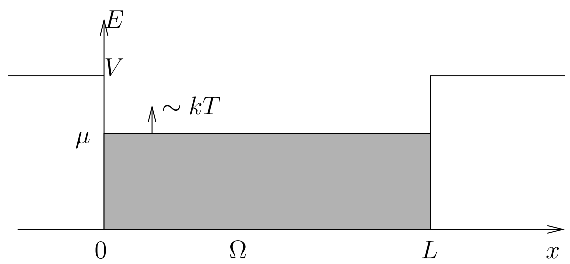
Examen de **physique statistique**, durée 3h.
Une feuille manuscrite et calculatrice autorisées. **Encadrer vos résultats**.

1 Statistique quantique : Émission d'électrons par un métal

Dans un (vieux) tube radio, ou tube de téléviseur, il y a une source d'électrons, à savoir un filament de tungstène chauffé, et une plaque chargée positivement pour attirer les électrons. La but de ce problème est de savoir combien d'électrons par seconde (le courant) pouvons-nous extraire d'un morceau de tungstène et comment ce nombre varie t-il avec la température.

Pour cela on schématise le fil de tungstène (le métal) par un domaine Ω. Les électrons sont libres dans ce domaine Ω, c'est à dire que leur énergie est seulement l'énergie cinétique, il n'y a pas d'énergie potentielle. Pour modéliser le confinement des électrons dans ce domaine Ω, on introduit une énergie potentielle $V > 0$ à l'extérieur du domaine. Ainsi, seuls les électrons atteignant une paroi avec une vitesse suffisante quittent le métal. Ils s'en vont ensuite vers la plaque chargée. (Ces électrons sont remplacés, afin que le métal reste neutre). Dans le domaine, les électrons seront modélisés par un gaz de Fermions indépendants. On notera μ le potentiel chimique et T la température.

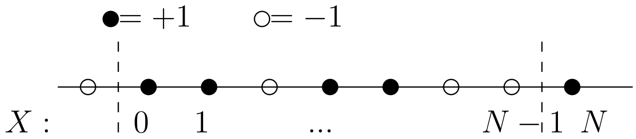
Dans un premier temps, on traitera le modèle à une dimension : le domaine Ω est un segment de longueur L selon l'axe x, voir la figure.



1. Questions préliminaires
   (a) Exprimer l'énergie E d'un électron dans le métal à partir de son impulsion p et de sa masse m.
   (b) Quelle est la condition sur E et p pour que l'électron puisse s'extraire du métal par le coté droit $x = L$?
   (c) quelle sera sa vitesse v une fois libéré exprimée à partir de son énergie E ?
2. On suppose que dans le métal, les électrons sont à l'équilibre thermique, répartis selon la distribution de Fermi.
   (a) Rappeler l'expression de la distribution de Fermi $N(E) \in [0, 1]$ qui donne le nombre moyen d'électrons dans un état individuel d'énergie E à partir de la température T et du potentiel chimique μ.
   (b) On suppose que $V - \mu \gg kT$. Montrer que pour les électrons susceptibles de s'extraire, $N(E)$ s'exprime approximativement par une simple exponentielle.
3. On considère un petit intervalle de temps $dt > 0$ et un intervalle d'impulsion $p \in [p, p + dp]$.
   (a) Dans l'espace des phases pour un électron, identifier et donner la valeur de la surface dS occupée par les états (x, p) ayant l'impulsion $p \in [p, p + dp]$ et dont la trajectoire sortira du métal par le côté droit $x = L$, dans l'intervalle de temps dt.
   (b) En appliquant la loi de Weyl, donner le nombre dn d'états pour un électron correspondant à cette surface dS.
   (c) Déduire le nombre moyen d'électrons $dN(p)$ correspondant.
   (d) Déduire le courant I émis par les électrons qui s'échappent du métal par le côté droit, sous la forme $I = ATe^{-B/T}$ et exprimer A, B à partir des données.
4. Pour améliorer le modèle, refaire le calcul avec les modifications nécessaires en traitant des électrons dans un domaine à trois dimension et montrer que la densité de courant selon une direction donnée est de la forme « loi empirique de Richardson »
$$i = AT^2 e^{-B/T}$$
   Aide : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

2 Modèle d'Ising du ferromagnétisme à une dimension

Soit $N \geq 1$ entier qui est la taille du réseau. On considère le réseau unidimensionnel[1] $\Lambda = \mathbb{Z}/(N\mathbb{Z})$ de taille N et **périodique**. Chaque site est noté $X \in \Lambda$ et possède une variable $f_X = \pm 1$ qui modélise un spin up ou down. Une configuration $f = (f_X)_{X\in\Lambda}$ est un choix $f_X = \pm 1$ pour chaque point $X \in \Lambda$ du réseau. On notera $\{-1,+1\}^\Lambda$ l'espace des configurations possibles. Voici un exemple de configuration (ici $N = 7$) :



Soit $B \in \mathbb{R}$ donné qui correspond à un champ magnétique extérieur. Dans ce modèle, l'énergie $E(f)$ et l'aimantation $M(f)$ de la configuration f sont

$$E(f) := \sum_{X\in\Lambda} (-f_X . f_{X+1}) - \sum_{X\in\Lambda} B f_X, \qquad M(f) := \frac{1}{N} \sum_{X\in\Lambda} f_X \quad \in [-1,1]. \tag{2.1}$$

