Taux de ionisation d'un plasma

① ⓐ N particules libres dans volume V,

énergie interne

$$E(q,p) = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2m}\left(p_{1,j}^2 + p_{2,j}^2 + p_{3,j}^2\right) - N\varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{N} p_{1,j}^2 + p_{2,j}^2 + p_{3,j}^2 = 2m(E+N\varepsilon)$$

: équation d'une sphère de rayon $R = \left(2m(E+N\varepsilon)\right)^{1/2}$

D'après la loi de Weyl,

$$n(E) = \frac{1}{N!} \frac{\mathrm{Vol}\left(\{q,p\} \in \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N} \text{ tq } E(q,p) \leq E\right)}{(2\pi\hbar)^{3N}}$$

indiscernabilité

$$= \frac{V^N \cdot C_{3N} R^{3N}}{N!\,(2\pi\hbar)^{3N}} \quad , \quad \ln C_n \simeq \frac{n}{2}\ln\left(\frac{2\pi e}{n}\right)$$

$$\ln N! \simeq N \ln \frac{N}{e}$$

densité d'états :

$$\rho(E) = \frac{dn}{dE} = \frac{V^N C_{3N}}{N!\,(2\pi\hbar)^{3N}} \left(2m(E+N\varepsilon)\right)^{\frac{3N}{2}-1} \left(\frac{3N}{2}\, 2m\right)$$

Entropie : $S(E,V,N) = k \ln \rho(E)$

$$= k N \ln V + k \frac{3N}{2} \ln\left(\frac{2\pi e}{3N}\right)$$

négligeable devant N

$$+ k\left(\frac{3N}{2} - 1\right) \ln\left(2m(E+N\varepsilon)\right)$$

$$- k\, 3N \ln(2\pi\hbar) - kN \ln\left(\frac{N}{e}\right)$$

$$+ \ln\left(\frac{3}{2} N\, 2m\right) \longleftarrow$$ terme négligeable devant $N \gg 1$,

$$S = k N \left(\ln\left[\frac{V}{N} \left(\frac{4\pi m (E+N\varepsilon)}{3N(2\pi\hbar)^2} \right)^{3/2} \right] + \frac{5}{2} \right)$$

<u>rem</u> : pour $N \gg 1$, on a le même résultat pour S en calculant $k \ln n(E)$ au lieu de $k \ln \rho(E)$, car la dérivée $\rho(E) = \frac{dn}{dE}$ rajoute des termes que l'on a négligé devant $N \gg 1$.

(b) $\bullet$ $\frac{1}{T} := \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{k\,3N}{2(E+N\varepsilon)}$

$$\Longleftrightarrow \boxed{E+N\varepsilon = \frac{3}{2} N k T} \quad (a)$$

$\bullet$ $\frac{P}{T} = \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{kN}{V} \Longleftrightarrow \boxed{PV = n k T}$

avec $n = \frac{N}{V}$

$\bullet$ $-\frac{\mu}{T} = \frac{\partial S}{\partial N} \Longleftrightarrow$

$$-\frac{\mu}{kT} = \ln V + \frac{3}{2} \ln\left(\frac{2\pi e}{3N}\right) - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \ln\left(2m(E+N\varepsilon)\right)$$

$$+ \frac{3N}{2}\frac{\varepsilon}{(E+N\varepsilon)} - 3\ln(2\pi\hbar) - \ln N$$

$$\underset{(a)}{=} \ln\left(\frac{V}{N}\right) + \frac{3}{2}\ln\left(\frac{2\pi}{3N}\right) + \frac{3}{2}\ln\left(2m\frac{3}{2}NkT\right) + \frac{3N\varepsilon\cdot 2}{2\cdot 3NkT} - 3\ln(2\pi\hbar)$$

$$= \frac{\varepsilon}{kT} + \ln\left[\frac{V}{N}\left(\frac{m\,kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}\right]$$

$$\iff \quad e^{-\frac{(\mu+\varepsilon)}{k_B T}} = \frac{V}{N} \left(\frac{m \, k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2}$$

$$\iff \quad e^{\frac{\mu+\varepsilon}{k_B T}} = n \, \lambda_T^{3}$$

avec $\lambda_T = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{m \, k_B T} \right)^{1/2}$ et $n = \frac{N}{V}$

(2) Il y a des réactions $H \Longleftrightarrow p^+ + e^-$,

qui se produise de façon aléatoire.

- Lors de ces réactions, il y a conservation de l'énergie totale E_{tot}, et cela se traduit par l'égalité des températures à l'équilibre.

(cf argument du cours).

- Il y a aussi conservation du nombre total d'électrons N_{tot}, présent dans H ou libres.

La valeur N_e d'e^- libre fluctue,

mais $N_{tot} = N_e + N_H$ et $N_p = N_e$

d'après la combinatoire,

$$S_{tot}(N_e) = S_H(N_H) + S_p(N_p) + S_e(N_e)$$
$$= S_H(N_{tot} - N_e) + S_p(N_e) + S_e(N_e)$$

à l'équilibre N_e est la valeur qui rend $S_{tot}(N_e)$ maximal.

