Examen de physique mathématique

mars 2021

Résumé

Pour accéder aux cours et aux questions cliquez sur les liens dans ce fichier pdf. Rédaction à rendre sous forme pdf (ce peut être des notes scannées) avant le 17 avril 2021, à Frédéric Faure. Bien encadrer les résultats.

1 Géométrie différentielle

Référence : Cours, chap 18

— Exercice 18.3.19.

— Exercice 18.3.20.

— Exercice 18.3.21.

— Exercice 18.5.8.

2 Mécanique Hamiltonienne

Référence : Cours, chap 19

— Exercice 19.2.16

3 Introduction à la mécanique quantique

Référence : Cours, chap 2.

Exercice 3.1. Évolution d'un paquet d'onde libre à une dimension

1. A la date $t = 0$, la particule libre est décrite par une d'onde $x \in \mathbb{R} \rightarrow \psi_0(x)$ dont on ne précisera pas l'expression. Le paquet d'onde évolue librement sur tout l'axe x, i.e. solution de l'équation de Schrödinger avec $\hat{H} = \frac{|\mathrm{Op}_\hbar(\xi)|^2}{2m} = \mathrm{Op}(H)$ le Hamiltonien du système avec $H(\xi) = \frac{|\xi|^2}{2m}$ le Hamiltonien classique. Déterminer l'expression de la transformée de Fourier $\widetilde{\psi}_t(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int e^{-i\xi x/\hbar} \psi_t(x)\, dx$ à la date t à partir de $\widetilde{\psi}_0(\xi)$. Aide : la TF inverse est $\psi_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int e^{i\xi x/\hbar} \tilde{\psi}_t(\xi)\, d\xi$. Montrer que $\widetilde{\psi}_t(\xi) = e^{-i\frac{\xi^2 t}{2m\hbar}} \widetilde{\psi}_0(\xi)$.

   Solution 3.2. L'équation de Schrödinger est

   $$i\hbar\partial_t\psi_t = \hat{H}\psi_t = \frac{1}{2m}(-i\hbar\partial_x)^2 \psi_t$$

   La TF inverse est

   $$\psi_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int e^{i\xi x/\hbar} \tilde{\psi}_t(\xi)\, d\xi$$

   Donc

   $$(-i\hbar\partial_x)^2 \psi_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \xi^2 e^{i\xi x/\hbar} \tilde{\psi}_t(\xi)\, d\xi$$

Donc l'équation de Schrödinger s'écrit

$$i\hbar\partial_t\tilde{\psi}_t = \frac{1}{2m}\xi^2\tilde{\psi}_t$$

que l'on résoud :

$$\widetilde{\psi_t}(\xi) = e^{-i\frac{\xi^2 t}{2m\hbar}}\widetilde{\psi_0}(\xi).$$

2. On note $H(\xi) = \frac{|\xi|^2}{2m}$ le Hamiltonien classique. On fait l'approximation, à l'ordre 1 en ξ, de $H(\xi)$ en un point $\xi_0 \in \mathbb{R}$ donné :

$$H(\xi) \simeq H(\xi_0) + (\xi - \xi_0)\left(\frac{\partial H}{\partial \xi}\right)_{\xi=\xi_0}$$

La quantification donne l'opérateur $\hat{H} = H(\xi_0) + (\mathrm{Op}_\hbar(\xi) - \xi_0)\frac{\xi_0}{m}$. Résoudre l'équation de Schrödinger et déduire l'expression de $\psi_t(x)$ à la date t à partir de $\psi_0(x)$. Allure de $|\psi_t(x)|$? Aide : même méthode que en question 1, montrer que $\psi_t(x) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\left(H(\xi_0) - \frac{\xi_0^2}{m}\right)t\right)\psi_0\left(x - \frac{\xi_0}{m}t\right)$.

Solution 3.3. L'équation de Schrödinger est

$$i\hbar\partial_t\psi_t = \hat{H}\psi_t = \left(H(\xi_0) + (-i\hbar\partial_x - \xi_0)\frac{\xi_0}{m}\right)\psi_t$$

et comme dans la question précédente on obtient

$$i\hbar\partial_t\tilde{\psi}_t = \left(H(\xi_0) + (\xi - \xi_0)\frac{\xi_0}{m}\right)\tilde{\psi}_t$$

que l'on résoud

$$\widetilde{\psi_t}(\xi) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\left(H(\xi_0) + (\xi - \xi_0)\frac{\xi_0}{m}\right)t\right)\widetilde{\psi_0}(\xi).$$

On déduit

$$\begin{aligned}
\psi_t(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int e^{i\xi x/\hbar}\tilde{\psi}_t(\xi)\,d\xi \\
&= \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\left(H(\xi_0) - \frac{\xi_0^2}{m}\right)t\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int e^{\frac{i}{\hbar}\xi\left(x - \frac{\xi_0}{m}t\right)}\widetilde{\psi_0}(\xi)\,d\xi \\
&= \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\left(H(\xi_0) - \frac{\xi_0^2}{m}\right)t\right)\psi_0\left(x - \frac{\xi_0}{m}t\right)
\end{aligned}$$

Donc

$$|\psi_t(x)| = \left|\psi_0\left(x - \frac{\xi_0}{m}t\right)\right|$$

est une fonction qui se translate au courts du temps à la vitesse $v_0 = \frac{\xi_0}{m}$.

3. Même question que précédemment en poussant le développement jusqu'à l'ordre 2 en ξ, et en considérant cette fois ci le cas particulier d'un paquet d'onde Gaussien. On aura une intégrale Gaussienne à calculer.

Solution 3.4. de même d'après la question 1 :

$$\begin{aligned}
\psi_t(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int e^{i\xi x/\hbar}\tilde{\psi}_t(\xi)\,d\xi \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int e^{i\xi x/\hbar}e^{-i\frac{\xi^2 t}{2m\hbar}}\widetilde{\psi_0}(\xi)d\xi
\end{aligned}$$