1. Etudes des configurations :
   (a) Combien y a t-il configurations f possibles ?
   (b) Si $B = 0$, quelle(s) configuration(s) donnent l'énergie minimale et quelle est leur aimantation ?
   (c) Si $B = 0$, quelle(s) configuration(s) donnent l'énergie maximale et quelle est leur aimantation ?
   (d) Si $B \gg 1$ est très grand, quelle(s) sont les configuration(s) d'énergie minimale et maximale et leur aimantation ?
2. Soit $T > 0$ la température et $\beta = \frac{1}{kT}$. D'après la loi de Boltzmann, la probabilité de la configuration f est $p(f) = \frac{1}{Z(\beta,B)} e^{-\beta E(f)}$,avec $Z(\beta, B) > 0$ une constante de normalisation appelée **fonction de partition**. Donner la définition de l'énergie moyenne $\langle E\rangle(T)$ et de l'aimantation moyenne $\langle M\rangle(T)$ à partir de $E(f), M(f), p(f)$ en faisant intervenir le symbole $\sum_{f\in\{-1,+1\}^\Lambda}$.
3. Donner l'expressions des quantités suivantes à partir de la fonction de partition $Z(\beta, B)$, de $\ln Z$ ou de leurs dérivées :
   (a) l'énergie moyenne $\langle E\rangle$
   (b) la capacité calorifique $C := \frac{\partial\langle E\rangle}{\partial T}$
   (c) les fluctuation en énergie $\mathrm{Var}(E) := \left\langle (E - \langle E\rangle)^2 \right\rangle = \langle E^2\rangle - \langle E\rangle^2$ et relier le résultat à C.
   (d) l'aimantation moyenne $\langle M\rangle$
   (e) la susceptibilité magnétique $\chi := \frac{\partial\langle M\rangle}{\partial B}$, les fluctuations de l'aimantation $\mathrm{Var}(M)$ et relier les deux.
   (f) l'entropie de Boltzmann $S(p) = -k\sum_f p(f)\ln p(f)$.
4. Pour préparer la suite, on rappelle des notations d'algèbre linéaire. Si $A := \begin{pmatrix} A_{-1,-1} & A_{-1,+1} \\ A_{+1,-1} & A_{+1,+1} \end{pmatrix}$ est une matrice 2×2 avec des éléments de matrice notés A_{f_0,f_1} et des indices $f_0, f_1 \in \{-1,+1\}$, alors le produit de deux matrices AB a pour éléments $(AB)_{f_0,f_2} = \sum_{f_1\in\{-1,1\}} A_{f_0,f_1} B_{f_1,f_2}$. On rappelle aussi que la trace d'une matrice est donnée par $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{f_0\in\{-1,1\}} A_{f_0,f_0}$. Avec ces notations, pour un entier $N \geq 1$, écrire les éléments de matrice $\left(A^N\right)_{f_0,f_N}$ de la matrice A^N et écrire $\mathrm{Tr}\left(A^N\right)$ en faisant apparaître le symbole $\sum_{f\in\{-1,+1\}^\Lambda}$. Aide : on remarquera que le symbole $\sum_{f\in\{-1,+1\}^\Lambda}$ est identique aux sommes imbriquées $\sum_{f_0\in\{-1,1\}} \sum_{f_1\in\{-1,1\}} \cdots \sum_{f_{N-1}\in\{-1,1\}}$.
5. A l'aide des questions précédentes, exprimer la fonction de partition sous la forme $Z = \mathrm{Tr}\left(A^N\right)$ avec une matrice A de taille 2×2 dont on écrira l'expression explicite à partir de β, B. Rem : cette matrice est appelée **matrice de transfert.**
6. Calculer[2] les deux valeurs propres λ_+, λ_- de A. Montrer que $0 < \lambda_- < \lambda_+$. Déduire $\mathrm{Tr}\left(A^N\right)$ et $\ln Z$ dans la limite thermodynamique $N \to +\infty$.
7. Déduire l'expression de l'aimantation moyenne $\langle M\rangle$ dans la limite thermodynamique $N \to \infty$ en fonction de β, B. Quelle est sa valeur si le champ extérieur est nul $B = 0$? Commentez sur ce modèle d'Ising en dimension un en rapport avec le même modèle en dimension 2 ?
8. Calculer la susceptibilité magnétique en champ nul $\chi := \frac{\partial\langle M\rangle}{\partial B}$ pour $B \to 0$ et tracer $T \to \chi^{-1}(T)$.

1. On rappelle que $\mathbb{Z}/(N\mathbb{Z})$ est l'ensemble des entiers $\mathbb{Z}$ modulo N. Ainsi $\mathbb{Z}/(N\mathbb{Z}) = \{0, 1, \ldots N-1\}$ et avec la règle que $(N-1)+1 = 0$.
2. Rappel : les valeurs propres λ_+, λ_- sont les zéros du polynome $P(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{Id} - A)$ et $\mathrm{Tr}A = \lambda_+ + \lambda_-$, $\det A = \lambda_+\lambda_-$. On a aussi $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$