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial S_{tot}}{\partial N_e} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad -\frac{\partial S_H}{\partial N_H} + \frac{\partial S_p}{\partial N_p} + \frac{\partial S_e}{\partial N_e} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{\mu_H = \mu_p + \mu_e}$$

3 $\mu_H = \mu_p + \mu_e$

$$\Rightarrow \quad e^{\frac{\mu_H+\varepsilon}{k_BT}} \, e^{-\frac{\varepsilon}{k_BT}} = e^{\frac{\mu_p}{k_BT}} \, e^{\frac{\mu_e}{k_BT}}$$

or pour les atomes d'Hydrogène,

$$e^{\frac{\mu_H+\varepsilon}{k_BT}} = n_H \lambda_H^3$$

pour les protons $e^{\frac{\mu_p}{k_BT}} = n_p \lambda_p^3$ avec $\lambda_p \simeq \lambda_H$

car $m_p \simeq m_H$

pour les electrons $e^{\frac{\mu_e}{k_BT}} = n_e \lambda_e^3$

donc

$$n_H \cancel{\lambda_H^3} \, e^{-\frac{\varepsilon}{k_BT}} = n_p \cancel{\lambda_p^3} \, n_e \lambda_e^3$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{n_e n_p}{n_H} = \lambda_e^{-3} e^{-\frac{\varepsilon}{k_BT}}}$$

④ D'après la neutralité du plasma,

$$n_e = n_p \qquad \text{et} \quad n := n_H + n_p$$

donc

$$\frac{n_p^2}{n - n_p} = \lambda_e^{-3} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} = \alpha n$$

$$\Longleftrightarrow \quad n_p^2 + \alpha n\, n_p - \alpha n^2 = 0$$

$$\Delta := (\alpha n)^2 + 4 \alpha n^2 = n^2 (\alpha^2 + 4\alpha)$$

$$n_p = \frac{-\alpha n + n\sqrt{\alpha^2 + 4\alpha}}{2} = \frac{n}{2}\left(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha}\right)$$

taux de ionisation :

$$\boxed{r := \frac{n_p}{n} = \frac{1}{2}\left(-\alpha + (\alpha^2 + 4\alpha)^{1/2}\right)}$$

- si $\alpha \gg 1$ alors $(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$

$$r = \frac{1}{2}\left(-\alpha + \alpha\left(1 + \frac{4}{\alpha}\right)^{1/2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\alpha + \alpha\left(1 + \frac{2}{\alpha} - \frac{1}{8}\frac{16}{\alpha^2} + o\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)\right)\right)$$

$\boxed{r = 1 - \frac{1}{\alpha} + o\left(\frac{1}{\alpha}\right)}$: il y a ionisation quasi-totale du gaz

- si $\alpha \ll 1$, alors

$\boxed{r \simeq \alpha^{1/2} \ll 1}$: le gaz est partiellement ionisé

Photosphère du soleil :

$T = 6000\ K, \quad n = 10^{23}\ m^{-3}$

$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}\ J/K$

$= 8,6 \cdot 10^{-5}\ eV/K$

$k_B T = 0.516\ eV = 8,28\ 10^{-20}\ J$

$\varepsilon = 13.6\ eV$

$$e^{-\frac{\varepsilon}{k_B T}} = e^{-\frac{13.6}{0.516}} = e^{-26} = 3.6\ 10^{-12}$$

$\hbar = 1.05\ 10^{-34}\ J/s$

$m_e = 9,1\ 10^{-31}\ kg$

$$\lambda_e^{-3} = \left(\frac{2\pi \hbar^2}{m_e k_B T}\right)^{-3/2} = 1.13\ 10^{27}\ m^{-3}$$

$$\alpha = \frac{1}{n} \lambda_e^{-3} e^{-\frac{\varepsilon}{k_B T}} = 4 \cdot 10^{-8} \ll 1$$

donc $\boxed{r \simeq \alpha^{1/2} \simeq 2 \cdot 10^{-4}}$: gaz partiellement ionisé

Nébuleuse :

$T = 10^4 K$, $n = 10^{12} m^{-3}$

$k_B T = 0.86 \ eV = 1.38 \ 10^{-19} J$

$e^{-\frac{\varepsilon}{k_B T}} = e^{-\frac{13.6}{0.86}} = 1.36 \ 10^{-7}$

$\lambda_e^{-3} = 2.44 \cdot 10^{27} \ m^{-3}$

$\alpha = \frac{1}{n} \lambda_e^{-3} e^{-\frac{\varepsilon}{k_B T}} = 3.3 \ 10^{8} \gg 1$

donc $\boxed{r = 1 - 3.10^{-9} \quad \text{: ionisation quasi totale du gaz}}$

5 D'après $\alpha := \frac{1}{n}\left(\lambda_e^{-3} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\right)$,

$n_T := \lambda_e^{-3} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}$ est une <u>densité critique</u> qui tient compte de la température T et de l'énergie de liaison ε.

- <u>si $kT \gg \varepsilon$: haute</u> $T°$,

alors $e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \simeq 1$

donc $n_T \simeq \lambda_e^{-3} = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{m_e kT}\right)^{-3/2}$

<u>$n_T \to \infty$ si $T \to \infty$</u>

- <u>si $kT \ll \varepsilon$: basse</u> Température

alors $e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \ll 1$,

<u>$n_T \to 0$ si $T \to 0$ très vite</u>,

donc

- si $n \ll n_T \iff \alpha \gg 1$

il y a ionisation quasi-totale car les atomes sont trop éloignés pour se recombiner.

ou car la température T est trop élevée.