\cos\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \cancel{\sin\phi}\ \cos\phi & 0 & \cancel{-\cos\phi}\ \sin\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{ho} \\ y_{ho} \\ z_{ho} \end{pmatrix}}$$



Structure du programme

1° écrire un sous programme correspondant à l'exercice 1 :
en entrée : H, J, M, A
en sortie : t

2° écrire un sous programme correspondant aux exercices 2 et 3 :
en entrée : t
en sortie : $TS(t)$, $l_S^T(t)$, $X^T(t)$, $Y^T(t)$

3° écrire un sous programme correspondant à l'exercice 4 :
en entrée : x_{eh} y_{eh} z_{eh}, t, TS, X^T, Y^T, ϕ, L, ε
en sortie : x_h, y_h, z_h

4° Combiner ces sous programmes dans un programme principal pour obtenir la position du soleil dans le ciel grenoblois à une date (H, J, M, A) donnée.

Extensions possibles :
- tracé d'un cadran solaire plan
- éphémérides des planètes (Jupiter, Saturne, Vénus Mars, Mercure, ...)

Il est important pour cela de ne plus négliger l'ellipticité de l'orbite terrestre, et d'en tenir compte en modifiant le sous programme 2° sur le calcul de $X^T(t)$ et $Y^T(t)$:

5° A l'aide des énoncés concernant l'orbite de Kepler, écrire un sous programme qui donne la position de la Terre sur son orbite elliptique :
en entrée : t
en sortie : $X^T(t)$, $Y^T(t)$