Examen de physique statistique – Durée : 3h

— Une seule feuille manuscrite est autorisée.
— **Calculatrice et tout appareil électronique interdits.**
— Pour chaque question, $\boxed{\text{encadrez le résultat final demandé}}$. Ce résultat encadré sera considéré prioritairement lors de la correction.
— Pour chaque question, un barème indicatif (non définitif) est donné entre parenthèses.

1 La condensation de Bose-Einstein dans un puits harmonique (8/20)

On va décrire un **gaz avec un grand nombre $N \gg 1$ d'atomes identiques qui sont des bosons** de masse $m > 0$, de spin s entier, à l'équilibre thermique à une **température $T \geq 0$.** Le terme "gaz" signifie que dans ce modèle il n'y a pas d'interaction entre les particules, mais on va supposer que les atomes sont dans **un puits de potentiel harmonique** extérieur, c'est à dire que chaque atome a une énergie potentielle

$$U(\vec{q}) = \frac{1}{2} K |\vec{q}|^2 ,$$

avec la position $\vec{q} \in \mathbb{R}^3$ et une constante $K > 0$. On note $\varphi_n \in L^2(\mathbb{R}^3)$ les états quantiques pour une particule et ϵ_n leur énergie, indicés par $n \in \mathbb{N}$. La distribution de Bose Einstein donne l'expression **du nombre moyen d'atomes N_n dans l'état φ_n d'énergie ϵ_n :**

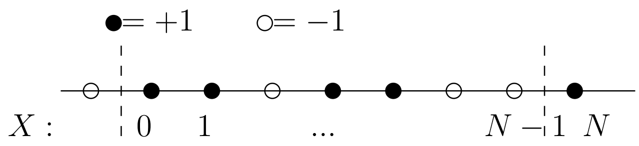
$$N_n = \frac{1}{e^{\frac{\epsilon_n - \mu}{kT}} - 1}. \tag{1.1}$$

On recherche la proportion $\lim_{N\to\infty} \frac{N_n}{N}$ et en particulier $\lim_{N\to+\infty} \frac{N_0}{N}$ **qui est la proportion d'atomes condensés dans l'état fondamental φ_0, en fonction de la température T.** La difficulté est que dans l'expression (1.1), on ne connaît pas $\mu \in \mathbb{R}$ car il est déterminé par N et T.

1. (1) Écrire l'expression du Hamiltonien à une particule $H(\vec{q}, \vec{p})$ en fonction de $p = |\vec{p}|$, $q = |\vec{q}|$, m, K.
2. (1) On effectue un changement de variable (transformation canonique) $\vec{Q} := \lambda \vec{q}$, $\vec{P} = \lambda^{-1} \vec{p}$ avec un facteur $\lambda > 0$ de sorte à obtenir $H = \frac{1}{2}\omega(P^2 + Q^2)$ avec $P = \left|\vec{P}\right|$, $Q = \left|\vec{Q}\right|$. Donner l'expression de λ et ω en fonction de m, K.
3. (1) Poser $\vec{Q} = (Q_1, Q_2, Q_3)$ et $Z_j = Q_j + iP_j \in \mathbb{C}$ pour $j = 1, 2, 3$, écrire les équations de mouvement de Hamilton pour déduire $Z_j(t)$ en fonction de $Z_j(0)$ et ω, t.
4. (1) D'après la loi de Weyl, le nombre d'états φ_n d'énergie inférieure à ϵ donné est approximativement
$$n(\epsilon) \approx \frac{(2s+1)}{(2\pi\hbar)^3} \mathrm{Vol} \left\{ \left(\vec{Q}, \vec{P}\right) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } H\left(\vec{Q}, \vec{P}\right) \leq \epsilon \right\}. \tag{1.2}$$
Donner l'expression de $n(\epsilon)$ en fonction de $s, \hbar, \omega, \epsilon, C'_d$ où la constante $C'_d > 0$ donne le volume de la boule $B^d(R)$ de rayon R dans $\mathbb{R}^d$: $\mathrm{Vol}\left(B^d(R)\right) = C'_d R^d$. On ne cherchera pas C'_d mais on précisera la valeur de d.
5. (1)Déduire la densité d'états
$$\frac{dn}{d\epsilon} = C \frac{\epsilon^\alpha}{\omega^\beta} \tag{1.3}$$
avec C que l'on exprimera en fonction de $s, \hbar, C'_d$ et des exposants α, β à trouver.
6. (1) Pour chaque état à une particule indicé par $n \in \mathbb{N}$, posons $x_n := \frac{\epsilon_n - \mu}{kT} > 0$. On va supposer $x_0 \ll x_1$. Déduire une comparaison entre N_n et N_0 pour $n \geq 1$.
7. (1) On écrit
$$N = \sum_{n\geq 0} N_n = N_0 + \int_{\epsilon_1}^{+\infty} \left(\frac{dN}{dn}\right) \left(\frac{dn}{d\epsilon}\right) d\epsilon \tag{1.4}$$
où on a séparé l'état $n = 0$ des suivants $n \geq 1$. Ici $\frac{dN}{dn} = N_n$ est la distribution de Bose Einstein (1.1) et $\frac{dn}{d\epsilon}$ est la densité d'états que l'on va approximer en utilisant (1.3). En approximant $x_1 \approx 0$, $\mu \approx 0$ et posant $x := \frac{\epsilon}{kT}$, utiliser (1.4) pour exprimer N en fonction de N_0, kT, C, ω et $I := \int_0^\infty \frac{x^2}{e^x - 1} dx$. Déduire que la proportion de particules dans le condensat est pour $T < T_B$:
$$\lim_{N\to+\infty} \frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_B}\right)^\gamma$$
avec un exposant γ à trouver et une température de transition T_B que l'on exprimera en fonction de k, C, I, N, ω.
8. (1) Comment doit se comporter ω en fonction de N pour que T_B ait une limite pour $N \to \infty$?.

2 Modèle d'Ising à une dimension (16/20)

Soit $N \geq 1$ entier qui est la taille du réseau. On considère le réseau unidimensionnel[1] $\Lambda = \mathbb{Z}/(N\mathbb{Z})$ de taille N et **périodique**. Chaque site est noté $X \in \Lambda$ et possède une variable $f_X = \pm 1$ qui modélise un spin up ou down. Une configuration $f = (f_X)_{X\in\Lambda}$ est un choix $f_X = \pm 1$ pour chaque point $X \in \Lambda$ du réseau. On notera $\{-1,+1\}^{\Lambda}$ l'espace des configurations possibles. Voici un exemple de configuration (ici $N = 7$) :



Soit $B \in \mathbb{R}$ donné qui correspond à un champ magnétique extérieur. Dans ce modèle, l'énergie $E(f)$ et l'aimantation $M(f)$ de la configuration f sont

$$E(f) := \sum_{X\in\Lambda} (-f_X.f_{X+1}) - \sum_{X\in\Lambda} Bf_X, \qquad M(f) := \frac{1}{N}\sum_{X\in\Lambda} f_X \quad \in [-1,1]. \tag{2.1}$$

1. (2) Études des configurations :
   (a) Combien y a t-il de configurations f possibles ?
   (b) Si $B = 0$, quelle(s) configuration(s) donnent l'énergie minimale et quelle est leur aimantation ?
   (c) Si $B = 0$, quelle(s) configuration(s) donnent l'énergie maximale et quelle est leur aimantation ?
   (d) Si $B \gg 1$ est très grand, quelle(s) sont les configuration(s) d'énergie minimale et maximale et leur aimantation ?
2. (1) Soit $T > 0$ la température et $\beta := \frac{1}{kT}$ avec la constante de Boltzmann k. D'après la loi de Boltzmann, la probabilité de la configuration f est $p(f) = \frac{1}{Z(\beta,B)}e^{-\beta E(f)}$,avec $Z(\beta,B) > 0$ une constante de normalisation appelée **fonction de partition**. Donner la définition de l'énergie moyenne $\langle E\rangle$ et de l'aimantation moyenne $\langle M\rangle$ à partir de $E(f), M(f), p(f)$ en faisant intervenir le symbole $\sum_{f\in\{-1,+1\}^{\Lambda}}$.
3. (4) Donner l'expression des quantités suivantes à partir de la fonction de partition $Z(\beta,B)$, de $\ln Z$ ou de leurs dérivées (et éventuellement k,β,N) :
   (a) l'énergie moyenne $\langle E\rangle$
   (b) la capacité calorifique $C := \frac{\partial\langle E\rangle}{\partial T}$
   (c) les fluctuation en énergie $\mathrm{Var}(E) := \left\langle (E - \langle E\rangle)^2\right\rangle = \langle E^2\rangle - \langle E\rangle^2$ et relier le résultat à C.
   (d) l'aimantation moyenne $\langle M\rangle$
   (e) la susceptibilité magnétique $\chi := \frac{\partial\langle M\rangle}{\partial B}$, les fluctuations de l'aimantation $\mathrm{Var}(M)$ et relier les deux.
   (f) l'entropie de Boltzmann $S(p) = -k\sum_f p(f)\ln p(f)$.
4. (2) Pour préparer la suite, on rappelle des notations d'algèbre linéaire. Si $A := \begin{pmatrix} A_{-1,-1} & A_{-1,+1} \\ A_{+1,-1} & A_{+1,+1}\end{pmatrix}$ est une matrice 2×2 avec des éléments de matrice notés A_{f_0,f_1} et des indices $f_0, f_1 \in \{-1,+1\}$, alors le produit de deux matrices AB a pour éléments $(AB)_{f_0,f_2} = \sum_{f_1\in\{-1,1\}} A_{f_0,f_1}B_{f_1,f_2}$. On rappelle aussi que la trace d'une matrice est donnée par $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{f_0\in\{-1,1\}} A_{f_0,f_0}$. Avec ces notations, pour un entier $N \geq 1$, écrire les éléments de matrice $\left(A^N\right)_{f_0,f_N}$de la matrice A^N et écrire $\mathrm{Tr}\left(A^N\right)$ à partir des éléments de matrice de A et en faisant apparaître le symbole $\sum_{f\in\{-1,+1\}^{\Lambda}}$. Aide : on remarquera que le symbole $\sum_{f\in\{-1,+1\}^{\Lambda}}$ est identique aux sommes imbriquées $\sum_{f_0\in\{-1,1\}}\sum_{f_1\in\{-1,1\}}\cdots\sum_{f_{N-1}\in\{-1,1\}}$.
5. (2) A l'aide des questions précédentes, exprimer la fonction de partition sous la forme $Z = \mathrm{Tr}\left(A^N\right)$ avec une matrice A de taille 2×2 dont on écrira l'expression explicite à partir de β, B. Rem : cette matrice est appelée **matrice de transfert.**
6. (2) Calculer[2] les deux valeurs propres λ_+, λ_- de A en fonction de β, B. Montrer que $0 < \lambda_- < \lambda_+$. Déduire $\mathrm{Tr}\left(A^N\right)$ et $\ln Z$ dans la limite thermodynamique $N \to +\infty$.
7. (2) Déduire l'expression de l'aimantation moyenne $\langle M\rangle$ dans la limite thermodynamique $N \to \infty$ en fonction de β, B. Quelle est sa valeur si le champ extérieur est nul $B = 0$? Commentez sur ce modèle d'Ising en dimension un en rapport avec le même modèle en dimension deux ?
8. (1) Calculer la susceptibilité magnétique en champ nul $\chi := \frac{\partial\langle M\rangle}{\partial B}$ pour $B \to 0$ et tracer $T \to \chi^{-1}(T)$.

1. On rappelle que $\mathbb{Z}/(N\mathbb{Z})$ est l'ensemble des entiers $\mathbb{Z}$ modulo N. Ainsi $\mathbb{Z}/(N\mathbb{Z}) = \{0, 1, \ldots N-1\}$ et avec la règle que $(N-1)+1 = 0$.
2. Rappel : les valeurs propres λ_+, λ_- sont les zéros du polynôme $P(\lambda) = \det(\lambda\mathrm{Id} - A)$ et $\mathrm{Tr}A = \lambda_+ + \lambda_-$, $\det A = \lambda_+\lambda_-$. On a aussi $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$